Erarbeitung nicht-zählender Rechenstrategien

Entspricht das Ihren Erfahrungen?

"Wird zählendes Rechnen verfestigt, stellt es eine Sackgasse dar, aus der die Schüler im 2. oder im 3. Schuljahr kaum mehr herauskommen."

J.H. Lorenz / H. Radatz, 1993

Und wie steht es damit?

"Am Ende des 1. Schuljahres sollen die Kinder das kleine Einspluseins und Einsminuseins im Zahlenraum bis 20 auswendig wissen […]

selbstverständlich auf Grundlage eines Verständnisses von Addition und Subtraktion."

Radatz, Schipper, Dröge & Ebeling 1996, S. 83

Zählendes Rechnen – warum eigentlich nicht?

Sie kopieren aus einem Fachbuch, die Seiten 26 – 32.

Wie viele Seiten kopieren Sie?

Zählendes Rechnen – warum eigentlich nicht?

Sie fahren auf Urlaub, vom 9. bis 16. Juli.

Wie viele Hotel-Nächte müssen Sie bezahlen?

Zählendes Rechnen als *Haupt-Strategie* – warum eigentlich nicht?

Nachteile des zählenden Rechnens (vgl. Gerster 1994):

- zeitaufwändig
- konzentrationsaufwändig
- prinzipiell fehleranfällig

Zählendes Rechnen als *Haupt-Strategie* – warum eigentlich nicht?

Als *Hauptstrategie* des Rechnens behindert es

- das Erkennen von Zahlstrukturen
- das Erkennen von Zusammenhängen
- die Entwicklung von "Zahlensinn"

Worüber wir uns klar sein sollten:

Aus Sicht der Kinder
spricht doch
(fast) alles
für das zählende Rechnen!

Zählendes Rechnen – was denn sonst?

- Wer zählen kann, kann zählend rechnen!
- Im überschaubaren Zahlenraum in der Regel erfolgreich!
- Wenn das im Unterricht *zählt*:

VIELE Aufgaben RICHTIG zu lösen

dann ist es klug,
bei vertrauten, bewährten Strategien zu bleiben!

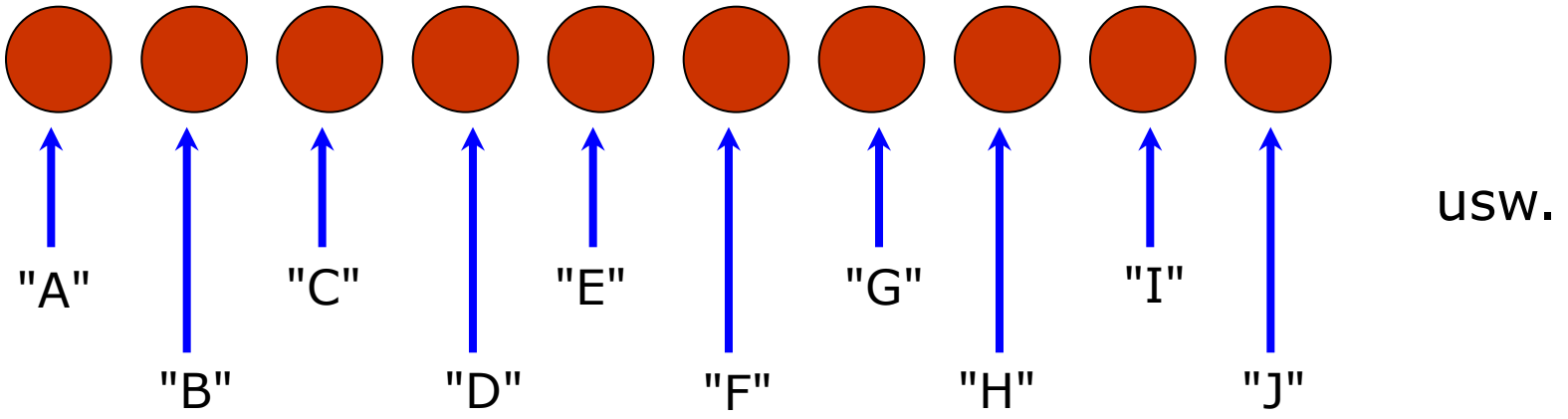
Zählendes Rechnen – was denn sonst?

Vor allem aber:

Was soll ein Kind denn machen,
wenn es eine Rechnung noch nicht weiß?

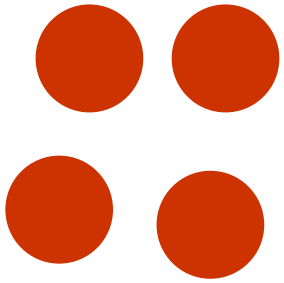
Zählendes Rechnen – was denn sonst?

Ein Versuch, Rechnen aus der Sicht von Kindern zu erleben:

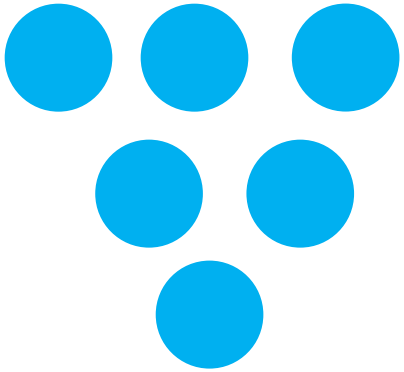


Ist klar, wie es gemeint ist?

Wie viele rote?



Wie viele blaue?



Wie viele insgesamt?

Rechnen Sie nun bitte...

F + H

Aber ohne zu schummeln!

Schummeln = auf Zahlen ausweichen:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	…

Also: Vergessen Sie die Zahlen – und rechnen Sie die folgenden Aufgaben:

C + L

K + D

O – C

O – N

Ihre Lösung für K + D?
Ihre Strategie?

C + L = O

Dann ist L + C auch O

K ist um A weniger als L

D ist um A mehr als C

Also: K + D = L + C = O

Zu kompliziert für Kinder?

Aufgabe: 4 + 6

Mario, Mitte 1. Schuljahr:
(ca. 5 Sekunden Nachdenken) Zehn!

Interviewer: Wie bist du draufgekommen?

Mario:

Na so halt. Drei plus sieben ist zehn, das weiß ich schon.
Das da (tippt auf die 4) ist eins mehr als drei,
aber das (tippt auf die 6) ist eins weniger,
also ist es auch zehn.

Ihre Lösung für O – C?
Ihre Strategie?

$$C + L = O$$

$$C + L = O \Rightarrow O - C = L$$

Zu kompliziert für Kinder?

Aufgabe: 8 - 5

Anna-Lena, Mitte 1. Schuljahr, sehr rasch: „Drei!“

Interviewer: Wie bist du draufgekommen?

Anna-Lena: Ich rechne auch manchmal verkehrt!

Interviewer: Was heißt das, verkehrt?

Anna-Lena: Weil, schau, weil: 5, 3, ist 8 (zeigt es mit ihren Fingern, die sie bis dahin keines Blickes gewürdigt hat).

Und wenn ich jetzt aber 3 weg gib, dann sind es wieder 5 übrig.

Ihre Lösung für O – N?
Ihre Strategie?

O - N = A

O folgt unmittelbar auf N!

Wie also könnte ein Kind Rechenaufgaben lösen, ohne zu zählen?

Natürlich auch so:

Aufgabe 3 + 3

Benni, Mitte 1. Schuljahr, innerhalb einer Sekunde: „Sechs!“

Wie bist du draufgekommen?

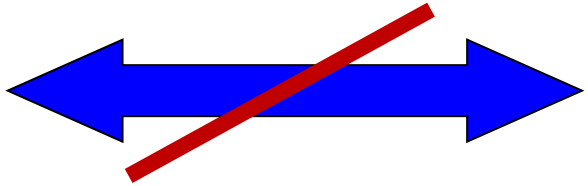
Weiß ich auswendig. Ist ja SO babysch!

Auswendiglernen als Schlüssel zum nichtzählenden Rechnen?

Zahlenraum bis einschließlich 10:

45	Plusrechnungen (ohne 0 als Summand)
55	Minusrechnungen (ohne 0 als Subtrahend)
45	zweigliedrige Zerlegungen (ohne 0 als „Teil“)
145	Grundaufgaben, die beherrscht werden sollten

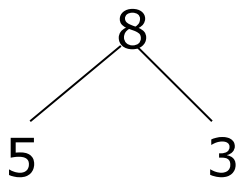
Ohne Erkennen der Zusammenhänge tatsächlich 145 isolierte Fakten!

3 + 3 = 6  6 - 3 = 3

Auswendigmerken unter diesen Umständen nicht unmöglich, aber

1) schwierig 2) von zweifelhaftem Wert

Tragfähige Alternativen zum zählenden Rechnen 1: Zahlen als Zusammensetzungen denken & nutzen



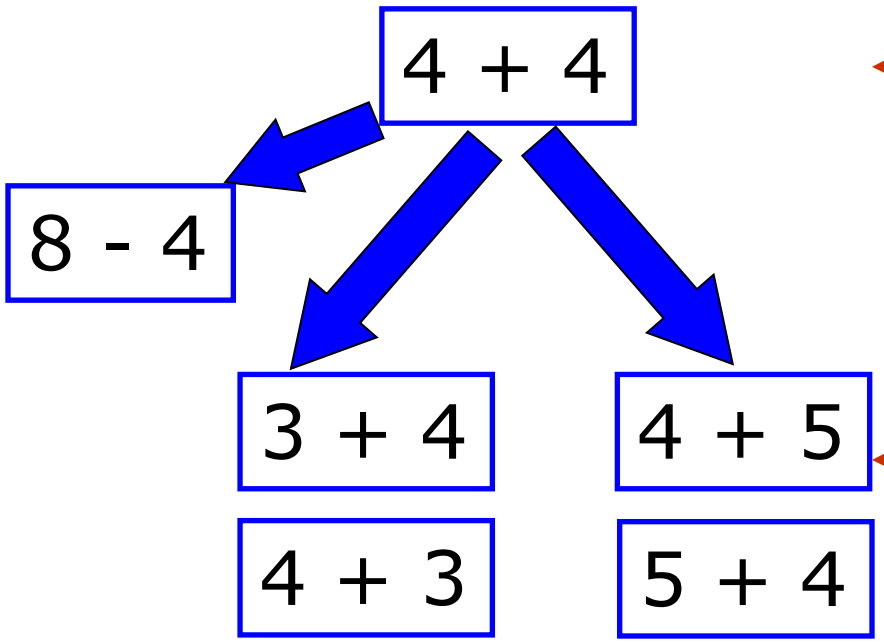
Hier ist frühes Auswendigmerken wichtig!

5 + 3 = 8
3 + 5 = 8

8 – 5 = 3
8 – 3 = 5

Das lässt sich aus bereits Gewusstem erschließen – aber nur auf Basis von Verständnis!

Tragfähige Alternativen zum zählenden Rechnen 2: Zusammenhänge von Aufgaben erkennen & nutzen!



Hier ist frühes Auswendigmerken wichtig!

Das lässt sich aus bereits Gewusstem erschließen – aber nur auf Basis von Verständnis!

Zahlen als Zusammensetzung: Keine Selbstverständlichkeit!

1 2 3 4 5 6 7 8

Da(s) ist 5!

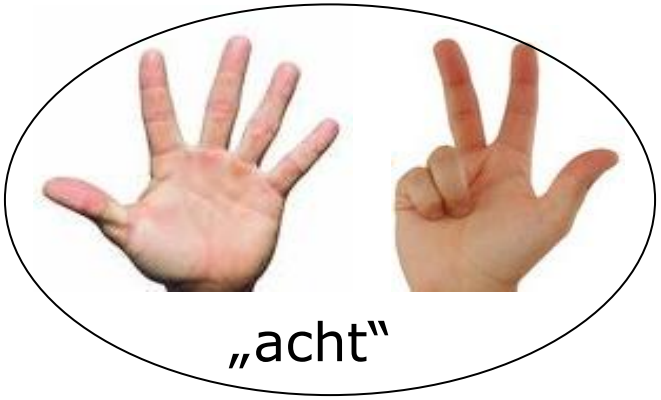
Da(s) ist 8!

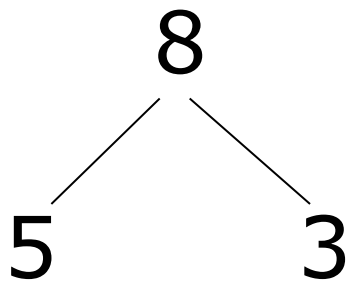
8

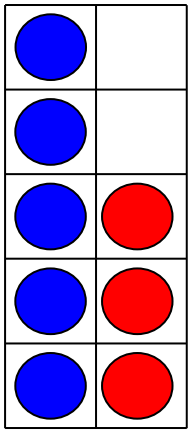
5

Bestimmend für das Zahl-Denken vieler Kinder zu Schulbeginn:
Zahlen als Stationen in einer Reihe

Dagegen "the major conceptual achievement of the early school years" (Resnick 1983):







$5 + 3 = 8$ $\quad$ $8 - 5 = 3$

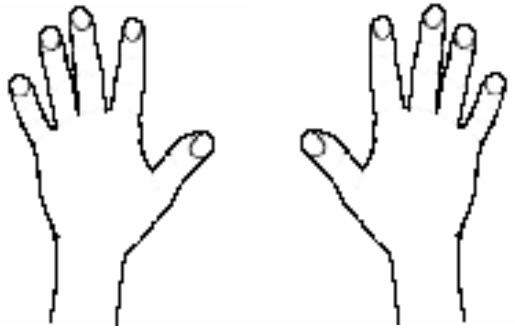
$3 + 5 = 8$ $\quad$ $8 - 3 = 5$

Zahlen als Zusammensetzungen, „Teile-Ganzes-Konzept"
Vgl. u.a. Resnick 1983; 1992; Gerster & Schultz 2002; Gaidoschik 2007; Fritz & Ricken 2008; Gerster 2009

Nächstliegendes Material zur Erarbeitung von "Zahlen als Zusammensetzung"...

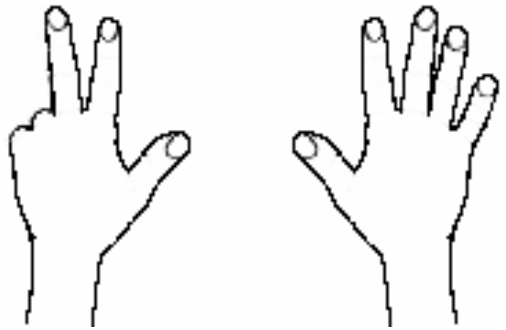
Erstes Teilziel:

Anzahlen bis 10 „auf einen Sitz“ zeigen können



- Tun lassen
- Darüber reden!

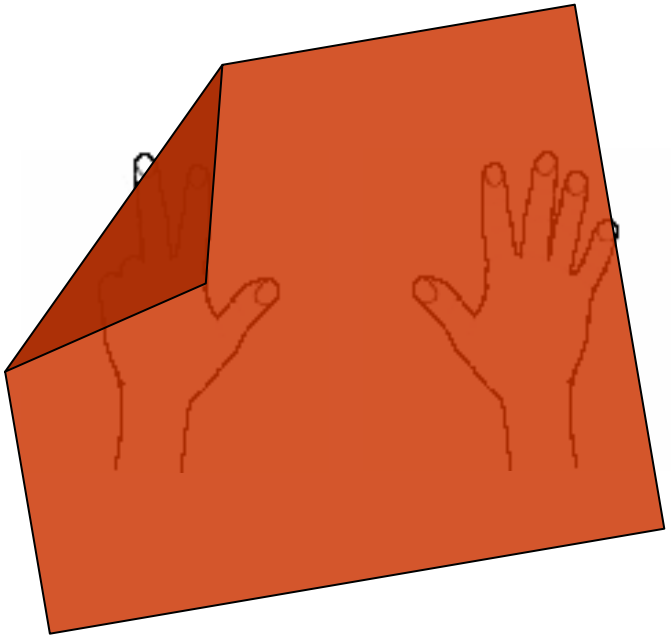
- Ziel: *Struktur* sollen *bewusst* werden
- *Sinnvoll:* *Vorerst* Konzentration auf "Kraft der Fünf"



Mit Fingern ohne Probleme möglich:

„Verdecktes Handeln“
als Zwischenschritt
zur Vorstellung:

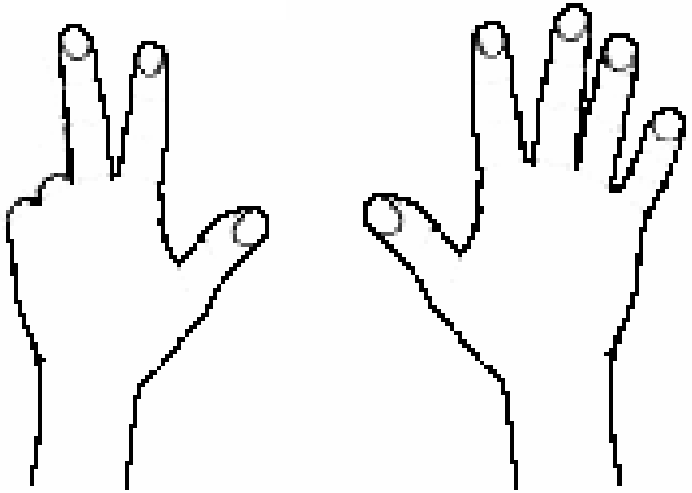
- Unter dem Tisch
- Hinter dem Rücken
- Mit verbundenen Augen



Wichtig:

Schon früh

Strukturen benützen = festigen



Je nach Vorkenntnissen auch schon auf Ziffern-/Symbolebene, diese aber nicht im Vordergrund:

Es geht ums Handeln und Versprachlichen!

Ein weites Feld für erstes nicht-zählendes Rechnen!

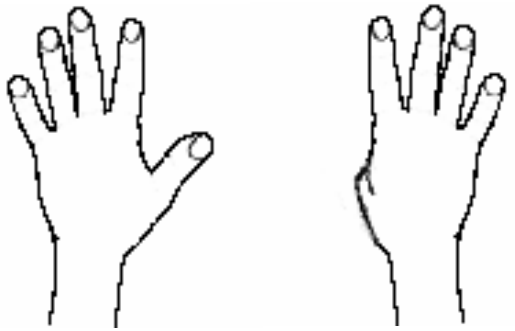
Welche Rechenoperationen können mit „Handpaketen“ von Anfang an nicht-zählend gelöst werden?

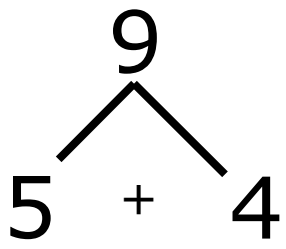
5+1	1+5	6-5	6-1	1+_= 6	5+_=6	5+6	6+5	6+6
5+2	2+5	7-5	7-2	2+_= 7	5+_=7	5+7	7+5	7+7
5+3	3+5	8-5	8-3	3+_= 8	5+_=8	5+8	8+5	8+8
5+4	4+5	9-5	9-4	4+_= 9	5+_=9	5+9	9+5	9+9
5+5		10-5		5+_=10				

Zahlen als Zusammensetzungen erarbeiten – und nutzen!

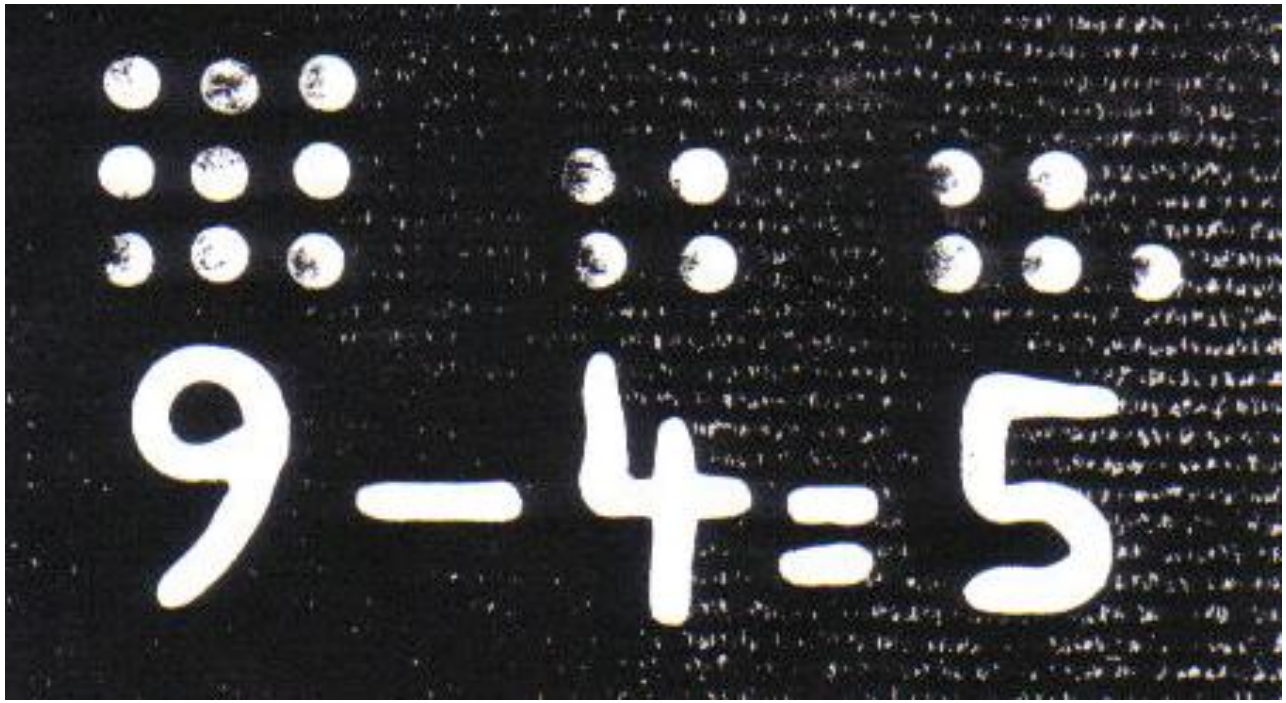
Weiterer Schritt:

- Symbolische Darstellungen entwickeln





Die Tücken der Symbole…

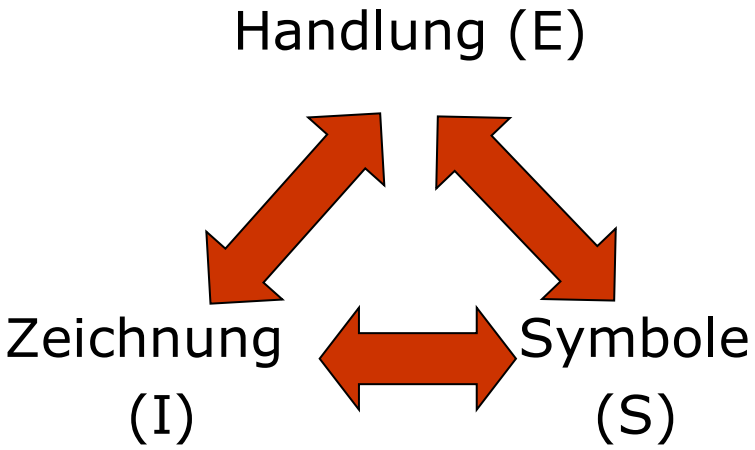


„Dyskalkulie-Training
nach der AFS-Methode“

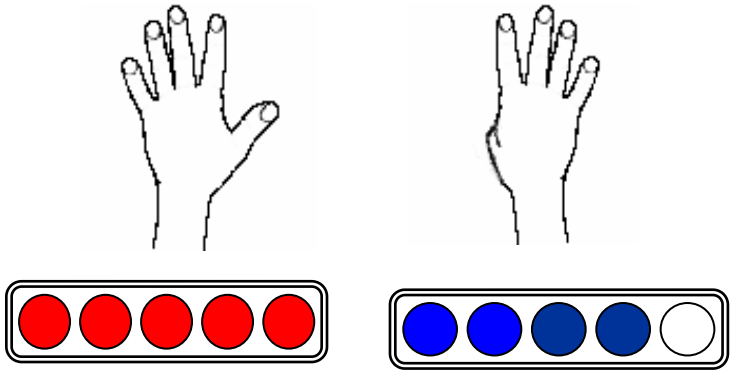
Aus: Kopp-Duller, A./Duller, L.: Dyskalkulie-Training nach der AFS-Methode. Klagenfurt: KLL-Verlag

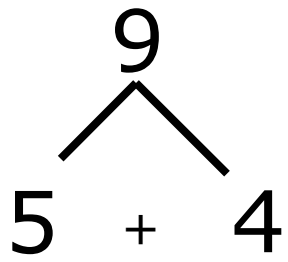
Dagegen: Symbole und Wirklichkeit dauerhaft verknüpfen!

Dabei von Anfang an wichtig:
Sachaufgaben, Rechengeschichten



in allen Varianten!

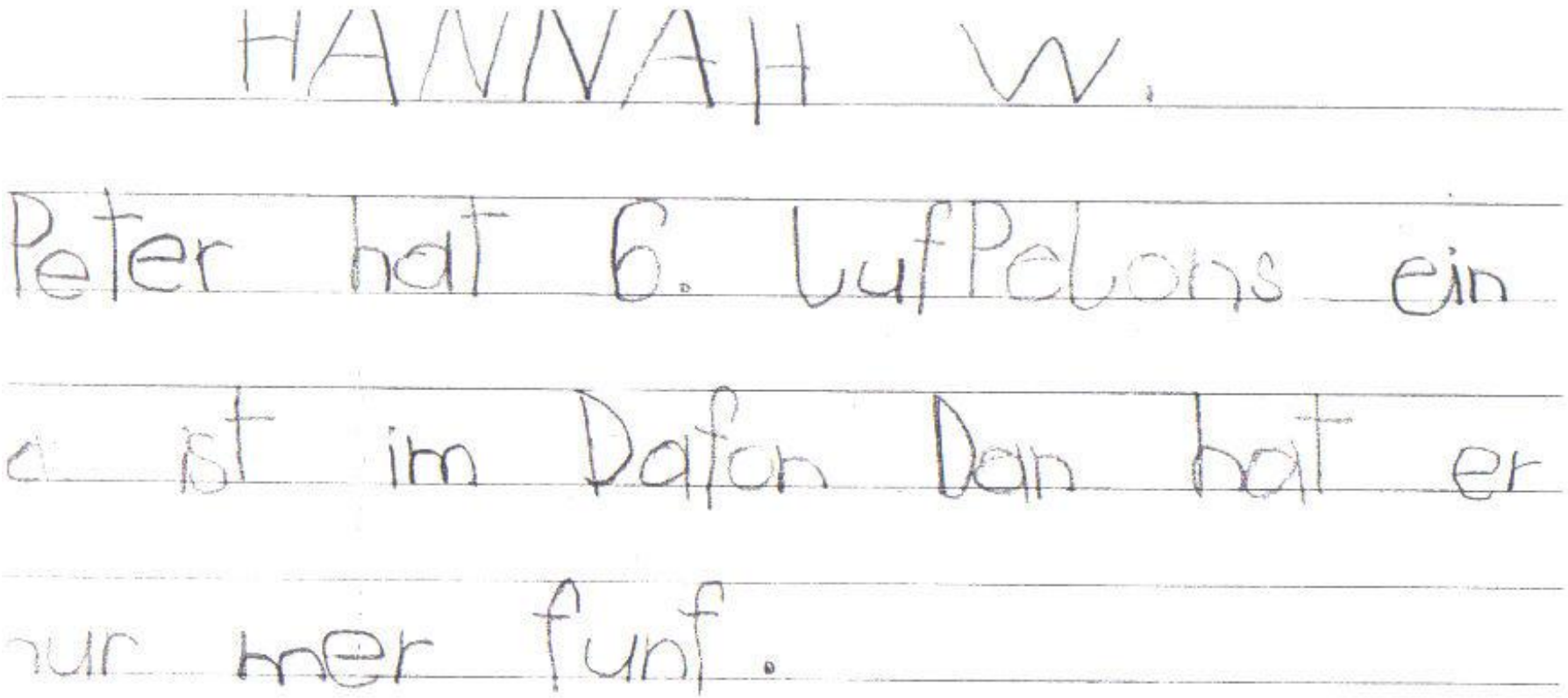




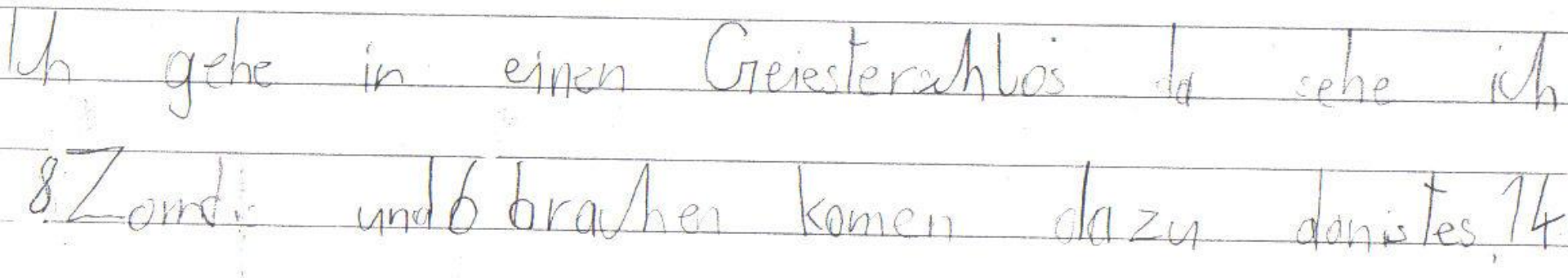
9 – 5 = 4 4 + 5 = 9

9 – 4 = 5 5 + 4 = 9

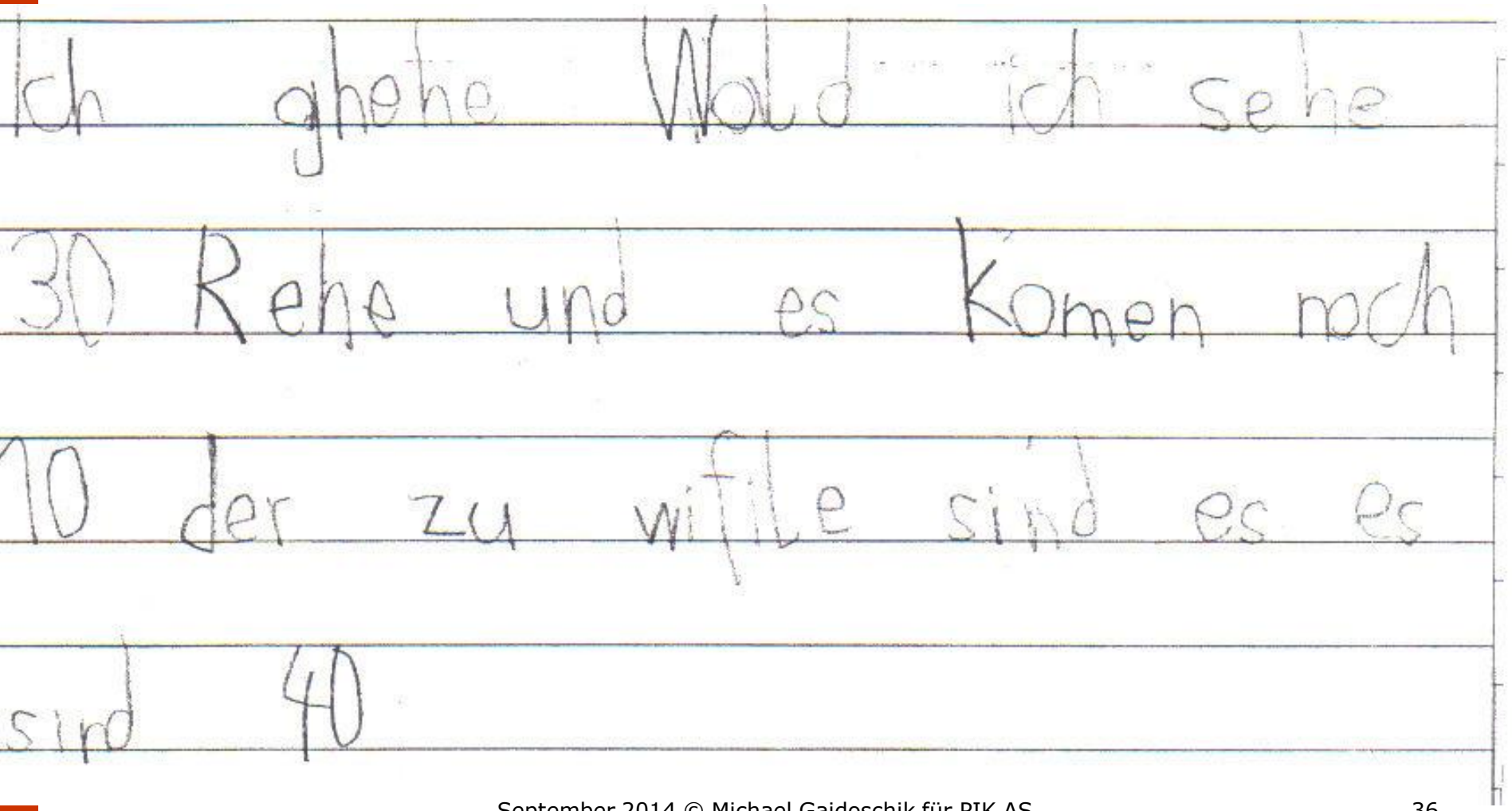
Kinder erfinden Sachaufgaben: 1. Volksschule, Jänner



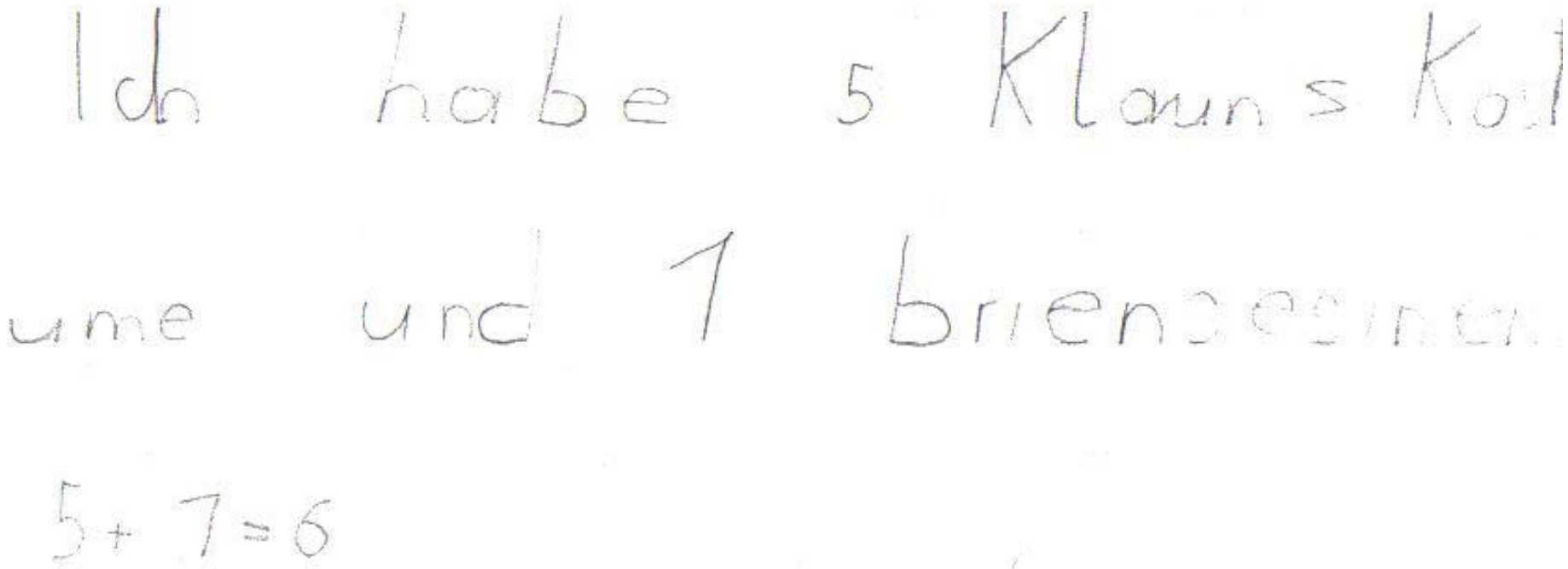
Kinder erfinden Sachaufgaben: 1. Volksschule, Jänner



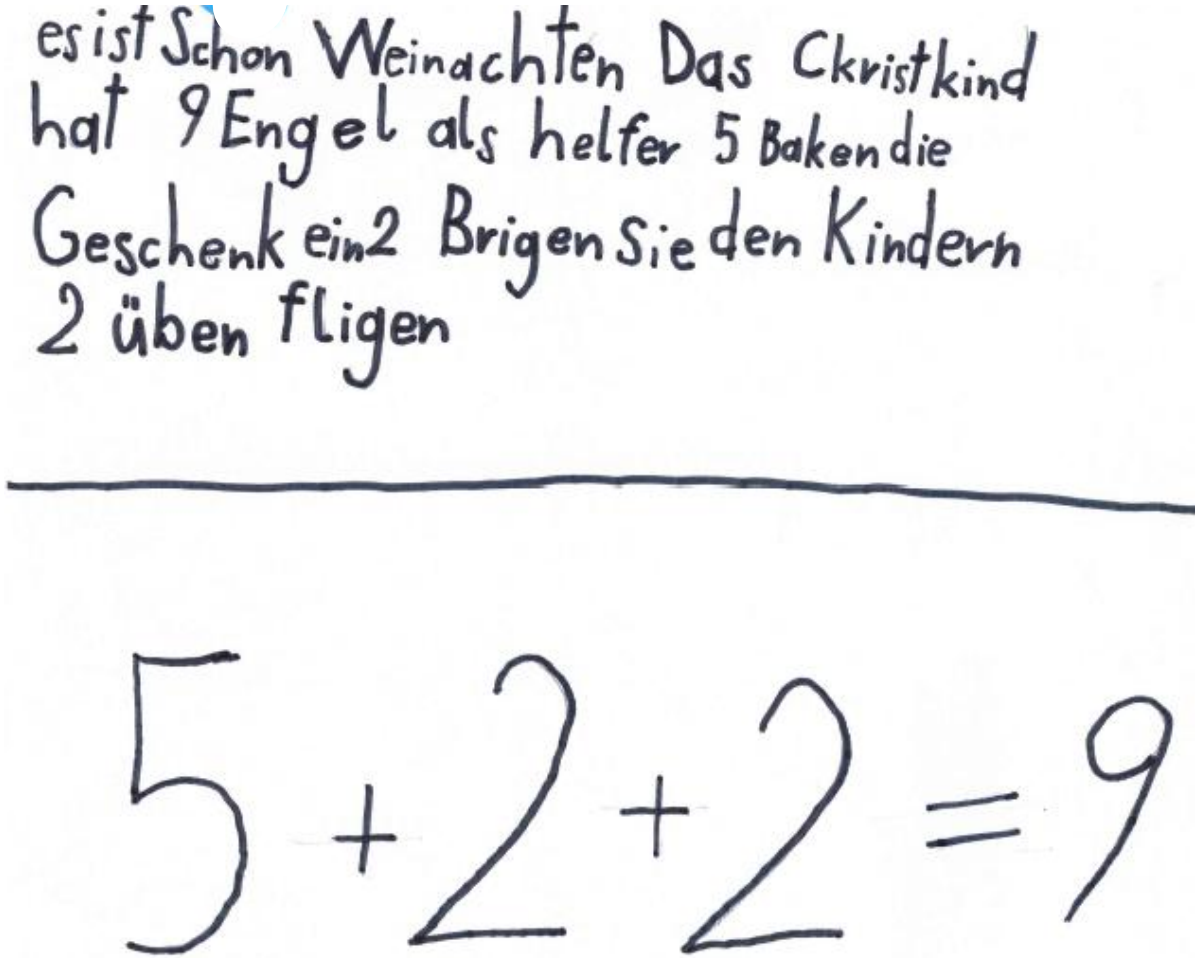
Kinder erfinden Sachaufgaben: 1. Volksschule, Jänner



Kinder erfinden Sachaufgaben: 1. Volksschule, Jänner



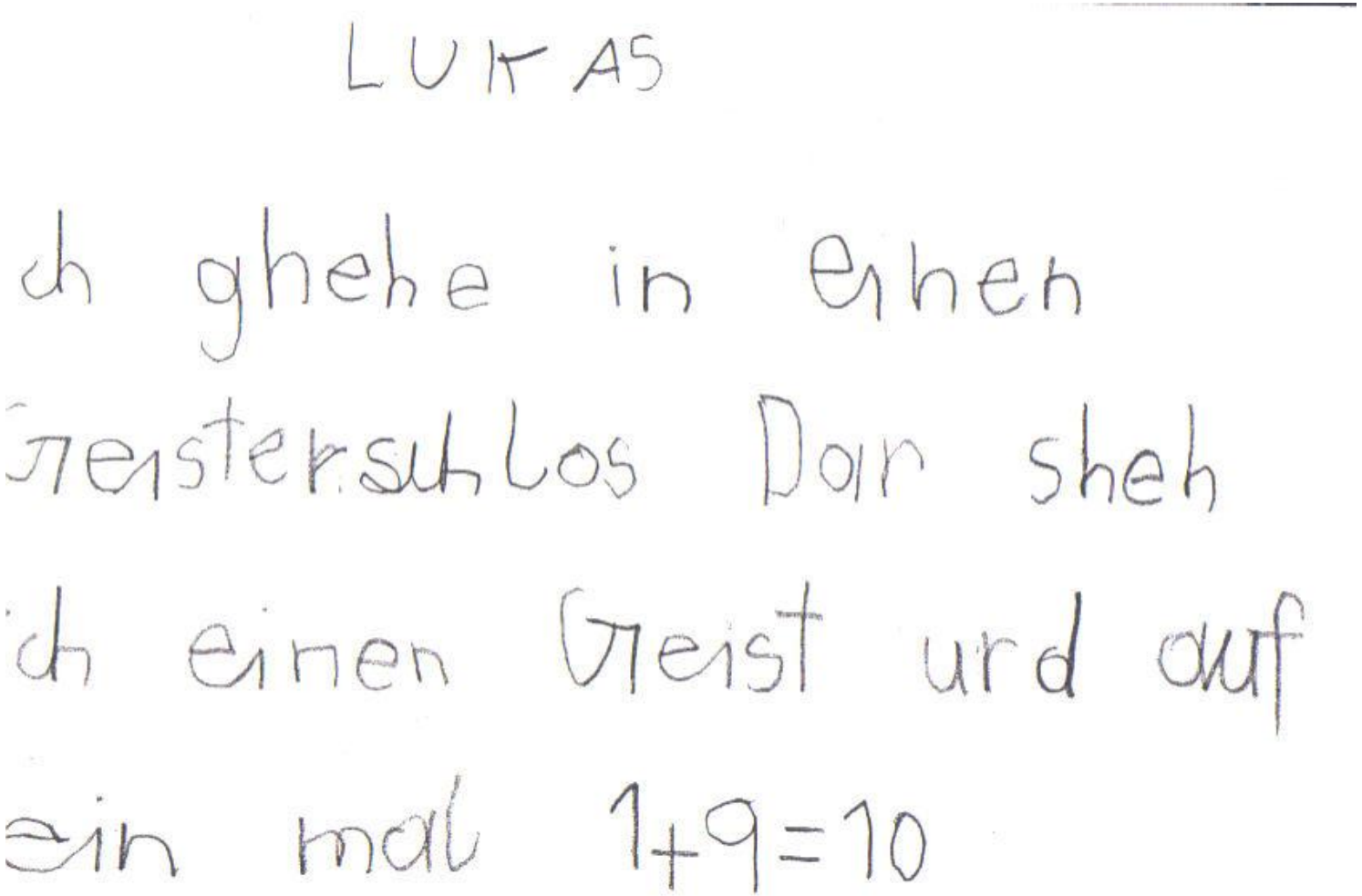
Kinder erfinden Sachaufgaben: 1. Volksschule, Dezember



Kinder erfinden Sachaufgaben: 1. Volksschule, Dezember

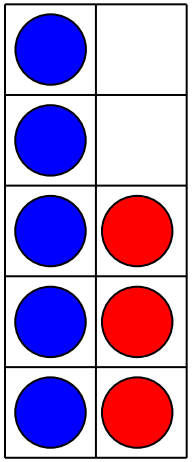
4 – 1 = 3

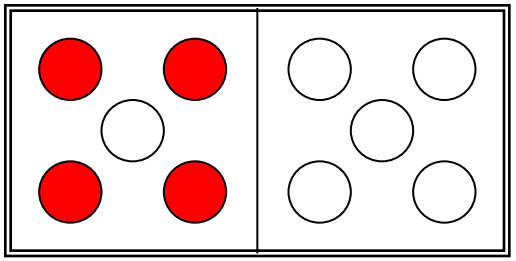
Kinder erfinden Sachaufgaben: 1. Volksschule, Jänner



Methodische Varianten für Erarbeitung von "Zahlen als Zusammensetzung"

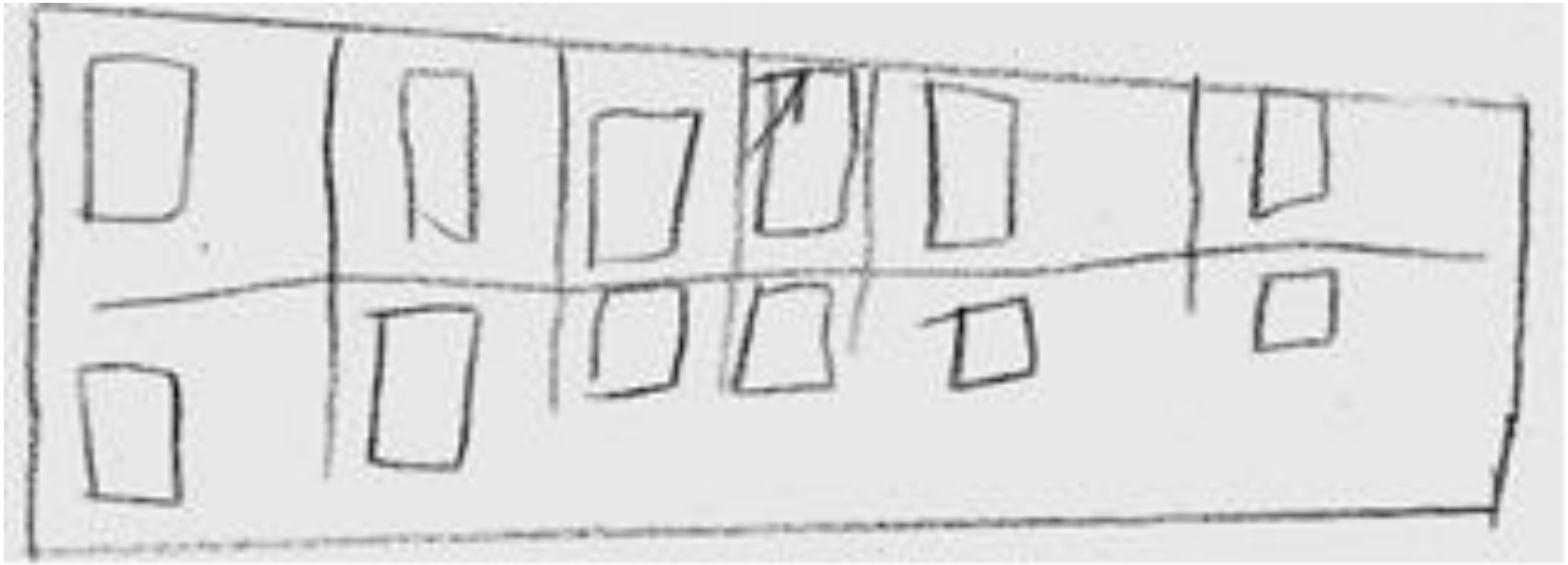
Kärtchen mit Zehnerfeld-Darstellungen





Wendeplättchen & Rechenschiffchen

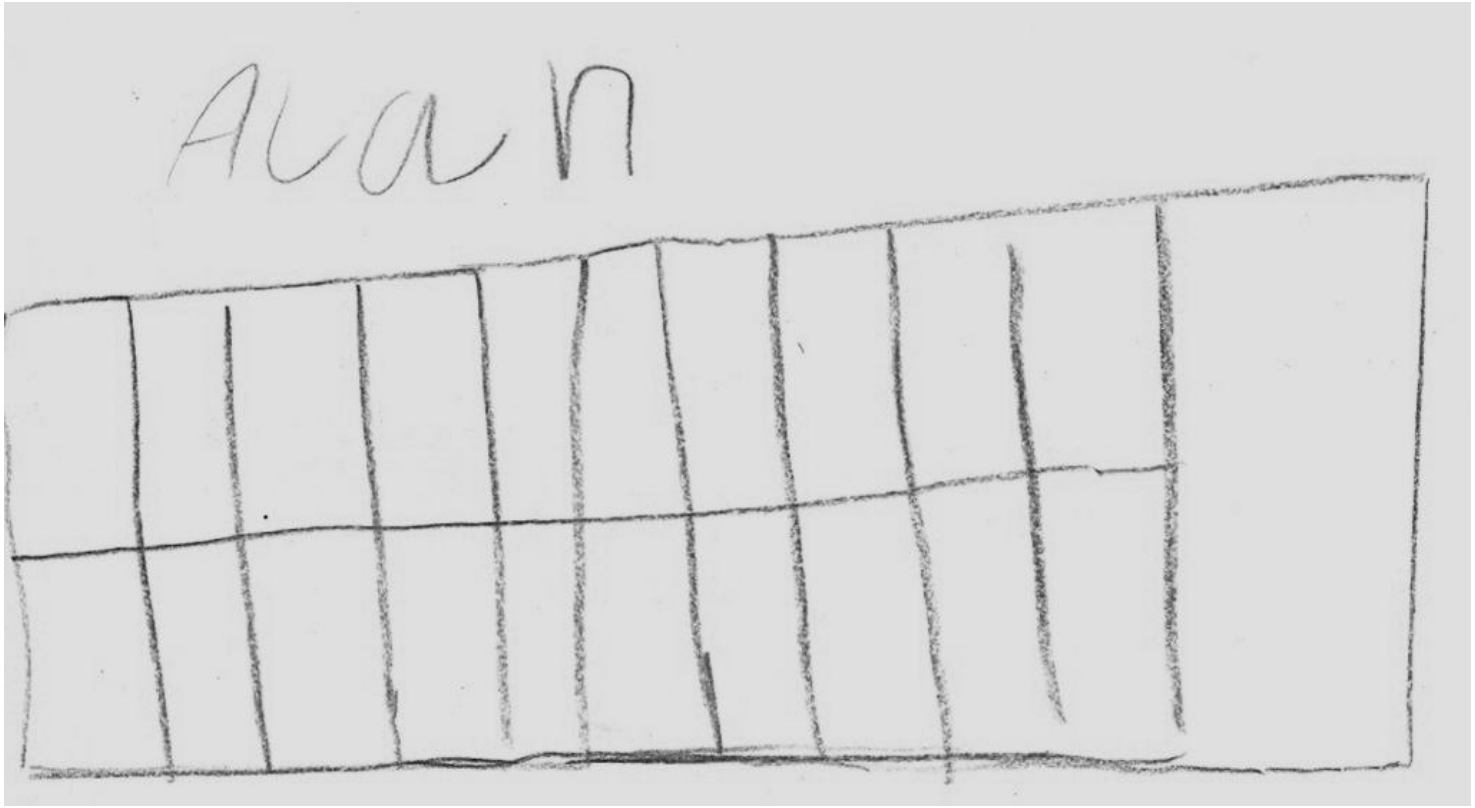
Material als Lernhilfe?



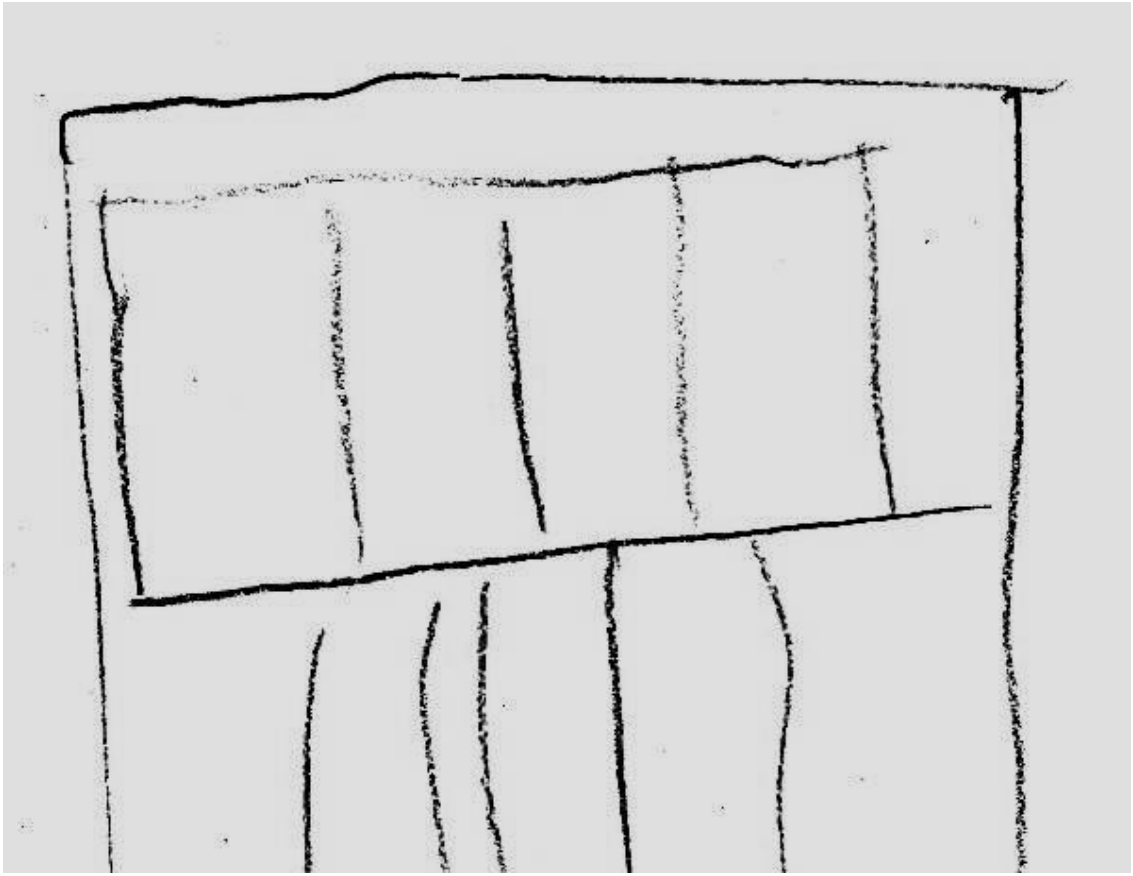
Anfang 2. Schuljahr: „Zeichne ein Zehnerfeld“
Zehnerfeld-Darstellung war die Haupt-Veranschaulichung in dieser Klasse im ersten Schuljahr!

(Zeichnungen zur Verfügung gestellt von Jutta Schäfer, PH Ludwigsburg – Reutlingen)

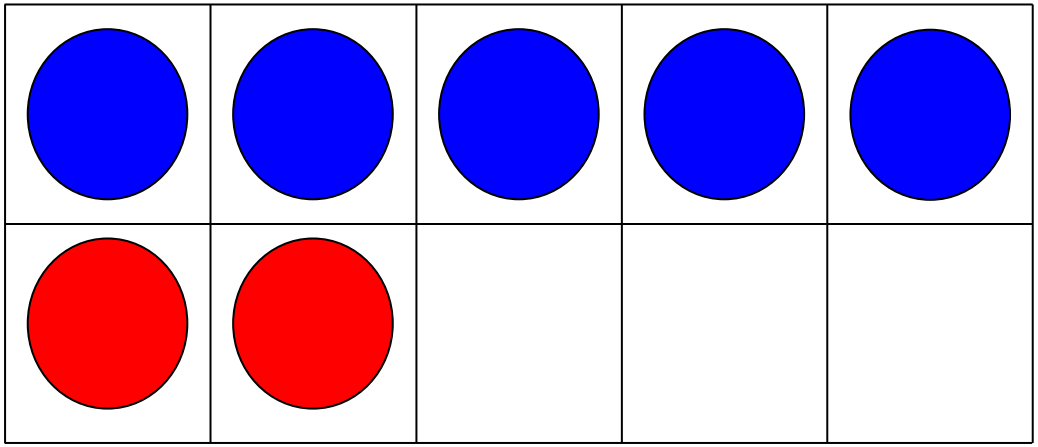
Material als Lernhilfe?



Material als Lernhilfe?



Material als *Lernstoff*! Deshalb: Blitzblick"-Übungen (Gerster 2005)



Nur kurz zeigen (Overhead), dann:

„Wie viele Punkte“?

"Wie hast du das (so schnell) gesehen?"

Unerlässlich: Strukturieren als *eigene Tätigkeit* des Kindes

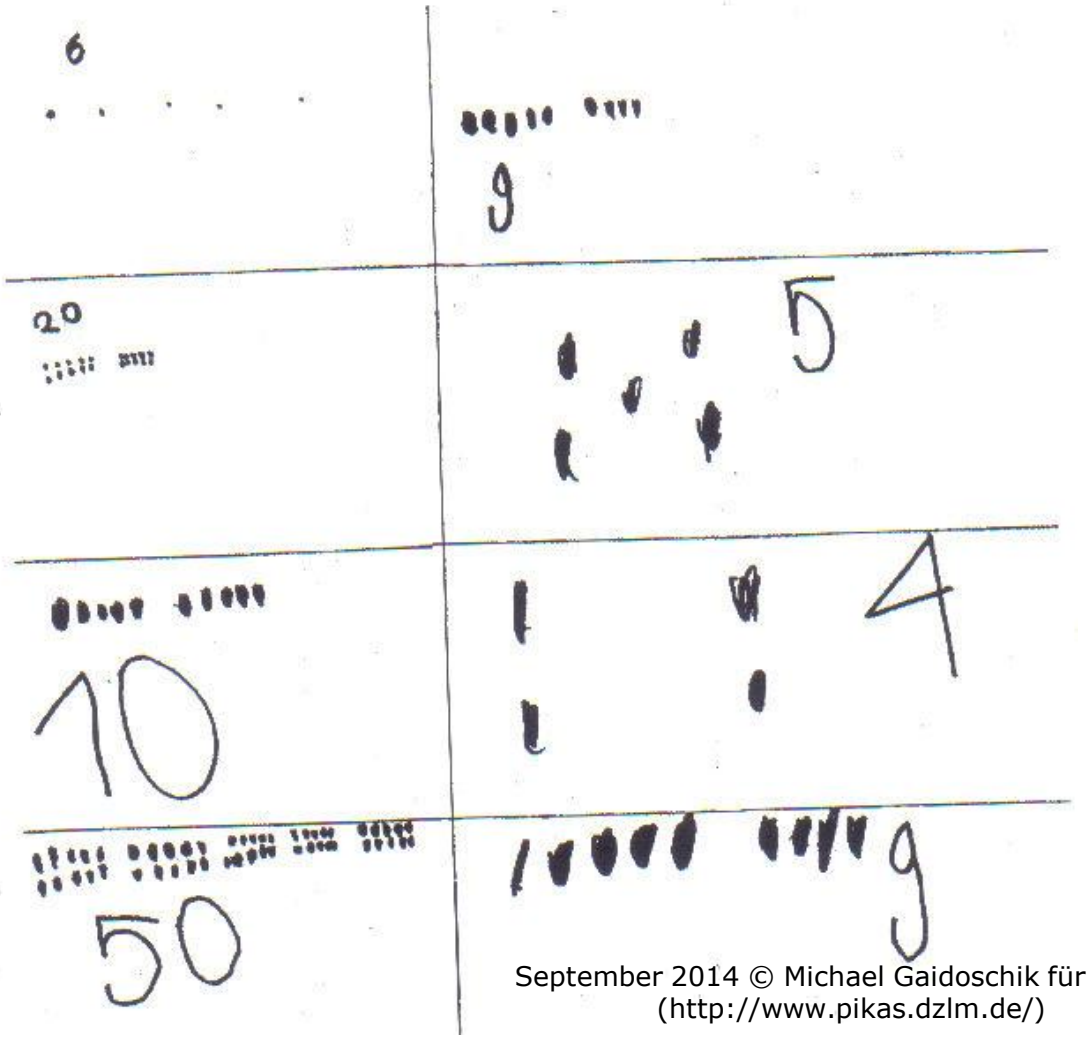
"Lege 5 Plättchen so, dass man auf einen Blick erkennen kann, wie viele es sind!"

"Lege 8 Plättchen so, dass man auf einen Blick erkennen kann, wie viele es sind!"

"Zeichne 7 Kreise so, dass man auf einen Blick erkennen kann, wie viele es sind!"

„Suche dir selbst eine Zahl! Mach‘ dafür eine Zeichnung, auf der man auf einen Blick erkennt, wie viele es sind!"

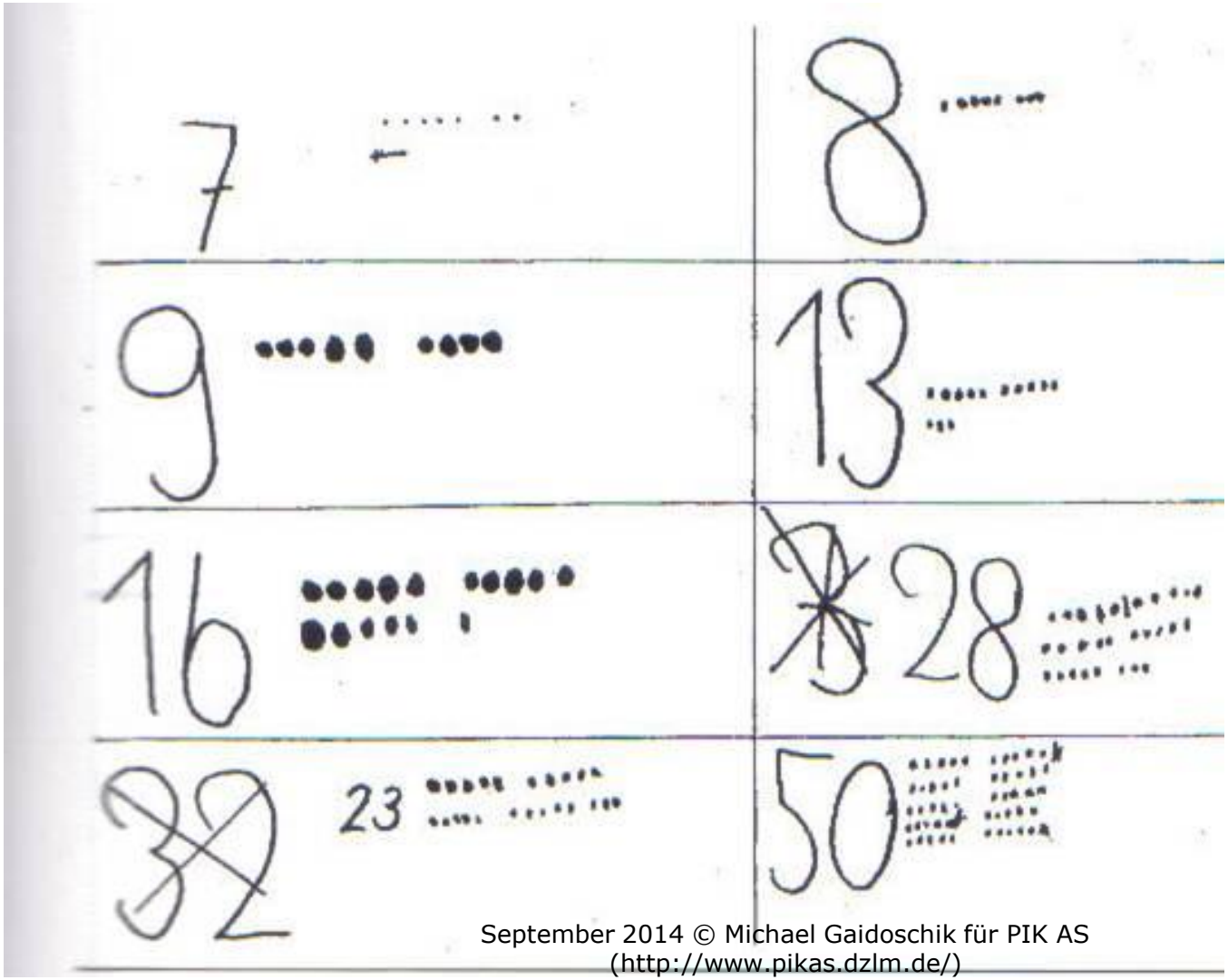
„Zeichne so, dass man die Zahl auf einen Blick erkennt!“



September 2014 © Michael Gaidoschik für PIK AS
(http://www.pikas.dzlm.de/)

Aus:
Hengartner u.a.
1999

„Zeichne so, dass man die Zahl auf einen Blick erkennt!“

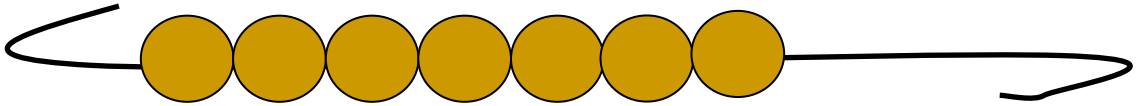


Aus: Hengartner u.a. 1999

September 2014 © Michael Gaidoschik für PIK AS
(http://www.pikas.dzlm.de/)

Wie Zahlwissen gezielt erweitert werden kann und muss…

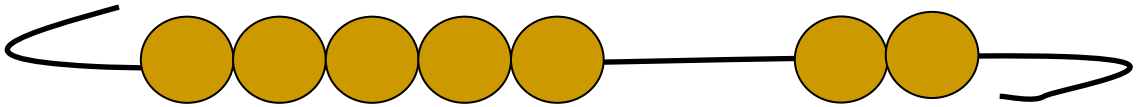
Ein dafür bewährtes Material: Kugelketten…

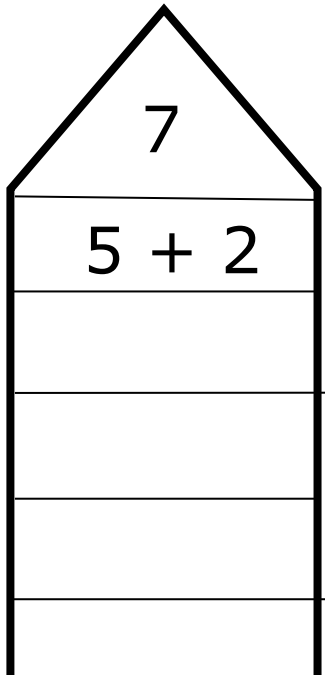


Wie Zahlwissen gezielt erweitert werden kann und muss…

Zunächst: Freies Experimentieren

„Wie kann man 7 Kugeln auf zwei Portionen verteilen?“

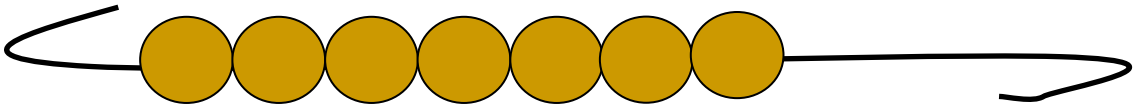


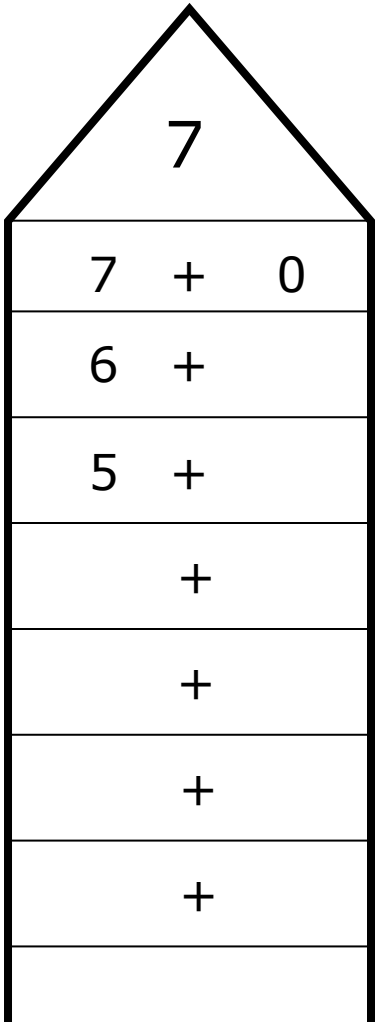


Zahlen in *allen* Zusammensetzungen: Ein Vorschlag…

Entscheidender nächster Schritt:

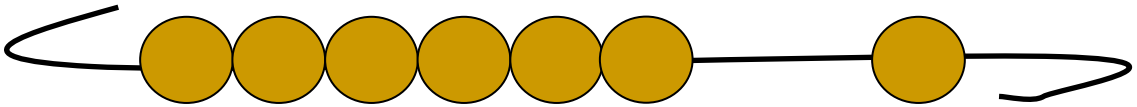
Zerlegen mit System!





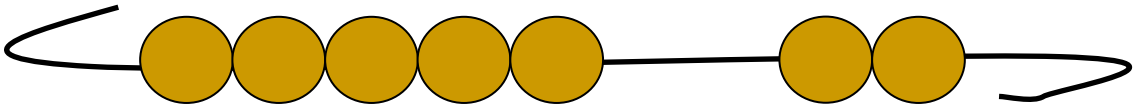
Bewusst nur begonnen:
Können Kinder das System fortsetzen?
Oder finden Sie ein anderes, eigenes System?

Ein Vorschlag zur Erarbeitung…



7
7 + 0
6 + **1**
5 +
+
+
+
+

Ein Vorschlag zur Erarbeitung…



7
7 + 0
6 + **1**
5 + **2**
+
+
+
+

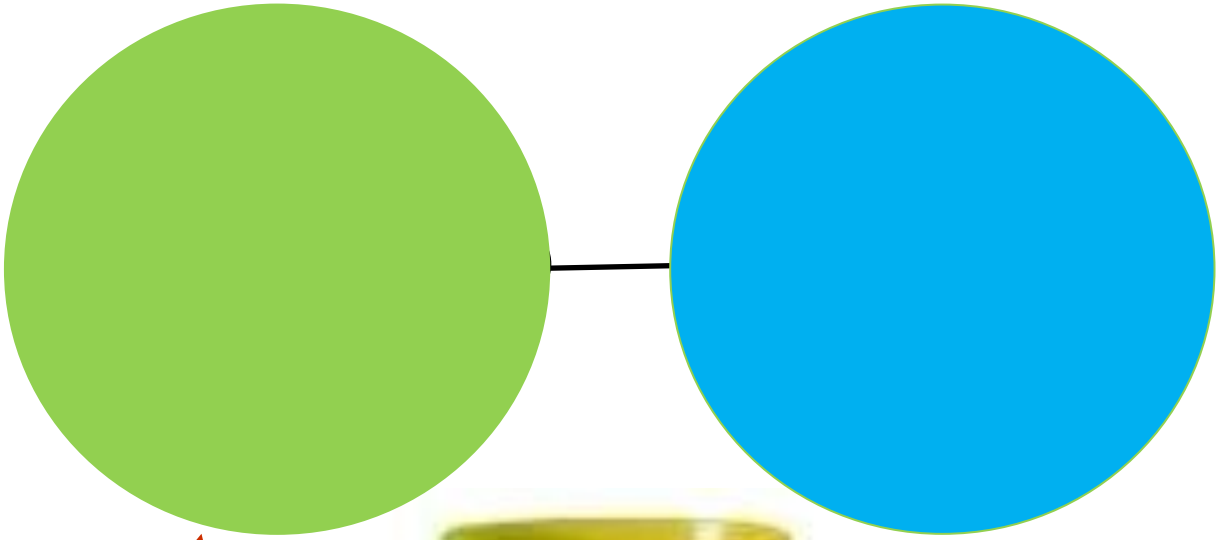
Ein Vorschlag zur Erarbeitung…

7
7 + 0
6 + **1**
5 + **2**
4 + **3**
+
+
+

Ein Vorschlag zur Erarbeitung…

Variante, für manche Kinder entscheidend:

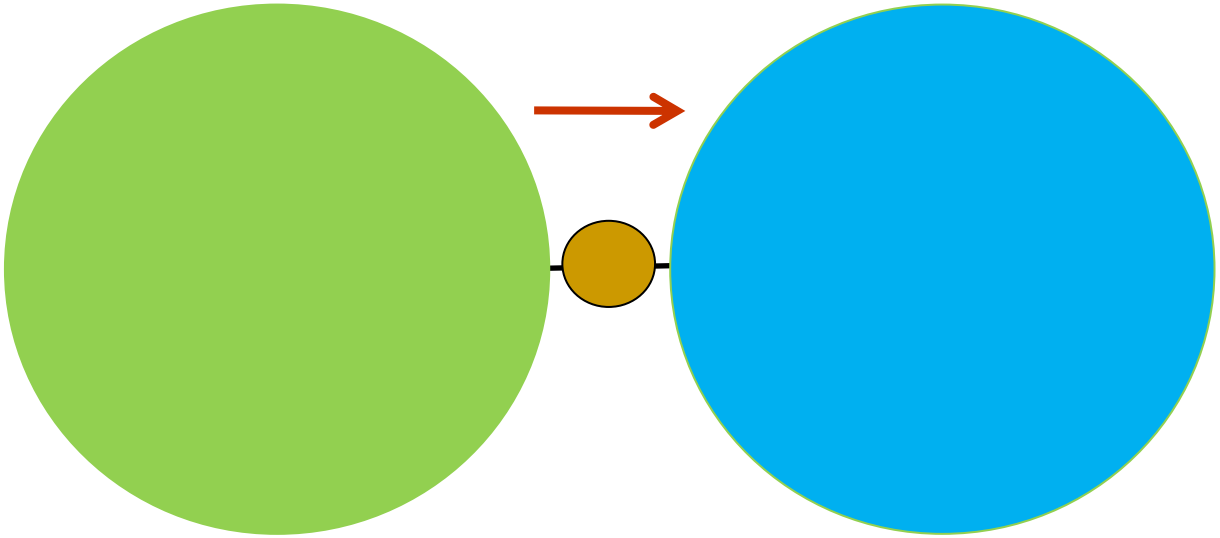
„Verdeckter Materialeinsatz“



7
7 + 0
6 + **1**
5 + **2**
4 + **3**
+
+
+

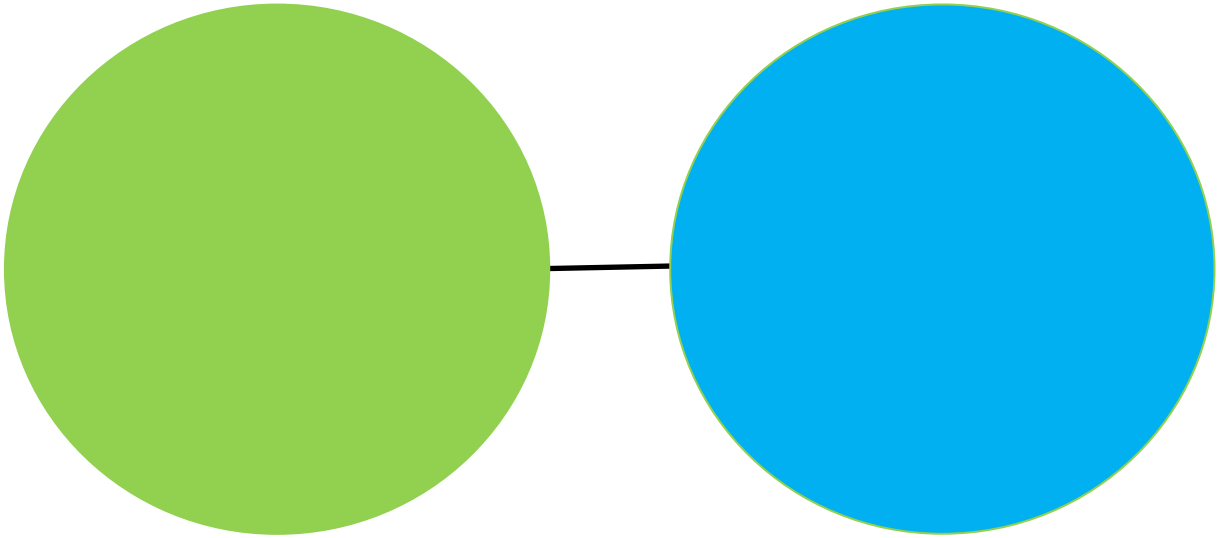
Ein Vorschlag zur Erarbeitung…

Die Kugeln verschwinden unter Bechern/ Schüsseln; Verschieben je einer Kugel von da nach dort findet ohne Blickkontakt statt!



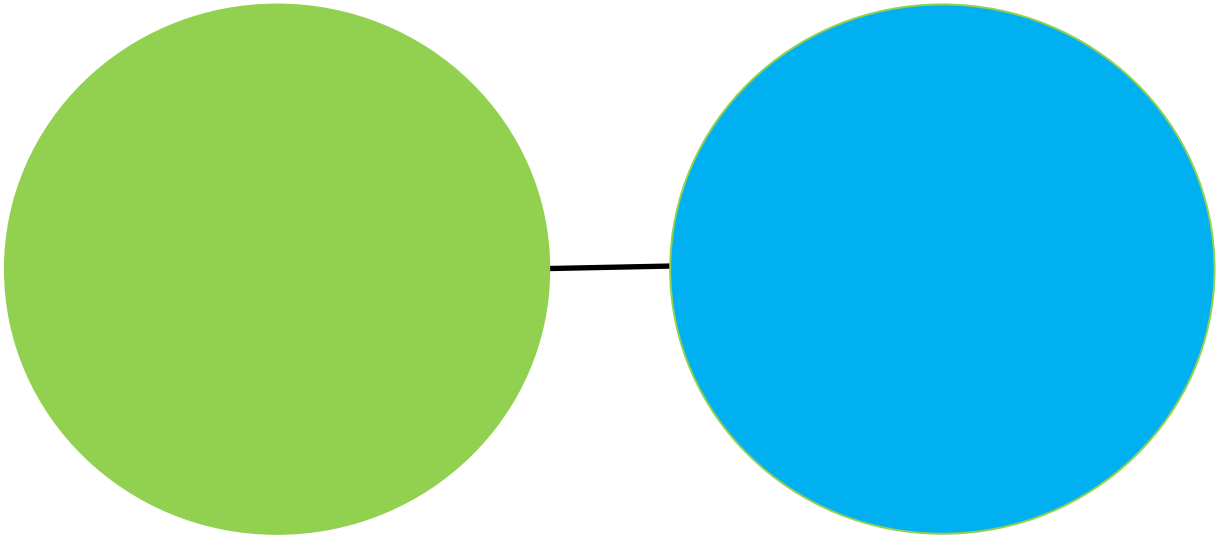
7
7 + 0
6 + **1**
5 + **2**
4 + **3**
+
+
+

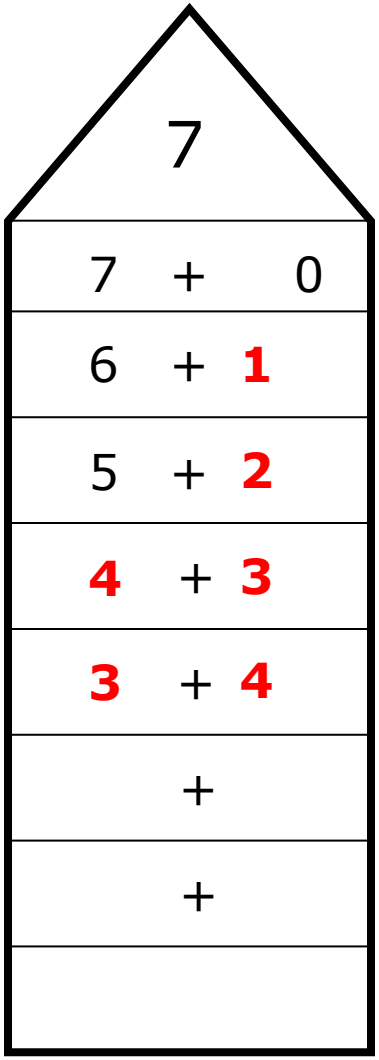
Ein Vorschlag zur Erarbeitung…



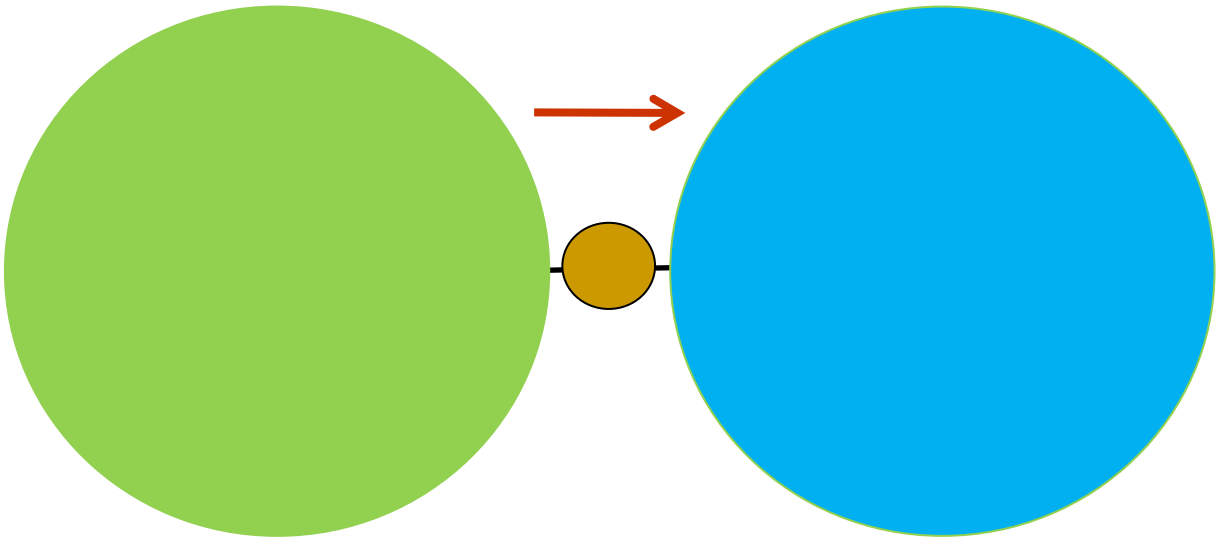
7
7 + 0
6 + **1**
5 + **2**
4 + **3**
+
+
+

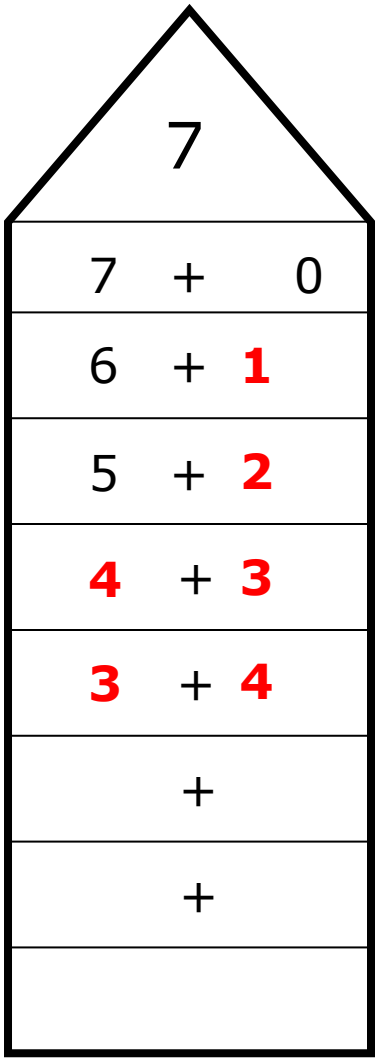
Ein Vorschlag zur Erarbeitung…



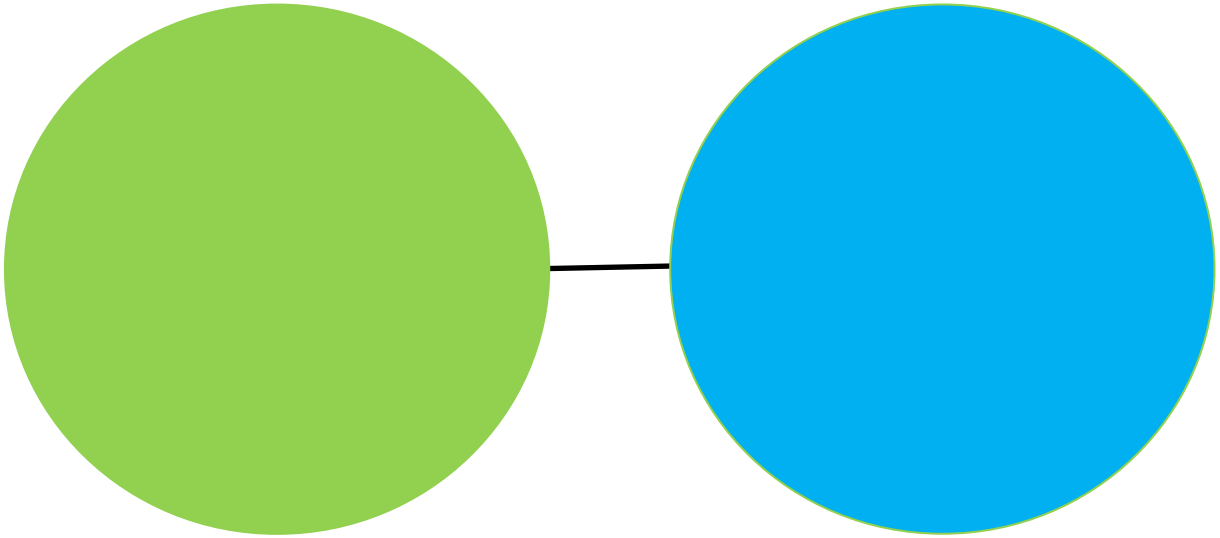


Ein Vorschlag zur Erarbeitung…



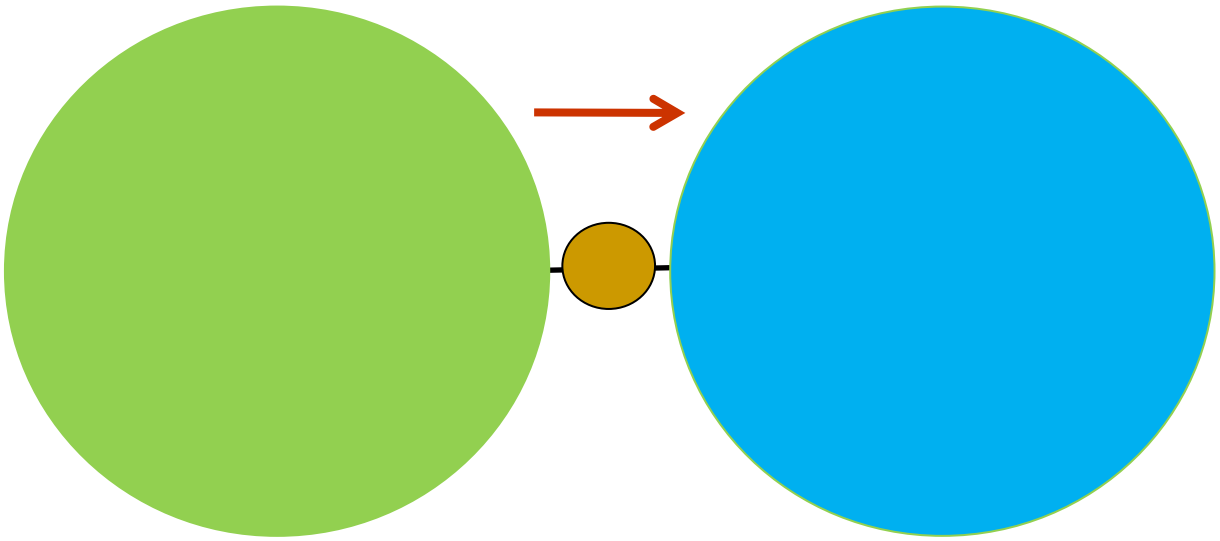


Ein Vorschlag zur Erarbeitung…



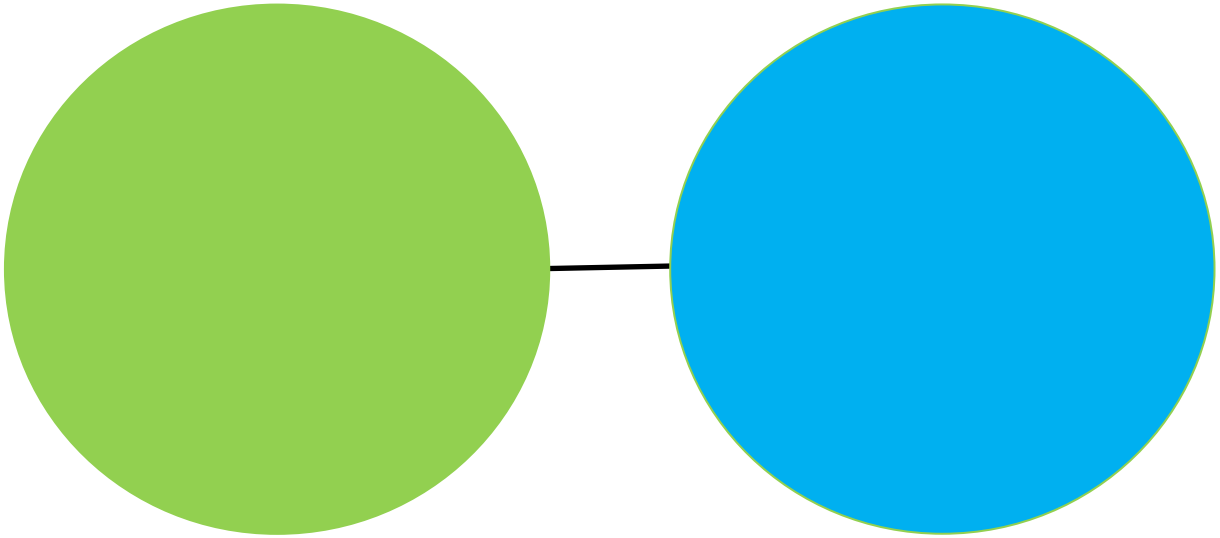
7		
7	+	0
6	+	**1**
5	+	**2**
4	+	**3**
3	+	**4**
2	+	**5**
	+	

Ein Vorschlag zur Erarbeitung…



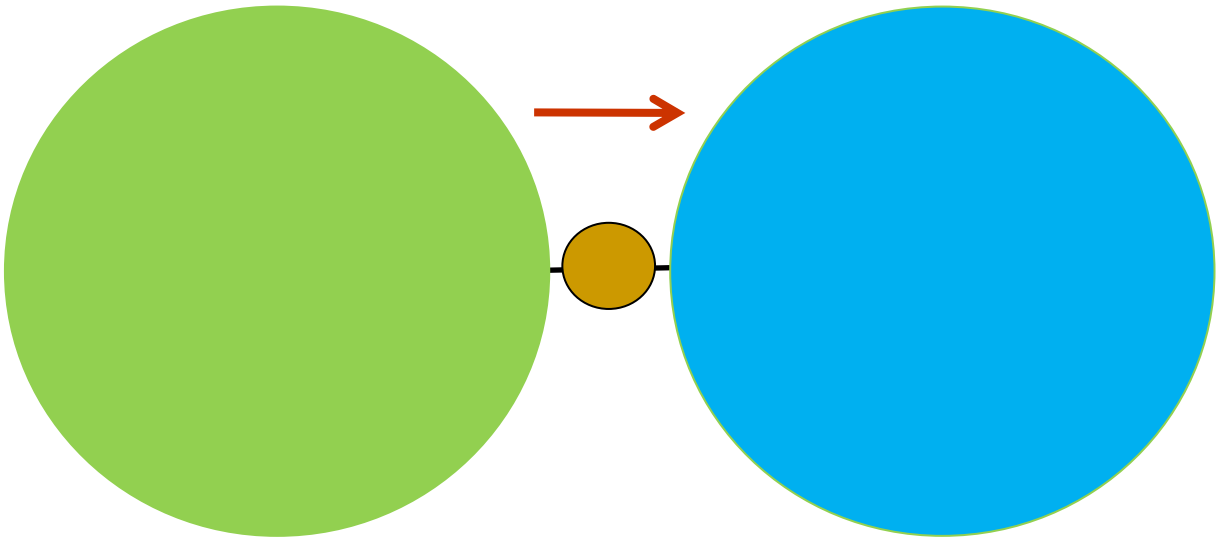
7		
7	+	0
6	+	**1**
5	+	**2**
4	+	**3**
3	+	**4**
2	+	**5**
	+	

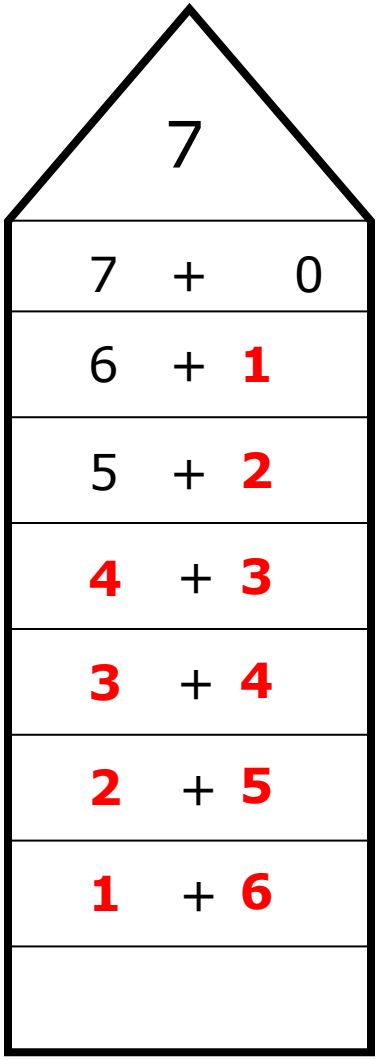
Ein Vorschlag zur Erarbeitung…



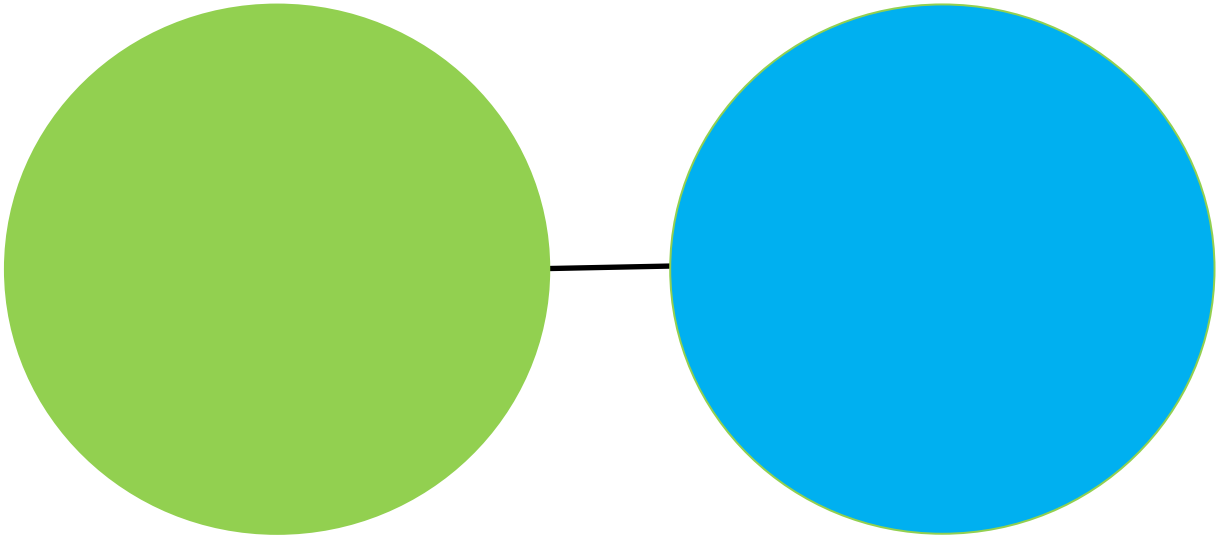
7
7 + 0
6 + **1**
5 + **2**
4 + **3**
3 + **4**
2 + **5**
1 + **6**

Ein Vorschlag zur Erarbeitung…



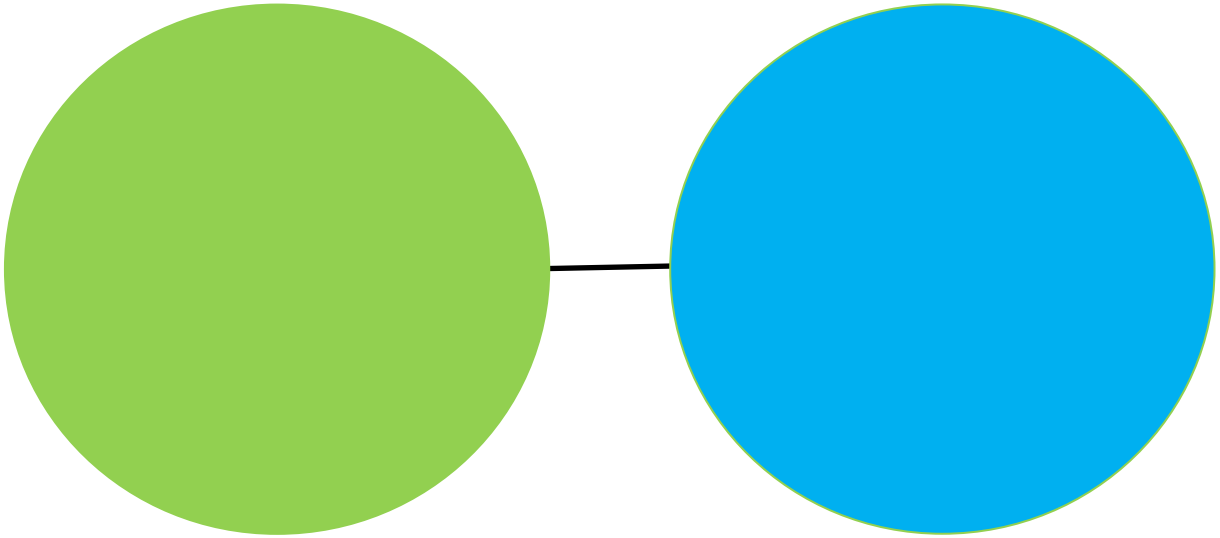


Ein Vorschlag zur Erarbeitung…



7
7 + 0
6 + **1**
5 + **2**
4 + **3**
3 + **4**
2 + **5**
1 + **6**
0 + **7**

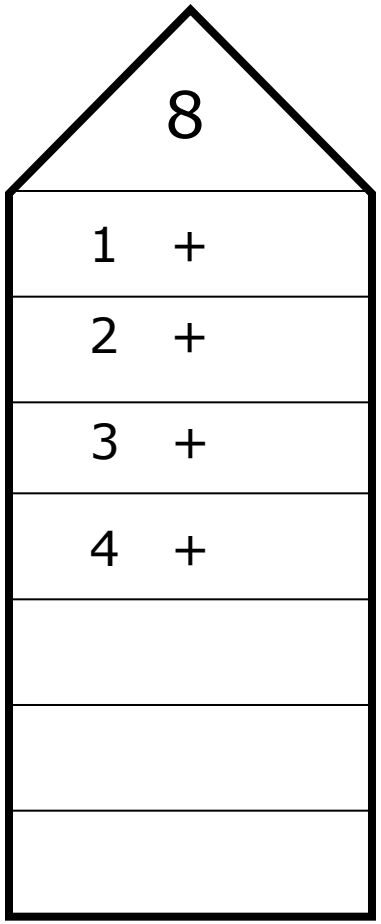
Ein Vorschlag zur Erarbeitung…



„Auf der einen Seite immer um 1 weniger, auf der anderen Seite immer um 1 mehr“

7		
7	+	0
6	+	**1**
5	+	**2**
4	+	**3**
3	+	**4**
2	+	**5**
1	+	**6**
0	+	**7**

„Entdeckendes Üben, übendes Entdecken“ (Winter 1985): "Schöne Päckchen" I



Kannst du weitermachen?

Was fällt dir auf?

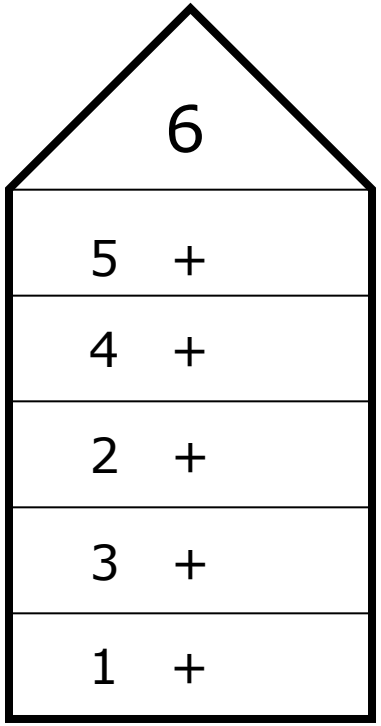
Kein Übungsblatt ist für sich schon wertvoll!

Der Wert entsteht durchs Reden darüber:

"Strategiekonferenzen" in der Klasse

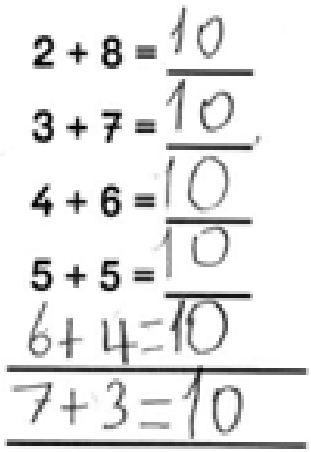
"Lehr-Lern-Dialog“ in der Einzelförderung

Unerlässliche Ergänzung: "Schöne Päckchen?"



Was passt nicht ins Muster?

Förderung prozess- und inhaltsbezogener Kompetenzen: Nicht zu trennen!



Was fällt dir auf?

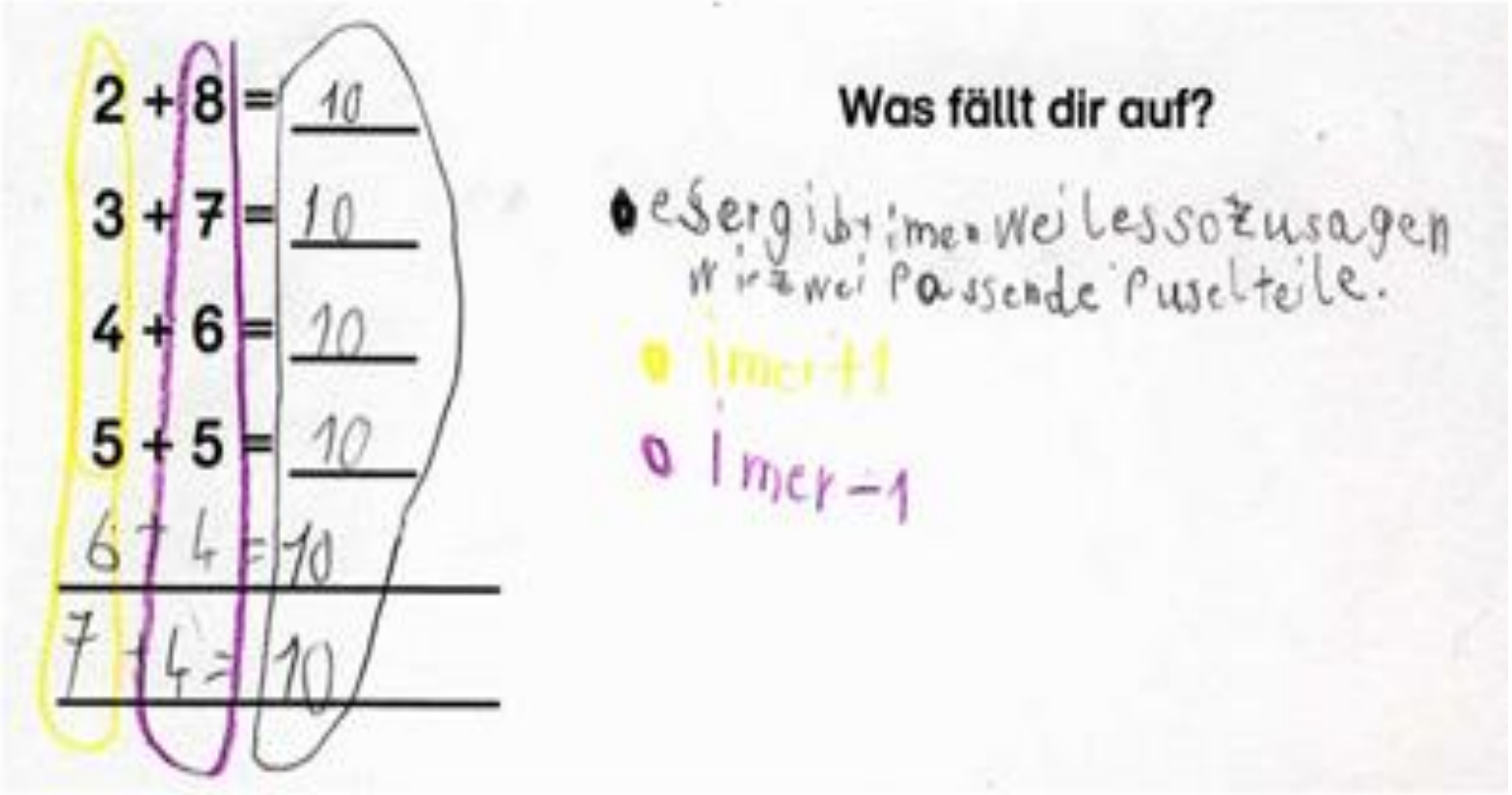
immer 10

Paul

PIK-AS Haus 1 / Entdeckerpäckchen

Förderung prozess- und inhaltsbezogener Kompetenzen: Nicht zu trennen!

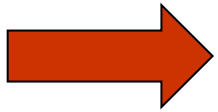
Kommunizieren lernt man durch Kommunizieren!



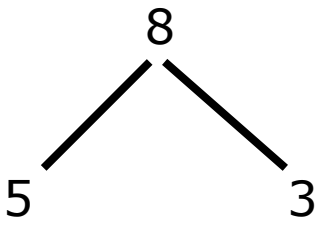
Quelle: www.pikas.uni-dortmund.de/

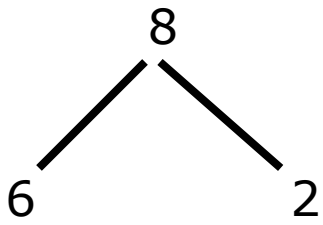
Und wieder gilt:
Zerlegungen *anwenden* = *festigen*

Zerlegung
"wie mit den Händen"



Nachbarzerlegung
("eine Kugel verschieben")





Daraus leicht abzuleiten:

5 + 3 = 8
3 + 5 = 8
8 - 5 = 3
8 - 3 = 5

Daraus leicht abzuleiten:

6 + 2 = 8
2 + 6 = 8
8 - 2 = 6
8 - 6 = 2

Für mehr als eine Übungseinheit gut:

Zerlege die Zahl 8 (5, 7, 9 ...) in zwei Portionen!

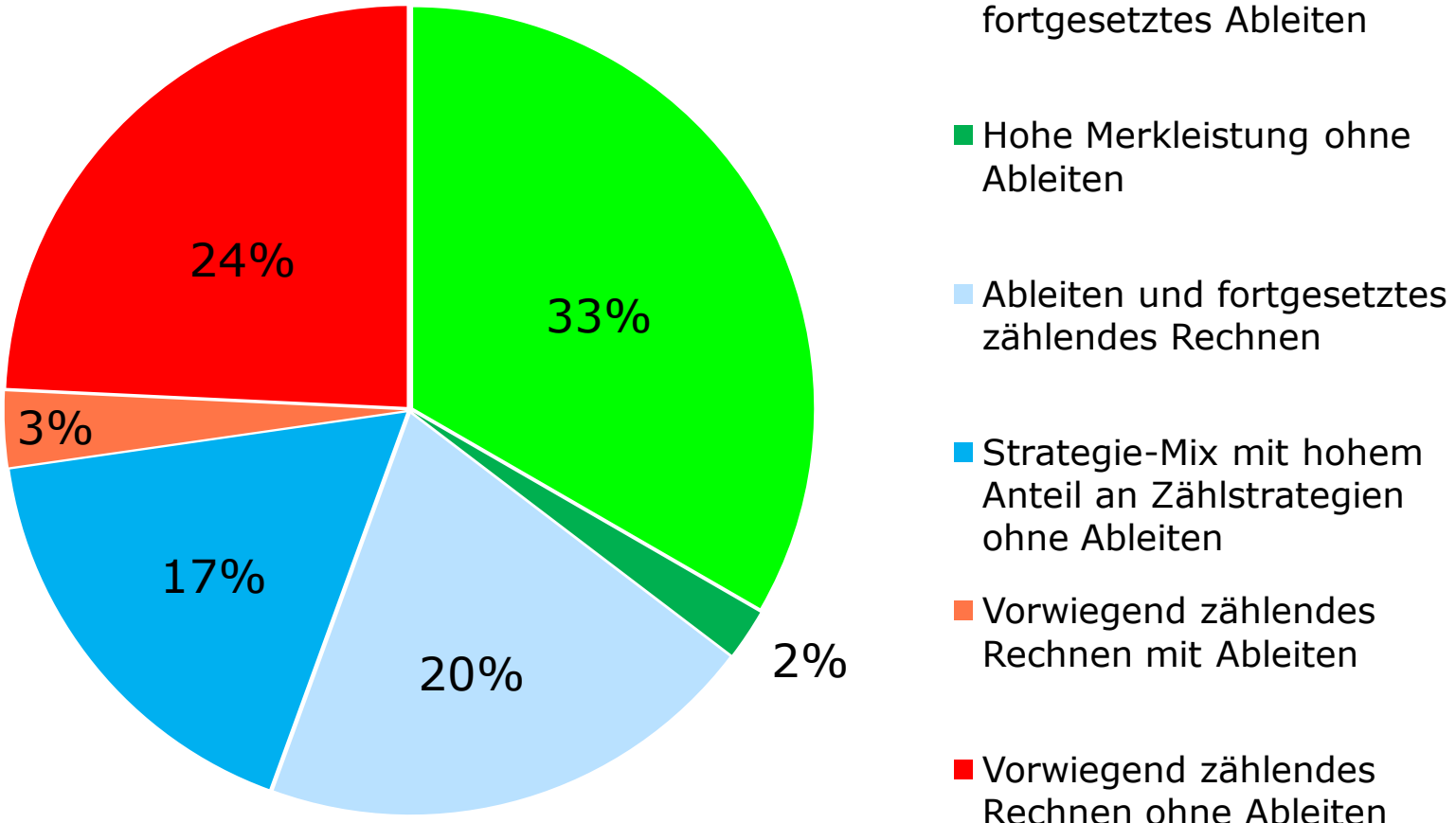
Wie viele verschiedene Zerlegungen findest du für 8 (5, ...) ?
Bist du sicher, dass du alle gefunden hast?
Wie kannst du überprüfen, ob du alle gefunden hast?

Finde zu jeder Zerlegung Plus- und Minusaufgaben,
bei denen diese Zerlegung hilft!

Such' dir irgendeine Zahl aus.
Finde möglichst viele Zerlegungen!
Schreibe Plus- und Minusaufgaben,
bei denen diese Zerlegungen helfen!

Weiter zum Aufbau nicht-zählender Rechenstrategien: Empirische Forschung…

"Strategietypen im ZR bis 10" Ende 1. Schuljahr (Gaidoschik 2010)

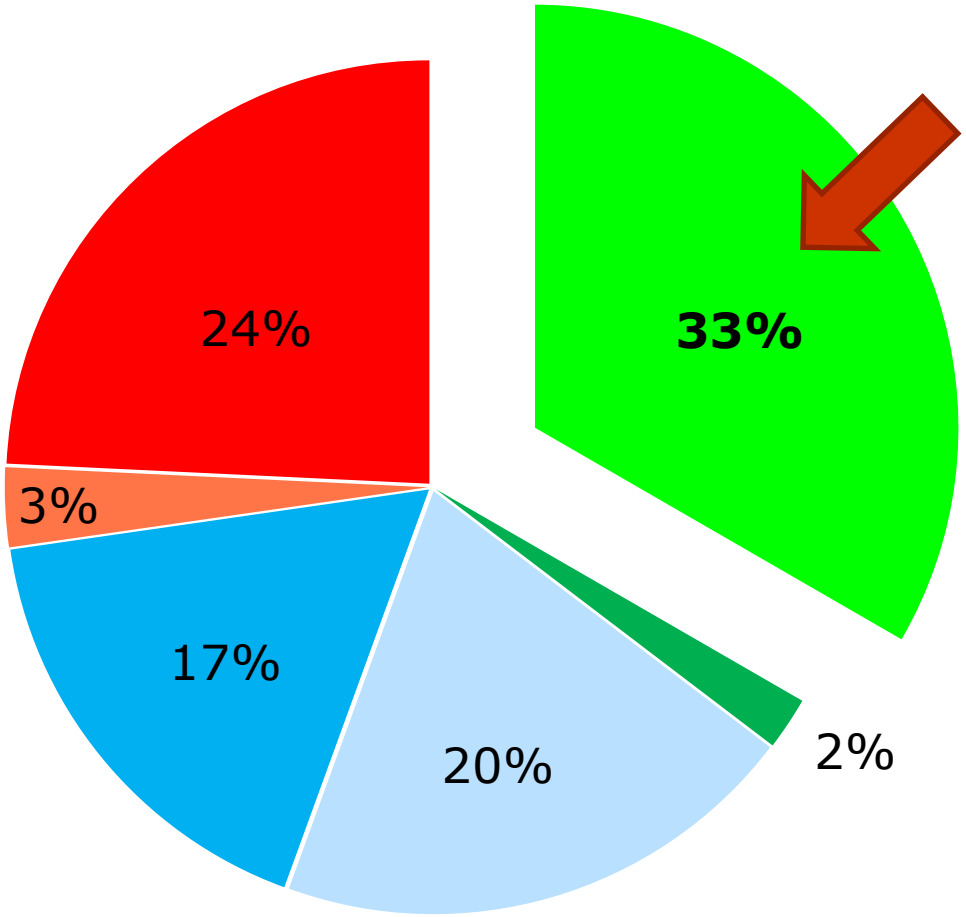


September 2014 © Michael Gaidoschik für PIK AS
(http://www.pikas.dzlm.de/)

N = 139, Zufallsauswahl, Niederösterreich

Was macht Rechenstarke rechenstark, Rechenschwache rechenschwach?

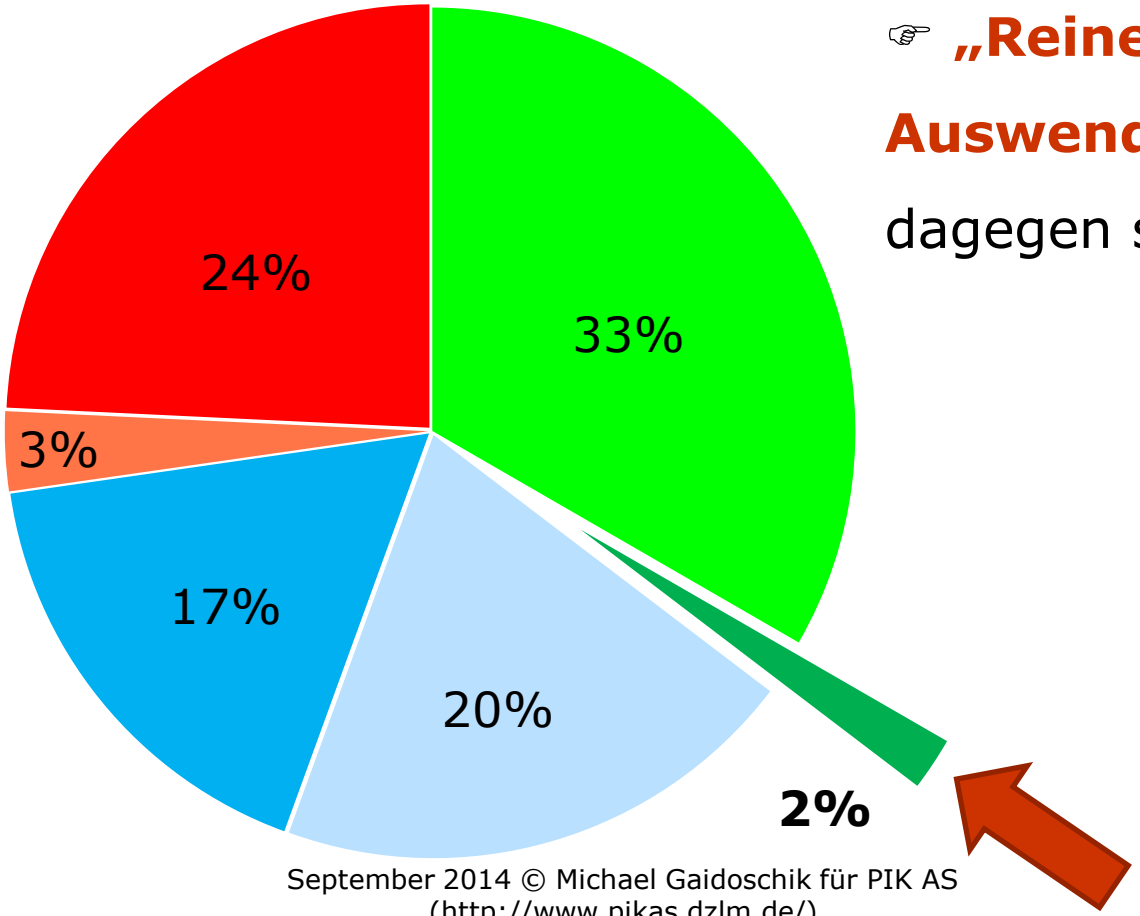
"Strategietypen im ZR bis 10" Ende 1. Schuljahr (Gaidoschik 2010)



☞ Hoher Grad von **Auswendigwissen** im ZR 10 fast immer **in Kombination mit Ableitungen**!

Was macht Rechenstarke rechenstark, Rechenschwache rechenschwach?

"Strategietypen im ZR bis 10" Ende 1. Schuljahr (Gaidoschik 2010)

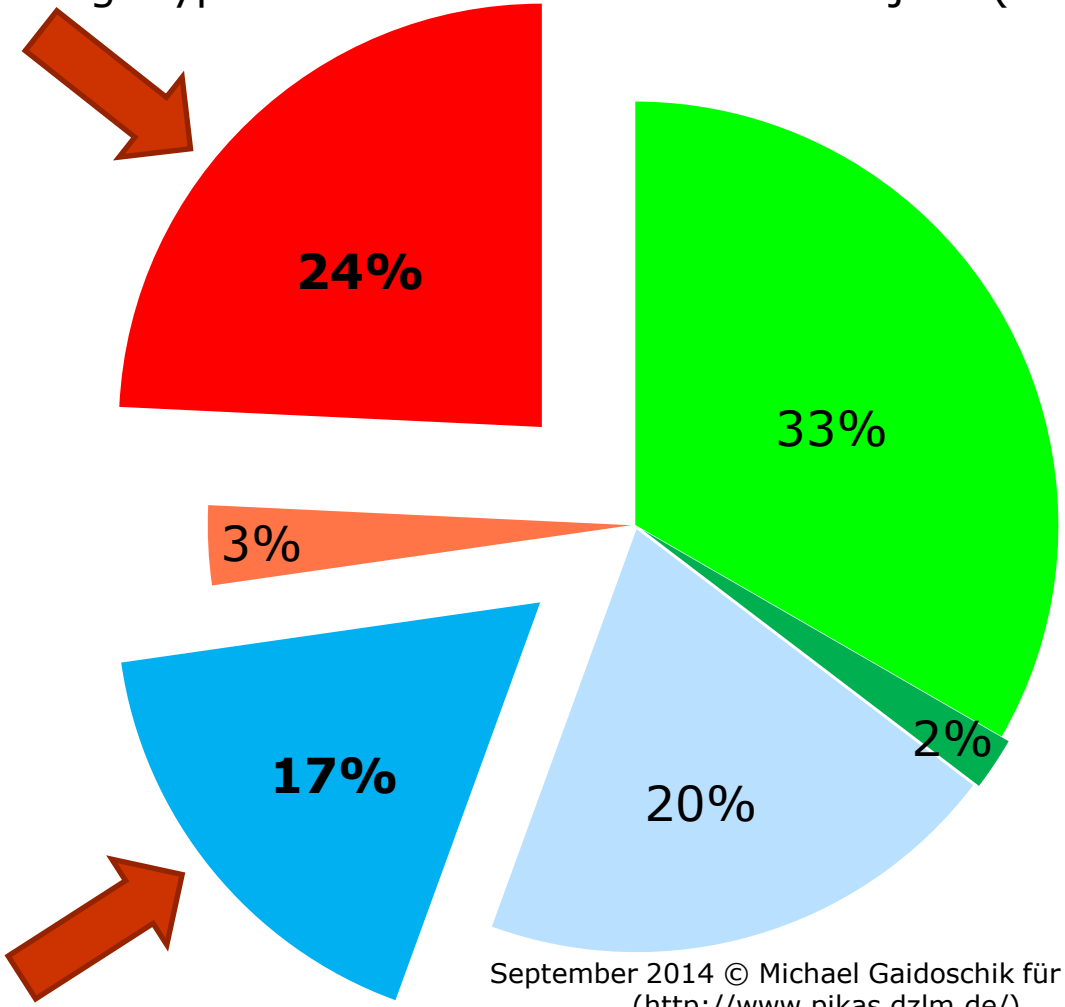


☞ **„Reines Auswendigwissen“**

dagegen sehr selten!

Was macht Rechenstarke rechenstark, Rechenschwache rechenschwach?

"Strategietypen im ZR bis 10" Ende 1. Schuljahr (Gaidoschik 2010)

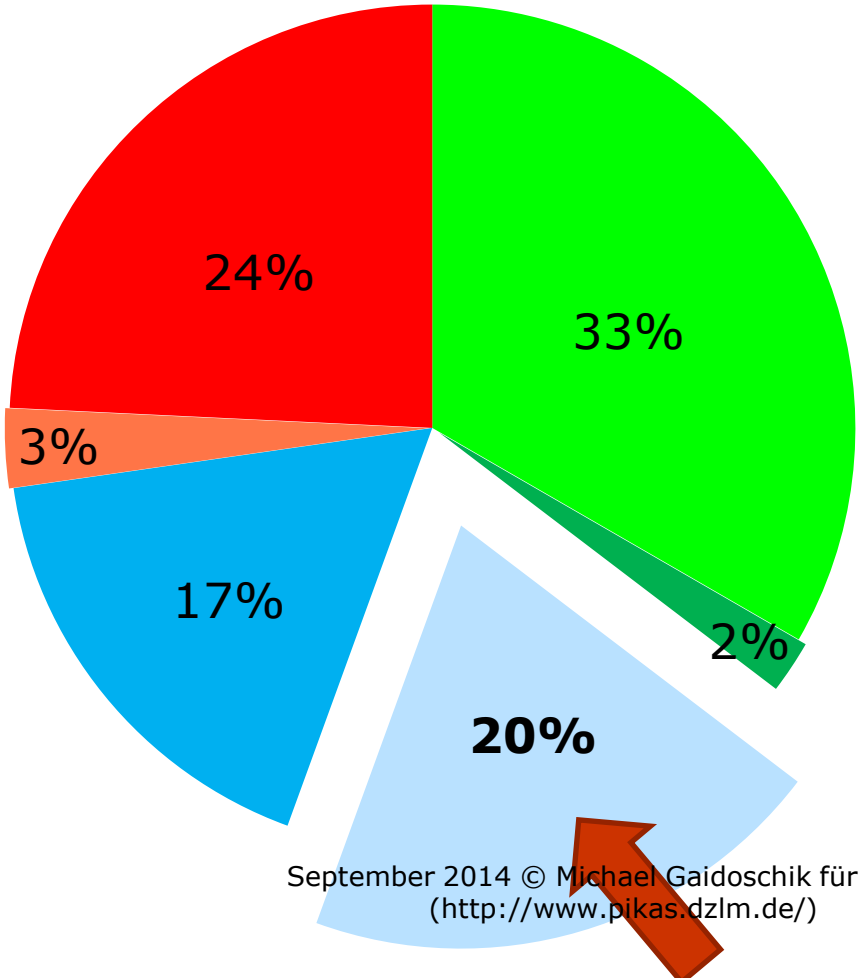


☞ Kinder mit **hohem Anteil an Zählstrategien** nutzen **keine Ableitungen**

☞ Bei diesen Kindern **kaum Zuwachs an Faktenwissen** zwischen Mitte und Ende 1. Schuljahr

Was macht Rechenstarke rechenstark, Rechenschwache rechenschwach?

"Strategietypen im ZR bis 10" Ende 1. Schuljahr (Gaidoschik 2010)

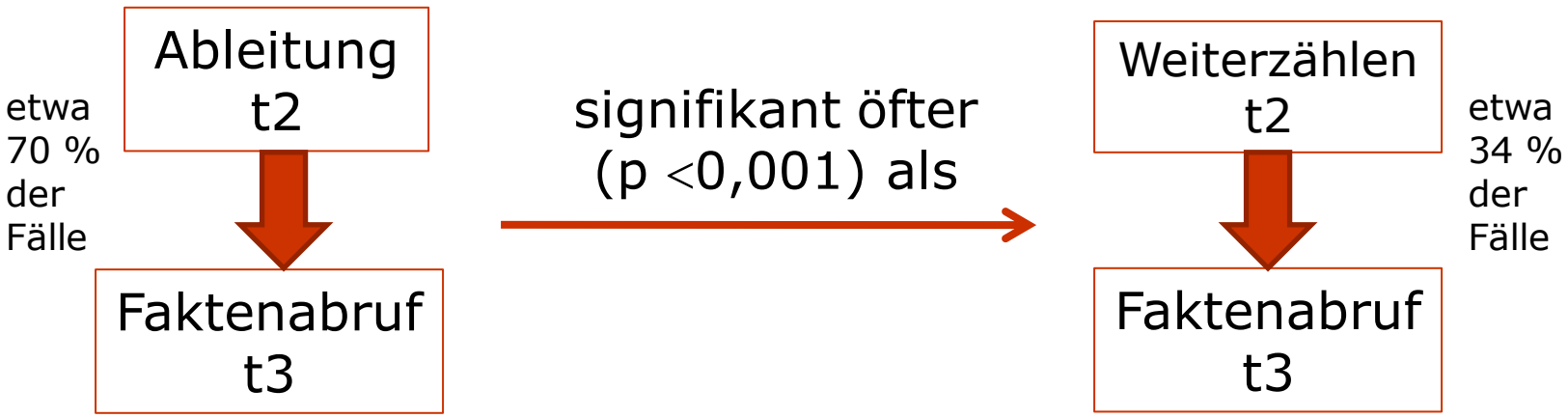


☞ „Misch-Typus“: Ableiten, daneben viel zählendes Rechnen

☞ Typisch: Ableiten dort, „wo es lohnt“

☞ **Wenig Zuwachs an Faktenwissen bei gezählten Aufgaben**

Dazu ein weiteres Ergebnis der Studie:



Vgl. Gaidoschik 2010

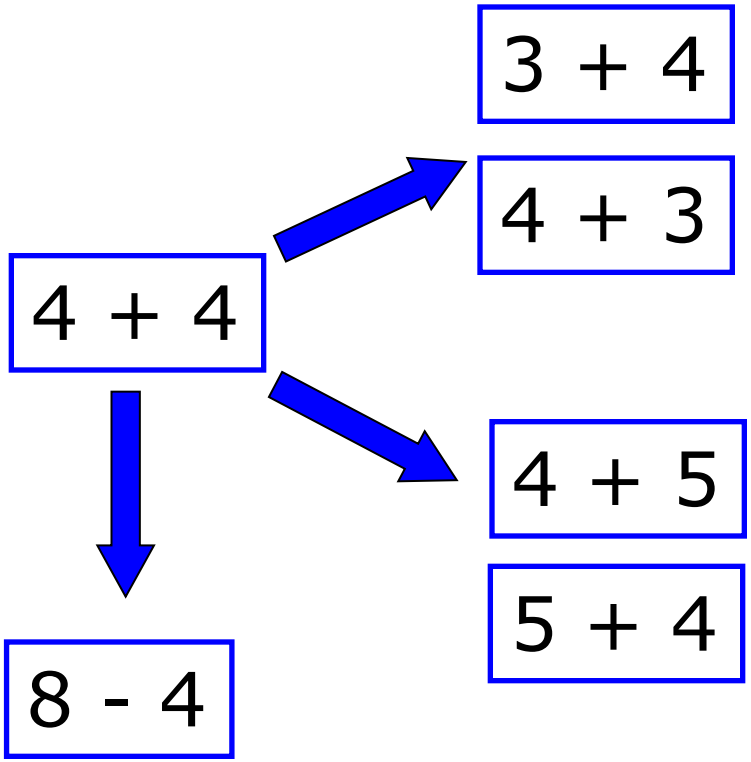
Fazit aus den angeführten Befunden:

Starke empirische Hinweise dafür, dass…

- **Ableiten auch das Automatisieren fördert**

  (ähnlich schon Thornton 1978, 1992; Steinberg 1985)

Auch deshalb: Rechnen von Anfang an gezielt in „operativen Zusammenhängen“!



Voraussetzung für erfolgreiches Erarbeiten von Ableitungsstrategien:

Frühes, gezieltes Automatisieren einiger (weniger) Kern-Strukturen und Kern-Aufgaben!

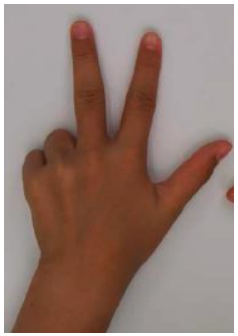
Als Kernaufgaben ausreichend:

- 1 dazu / 1 weg
- „Kraft der Fünf"
- Verdoppelungen

Früher Schwerpunkt aufs "Verdoppeln"

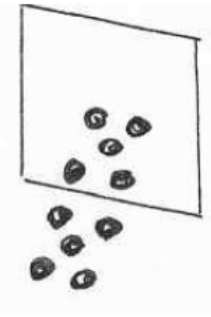
Verdoppeln mit den Händen

"Zweite Zeigeweise" trainieren



Verdoppeln mit dem Spiegel

Vereinbarung: Plättchen auf einen Blick erkennbar



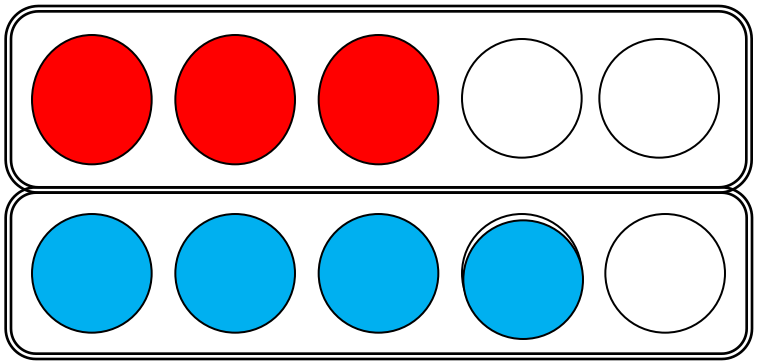
Merkhilfen: Katze, Fliege, Spinne…

Verdoppelungen bis mind. 5 + 5 automatisieren

Wo nötig: Einsatz der Lernkartei (Details folgen!)

Zusammenhänge gezielt erarbeiten: Beispiel "Verdoppeln plus 1"

Zum Beispiel mit Rechenschiffchen:

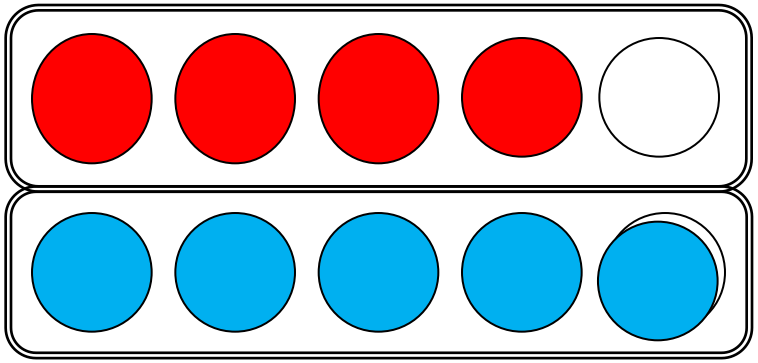


Aus 3 + 3 ... mache 3 + 4!

Was verändert sich?

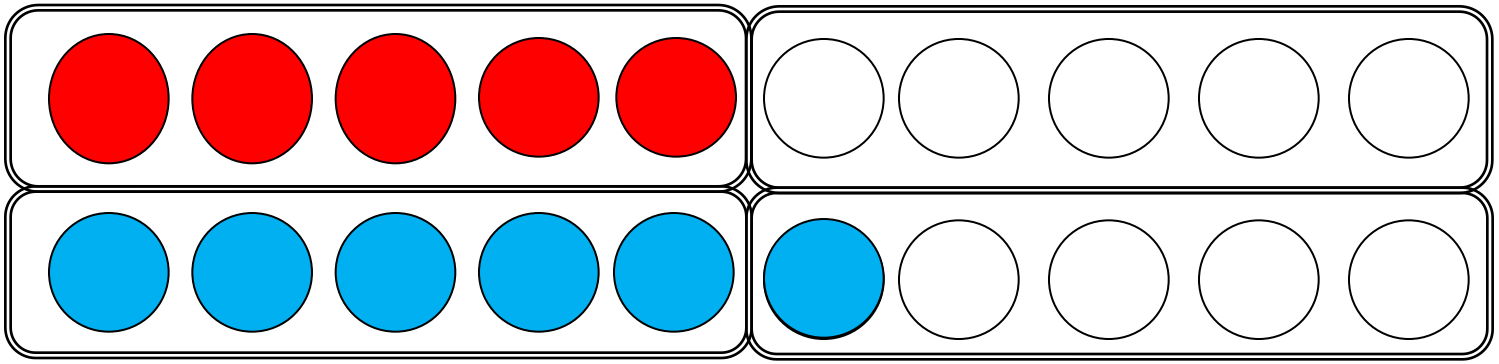
Zusammenhänge gezielt erarbeiten: Beispiel "Verdoppeln plus 1"

Als Prinzip an allen Anwendungsfällen durchspielen



Aus 4 + 4 ... mache 4 + 5!

Zusammenhänge gezielt erarbeiten: Beispiel "Verdoppeln plus 1"

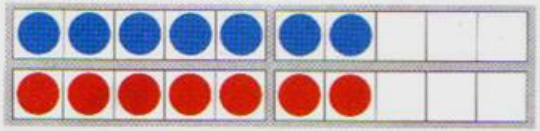
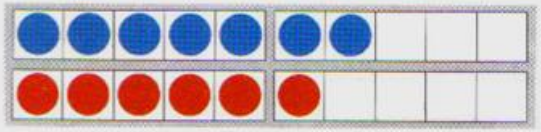


Aus 5 + 5 ... mache 5 + 6!

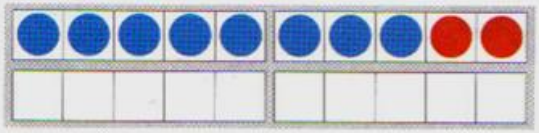
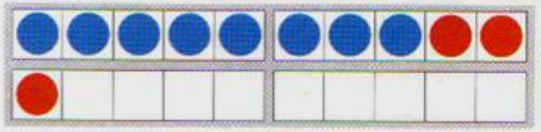
Einschub: Material & Anschauung – aber wie?

Aus: Wittmann/Müller 2004
Zahlenbuch 1

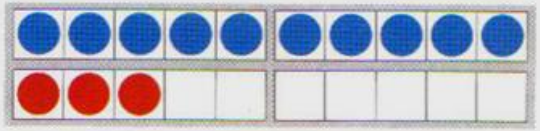
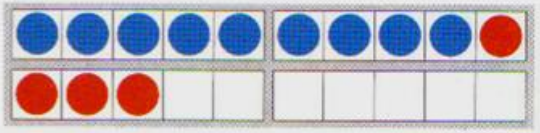
..... Von einfachen zu schweren Aufgaben

1 Aus  mache 

7 + 7 = ... 7 + 6 = ...

2 Aus  mache 

8 + 2 = ... 8 + 3 = ...

3 Aus  mache 

10 + 3 = ... 9 + 4 = ...

Material & Anschauung – aber wie?

- "Begreifen kommt vom Greifen!" – Tut es das? Einfach so?
- Entscheidend: **Qualität** der Handlungen – und das, was das Kind dabei **denkt**
- **Zählende Handlungen fördern zählendes Denken!**
- **"Rechnungen legen"** (oder zeichnen!) ist für sich genommen nichts als **zählendes Rechnen**!
- Wesentlich sind die **Reflexion**, das Vergleichen, das Reden über Zusammenhänge, das Ordnen…
- Dauerhaftes "Rechnen mit Materialhilfe" *ohne diese Reflexion* führt zu **Materialabhängigkeit**

„Gerade die, die es brauchen, wollen das Material nicht nehmen!“

Was tun?

- *Material für alle* – gerade auch für die „guten“ Rechner!
  - Weg vom „Stigma“!
- Eben nicht als „Ersatz fürs Rechnen“
- Sondern um
  - Operationsverständnis zu entwickeln/festigen/dokumentieren
  - nicht-zählende Rechenstrategien zu entwickeln
  - anderen zu erläutern, wie man gedacht/gerechnet hat
- Nicht:
  Erst handeln, dann zeichnen, dann endlich „richtig rechnen“
- Sondern:
  - Ständiges Hin- und Her zwischen diesen „Ebenen“

Auch deshalb wichtig: Strukturiertes Üben auch OHNE Material…

… zumindest ohne,
dass das Material von Anfang an zur Verfügung steht!

2 + 2 =
2 + 3 =

3 + 3 =
3 + 4 =

4 + 4 =
__ + __ =

__ + __ =
__ + __ =

Was fällt dir auf?
Kannst du so weitermachen?

Wenn manche schon früh
über 10 hinaus
wollen und können:
Wunderbar!

Noch ein wenig mehr zu „schönen Päckchen“ (vgl. Hirt & Wälti 2008)…

Aufgaben nummerieren:

1) 3 + 3 =
2) 4 + 5 =
3) 5 + 7 =

Wie geht es weiter?
Was fällt dir auf? Beschreibe!
Warum ist das so?

Für Überflieger: Was ist die 10. Aufgabe?
Was ist die 20. Aufgabe?

Produktives Üben:
Kinder produzieren „Schöne Päckchen“…

Erfinde selbst ein schönes Päckchen!

Schreibe die ersten drei Aufgaben,
dein/e Nachbar/in setzt fort!

Produktives Üben:
Kinder produzieren „Schöne Päckchen“…

Erfinde ein schönes Päckchen!

Bei der 5. Rechnung soll genau 10 rauskommen!

Produktives Üben:
Kinder produzieren „Schöne Päckchen“…

Erfinde ein schönes Minus-Päckchen!

Die ersten beiden Zahlen sollen sich
von Zeile zu Zeile immer ändern,

das Ergebnis soll immer gleichbleiben!

Operativen Zusammenhang deutlich *als Strategie* herausarbeiten

Fragen stellen wie etwa:

- Wenn ein Kind gerade 3 + 3 gerechnet hat:

  Hilft ihm das für 3 + 4?

  Oder muss es 3 + 4 ganz neu überlegen?

Zusammenhang als Strategie herausarbeiten

Dann etwa auch so:

Welche leichte Rechnung hilft für

5 + 6 ?

Zusammenhang als Strategie herausarbeiten

Dann etwa auch so:

Welche leichte Rechnung hilft für

3 + 4 ?

Zusammenhang als Strategie herausarbeiten

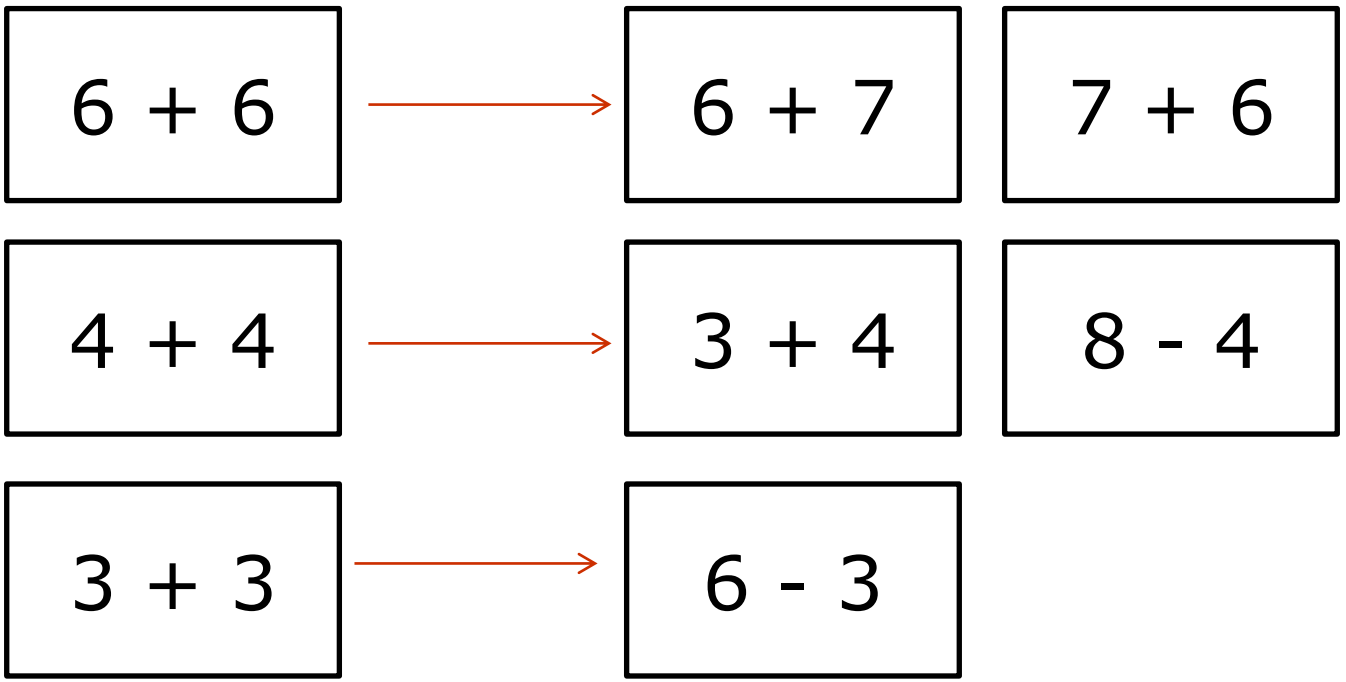
Beispiel für ein Arbeitsblatt:

Leicht für mich:	Hilft mir bei dieser Rechnung:
5 + 5 = _____ →	
→	
→	

Strategie-Training…

Übungsformat: Aufgabenkärtchen sortieren

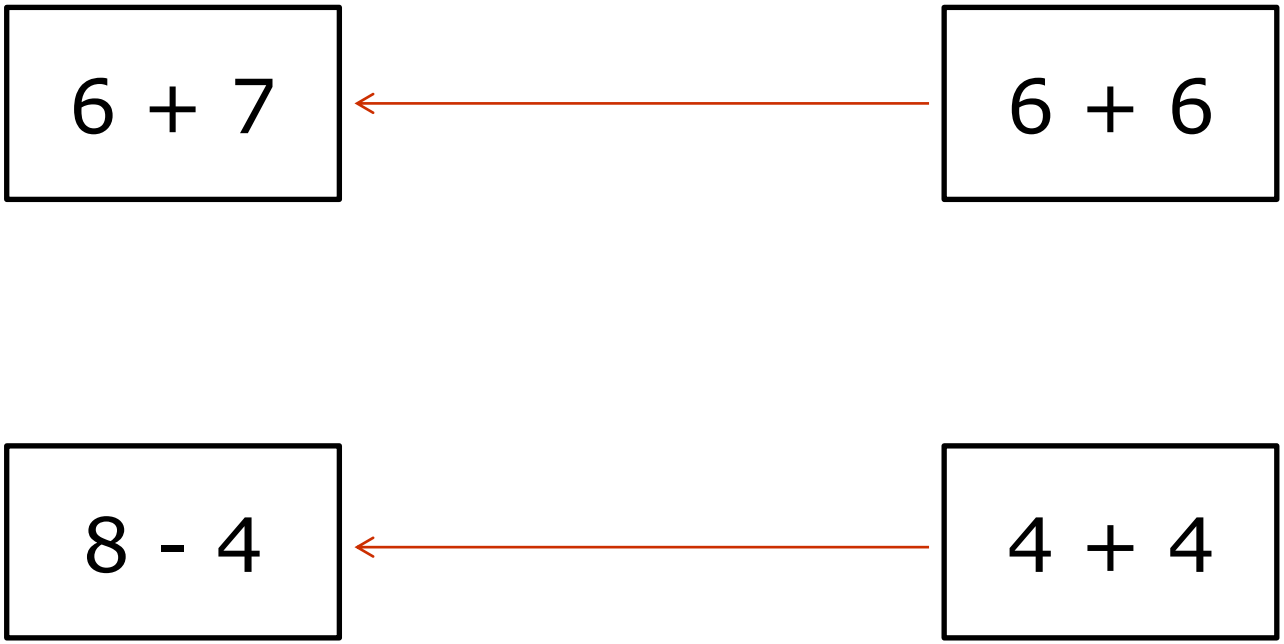
Leicht für mich: Hilft mir für:



Strategie-Training…

Übungsformat: Aufgabenkärtchen sortieren

Schwer für mich: Die hier hilft mir:



Strategien gezielt erarbeiten: Um diese Aufgaben geht es…

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9

Nichtzählende Strategien im ZR 20 im Überblick (Details: Gaidoschik 2007):

Plus	Minus
1 mehr mit Tauschaufgabe	1 weniger
2 mehr mit Tauschaufgabe	2 weniger
"Kraft der Fünf" ("Fingerbild")	"Kraft der Fünf" ("Eine Hand weg")
	(Nachbar von "Eine Hand weg")
Verdoppeln	Halbieren
Verdoppeln plus 1 (plus 2)	(Nachbar von Halbieren)
	Unterschied 1
	Unterschied 2
"Zusammen 10" ("Zahlenfreunde")	Passende Zerlegung finden
Nachbarn der "Zahlenfreunde	
"Kraft der Zehn"	"Kraft der Zehn"
"Zehnerstopp"	"Zehnerstopp"

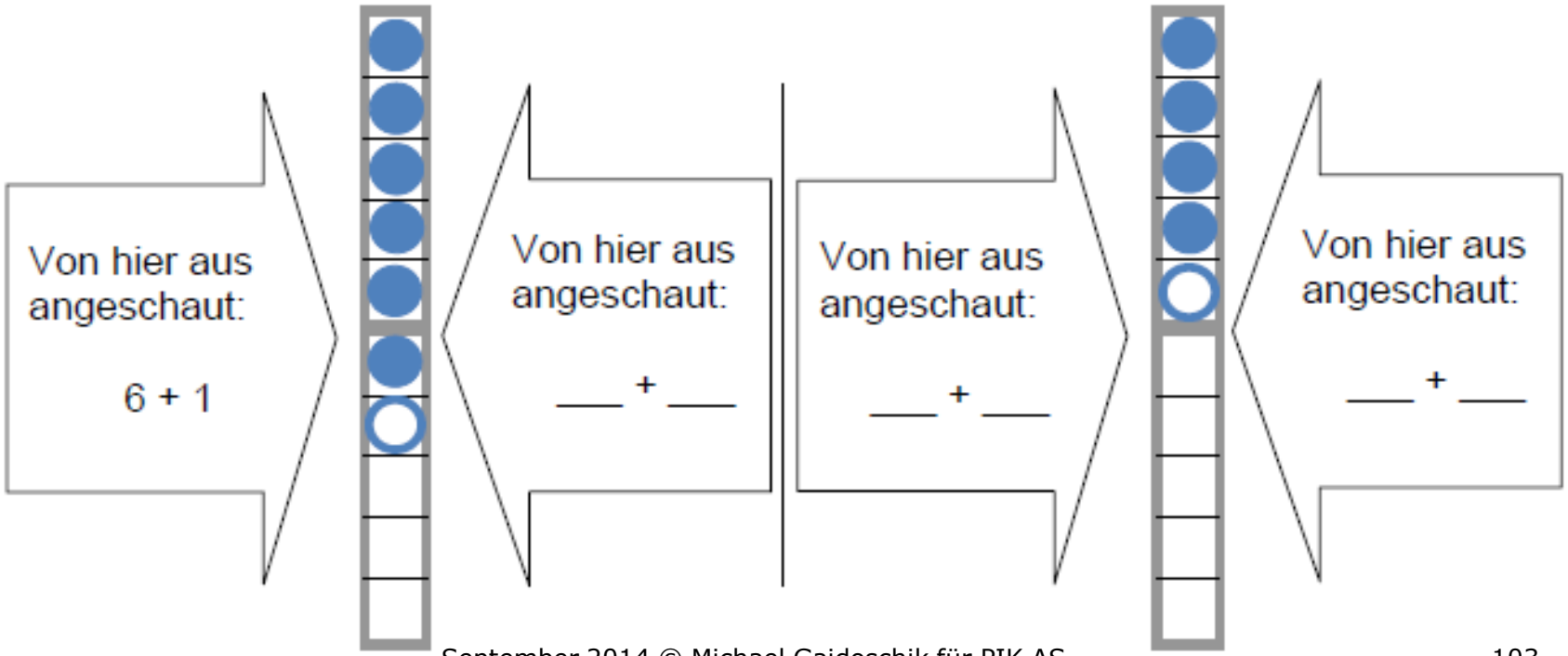
Viele Aufgaben – oder *eine* Strategie: "1 mehr" (inkl. "Tauschaufgabe")

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9

Tauschaufgaben: Eine Frage der Sichtweise…

… die man mit Kindern gezielt erarbeiten sollte:
Man sieht nur, was man weiß!

Welche Plus-Aufgaben kann man im Zehnerstreifen sehen?
Schreibe auf!



Tauschaufgaben: Eine Frage der Sichtweise…

… die man mit Kindern gezielt erarbeiten sollte!

Immer zwei Aufgaben gehören zusammen!

4 + 1 = ___	8 + 1 = ___	6 + 1 = ___
1 + 4 = ___	1 + 8 = ___	1 + 6 = ___

Versuche, den Satz richtig fertig zu schreiben:
Wenn man bei einer Plus-Aufgabe die beiden Zahlen vertauscht, dann

_____ .

Finde zu jeder Aufgabe die Plusaufgabe mit vertauschten Zahlen!

1 + 7 = ___	1 + 9 = ___	1 + 5 = ___
___ + ___ = ___	___ + ___ = ___	___ + ___ = ___

Strategie
"2 mehr" (inkl. "Tauschaufgabe")

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9

Schon behandelt: Strategie "Handpakete" ("Kraft der Fünf")

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9

Im ZR 10 schon behandelt: Strategie "Verdoppeln" (ZR 20 folgt)

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9

Schon behandelt: "Verdoppeln plus 1" (ZR 20 folgt)

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9

Strategie "Zehnerpärchen", "Zahlenfreunde"

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9

Strategie "Nachbaraufgaben der Zehnerpärchen"

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9

Strategie "+10-1“

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9

Was dann noch bleibt…

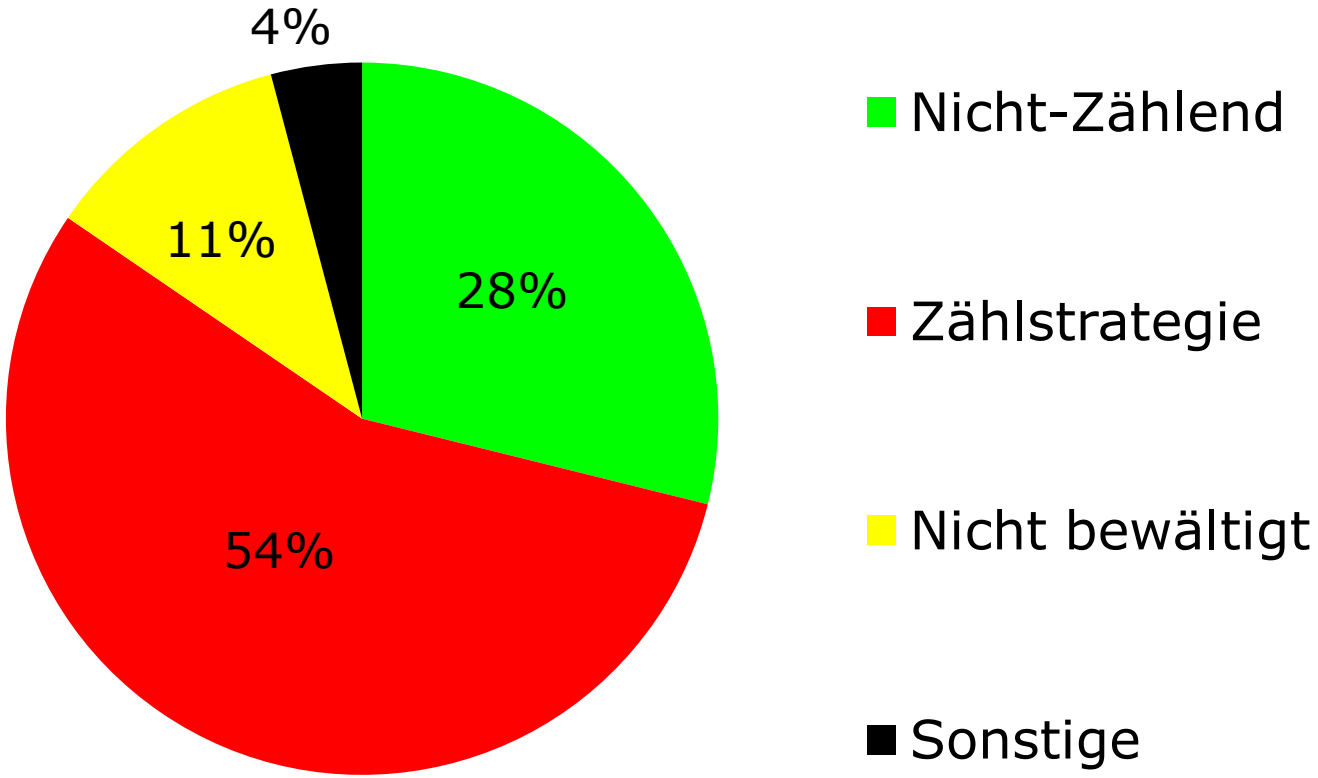
1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9

Rechnen über oder unter den Zehner: Nichts, was prinzipiell anders wäre!

Plus	Minus
1 mehr mit Tauschaufgabe	1 weniger
2 mehr mit Tauschaufgabe	**2 weniger**
"Kraft der Fünf" ("Fingerbild")	**"Kraft der Fünf" ("Eine Hand weg")**
	(Nachbar von "Eine Hand weg")
Verdoppeln	**Halbieren**
Verdoppeln plus 1 (plus 2)	**(Nachbar von Halbieren)**
	Unterschied 1
	Unterschied 2
"Zusammen 10/Zahlenfreunde"	Passende Zerlegung finden
Nachbarn der "Zahlenfreunde"	
"Kraft der Zehn"	**"Kraft der Zehn"**
"Zehnerstopp"	**"Zehnerstopp"**

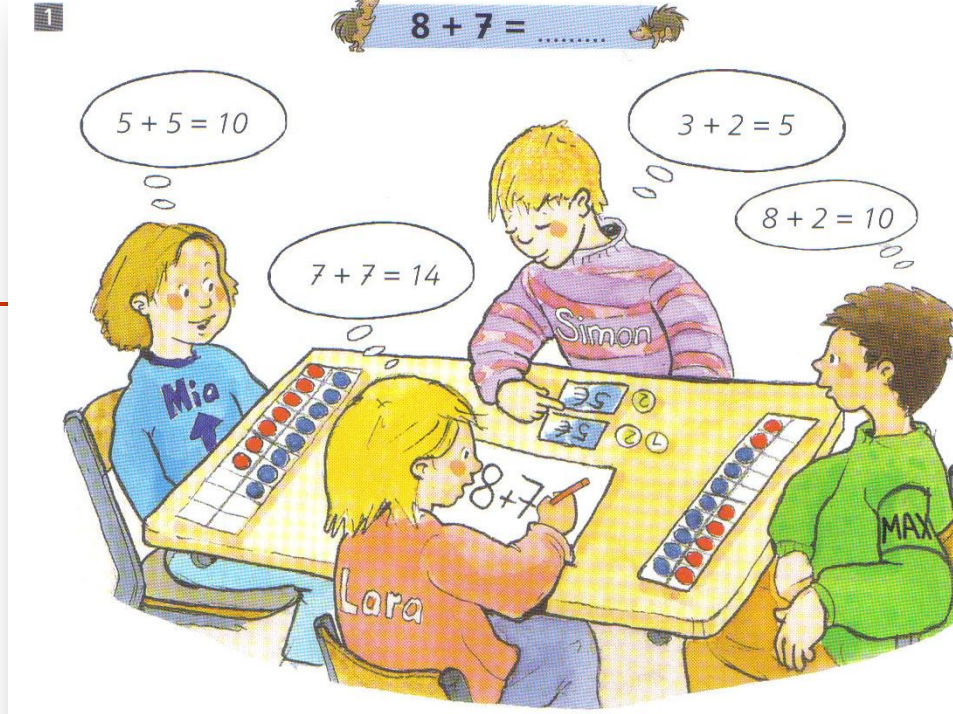
Zehnerübergang nach Rezept: Die Folgen (Regelschule!) (vgl. Gaidoschik 2010)

Strategien bei Aufgaben mit Zehnerübergang am Ende des 1. Schuljahres (im Unterricht behandelt wurde ausschließlich das Verfahren „bis 10 anfüllen, dann weiter“):



Basis: 139 Kinder, 7 Aufgaben mit ZÜ, 6+6 als Sonderfall ausgenommen

Viele Wege führen über den Zehner!



Wie rechnen die Kinder?
Welche einfachen Aufgaben benutzen sie?

2 Wie rechnen die Kinder? 9 + 6 = ...

Mia:

Simon:

Max:

Lara rechnet: 10 + 5 = ...

3 Wie rechnest du?

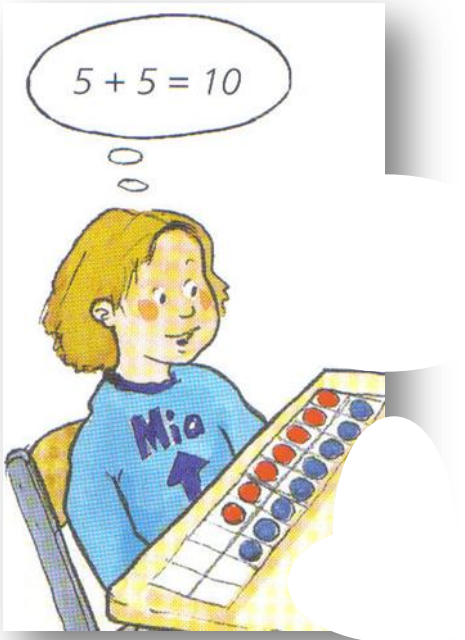
9 + 7 = ... 6 + 9 = ... 8 + 5 = ... 8 + 6 = ...

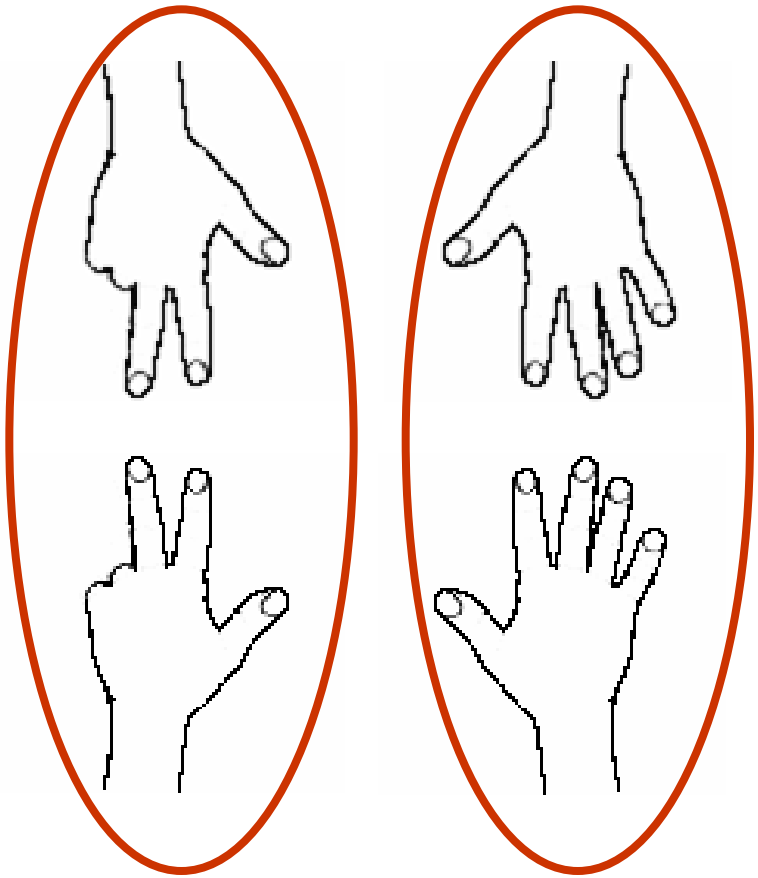
Zahlenbuch 1
(Wittmann/Müller,
Klett - ÖBV)

Zehnerübergang mit der „Kraft der Fünf“:

Am Beispiel

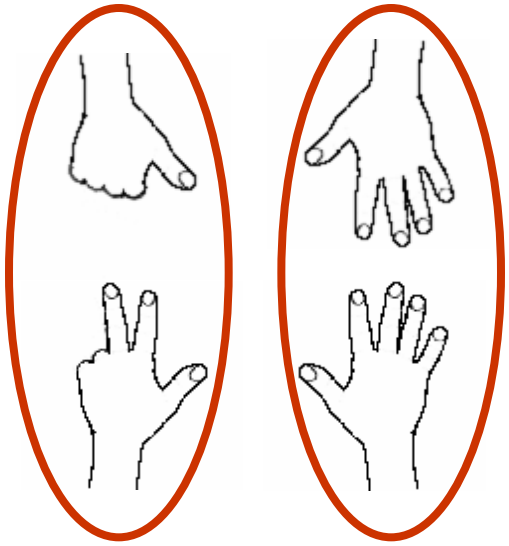
8 + 8





Zehnerübergang mit der „Kraft der Fünf“:

Nicht nur beim Verdoppeln möglich und sinnvoll!



$$6 + 8 = 14$$

$$5 \quad 1 \quad 5 \quad 3$$

Viele Wege führen "über den Zehner"!

Nutzen von
Zusammenhängen:

7 + 7 = 14

„1 mehr“

7 + 8 = 15

7 + 10 = 17

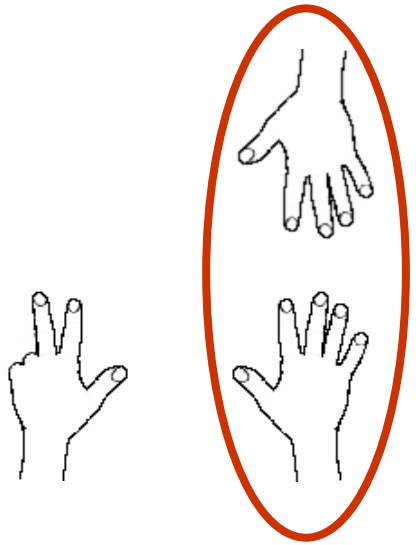
„1 weniger“

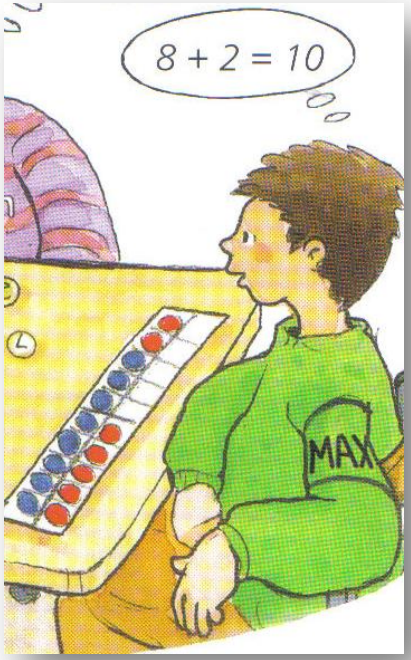
7 + 9 = 16

Viele Wege führen "über den Zehner"!

Aber natürlich *auch*
„*klassisch*“ mit
„Auffüllen bis 10“
(„Zehnerstopp“…)

… aber nicht
„nach Rezept“,
sondern aus Einsicht
in den Vorteil!



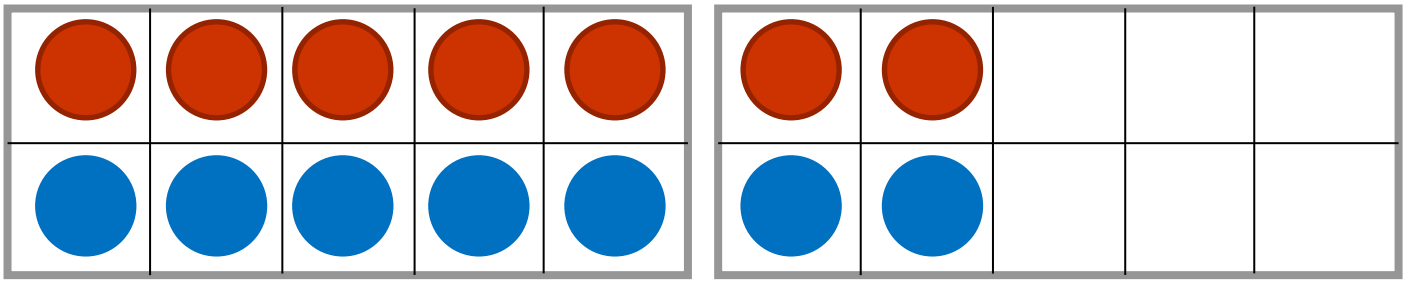


5 + 8 = 13

5 3

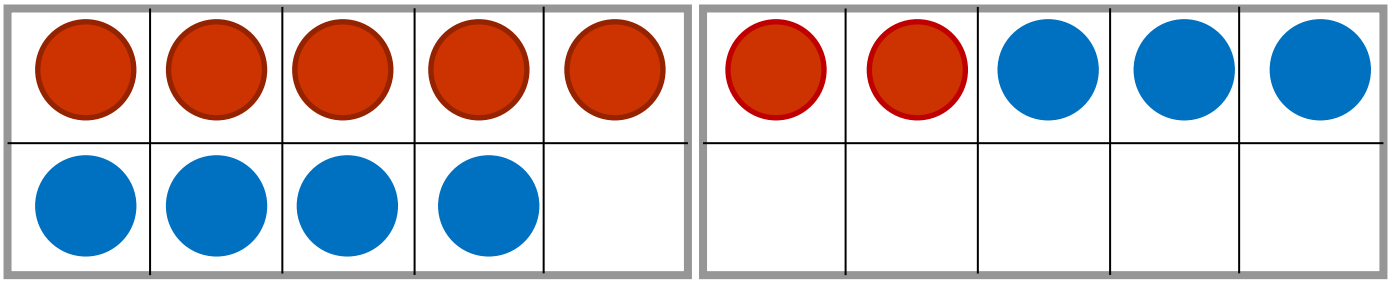
Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz von Rechenschiffchen & Co.

Lege 7 + 7 mit zwei Farben!
Lege so, dass man **auf einen Blick** sehen kann, wie viel das ist!



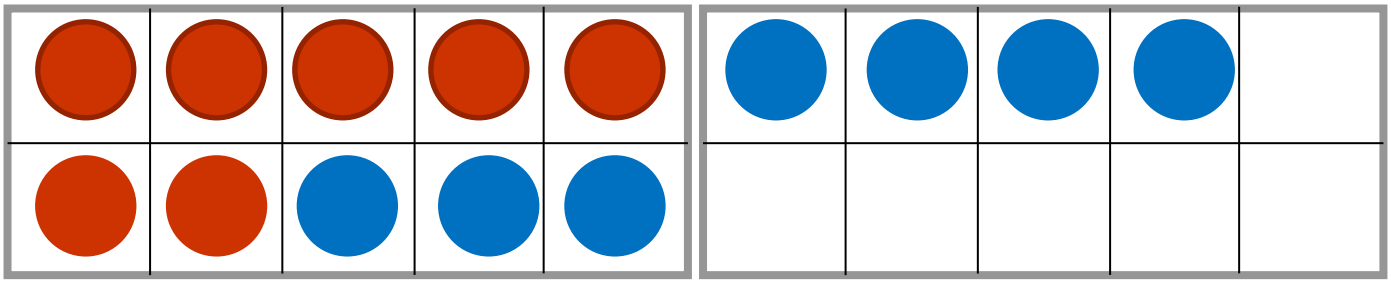
Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz von Rechenschiffchen & Co.

Lege 7 + 7 mit zwei Farben!
Lege so, dass man **auf einen Blick** sehen kann, wie viel das ist!

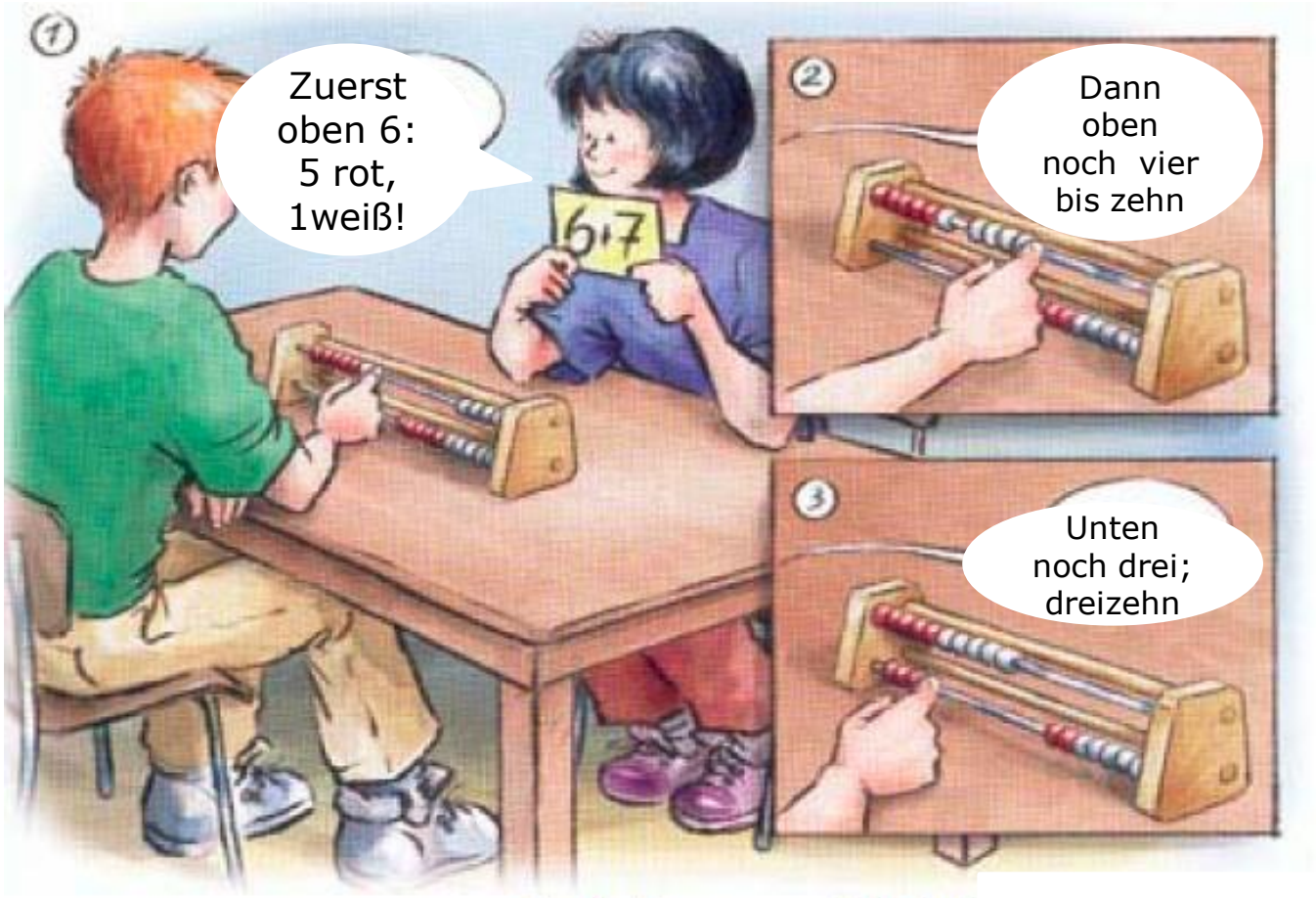


Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz von Rechenschiffchen & Co.

Lege 7 + 7 mit zwei Farben!
Lege so, dass man **auf einen Blick** sehen kann, wie viel das ist!



Das Wichtigste am Materialeinsatz: Vorstellungs-Hilfe, nicht *Ersatz*!



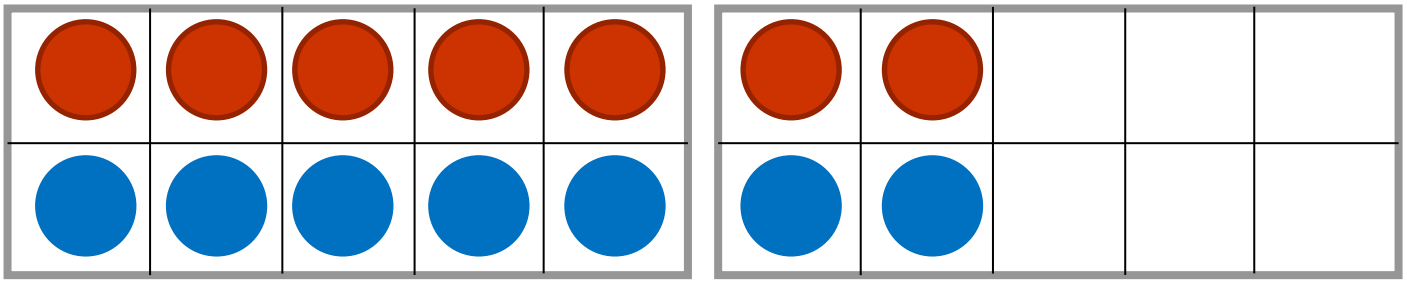
Schipper 2005

Das Wichtigste am Materialeinsatz: Vorstellungs-Hilfe, nicht *Ersatz*!

Schipper 2005

Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz von Rechenschiffchen & Co.

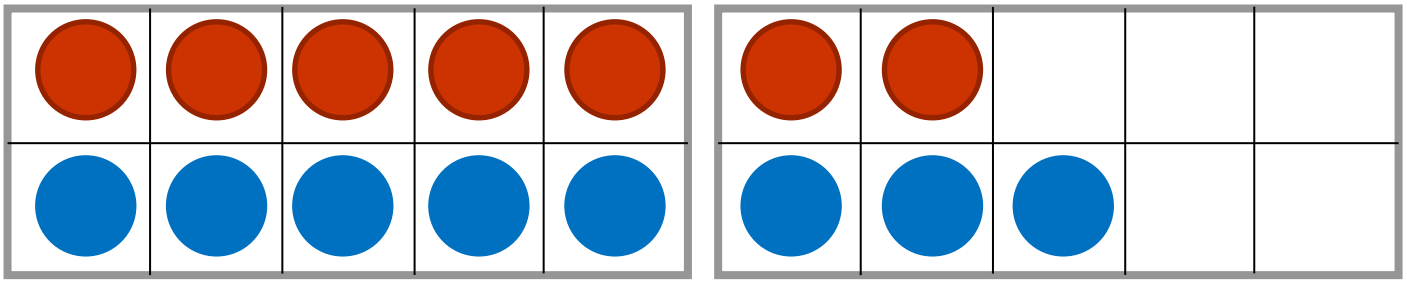
Lege 7 + 7 mit zwei Farben!



Kannst du daraus 7+8 machen?

Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz von Rechenschiffchen & Co.

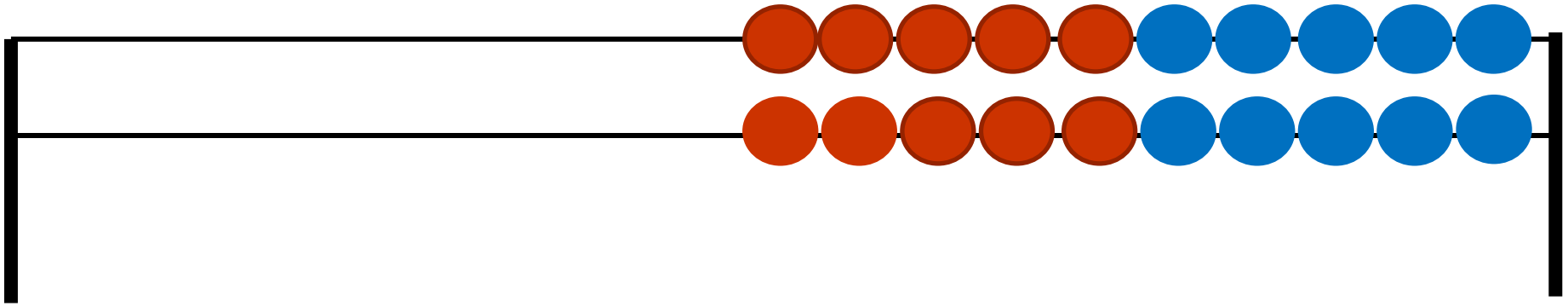
Lege 7 + 7 mit zwei Farben!



Was hat sich geändert?
Was hat 7+7 und 7+8 miteinander zu tun? …

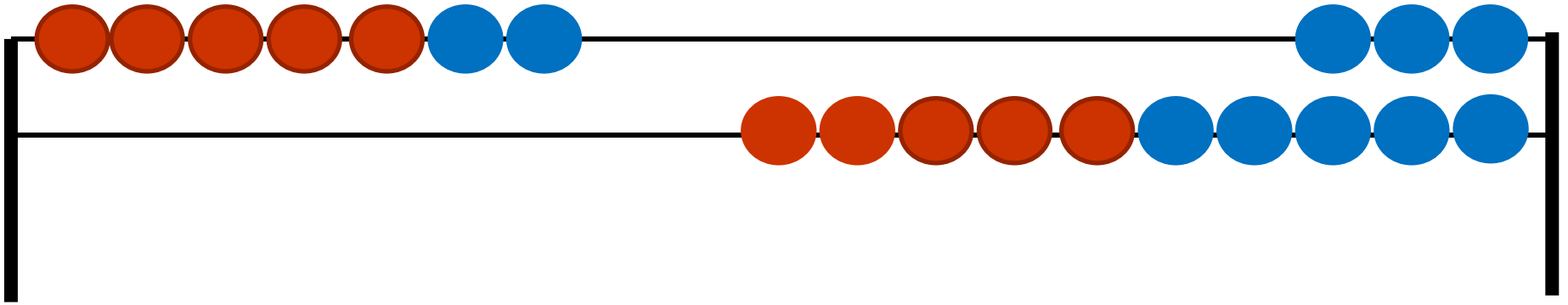
Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz des Rechenrahmens

Zeige 7 + 10!
Versuche es, ohne Kugeln einzeln abzuzählen!



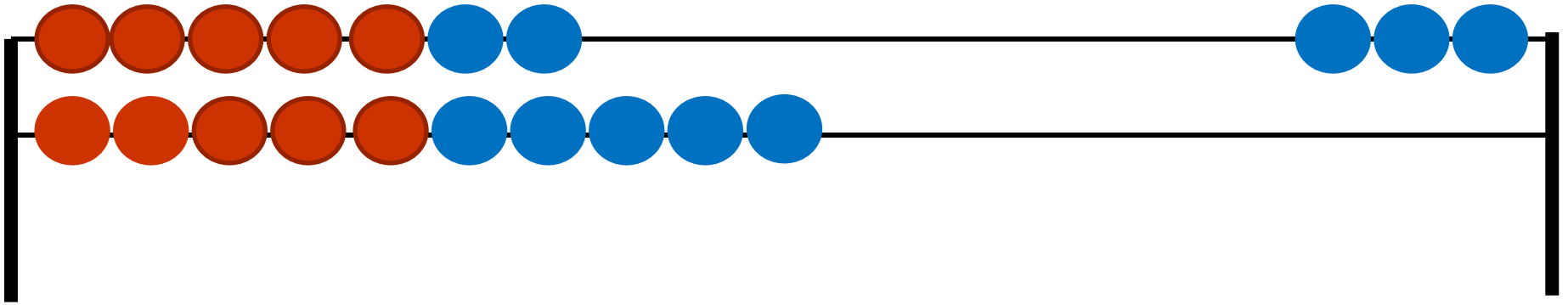
Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz des Rechenrahmens

Zeige 7 + 10!
Versuche es, ohne Kugeln einzeln abzuzählen!



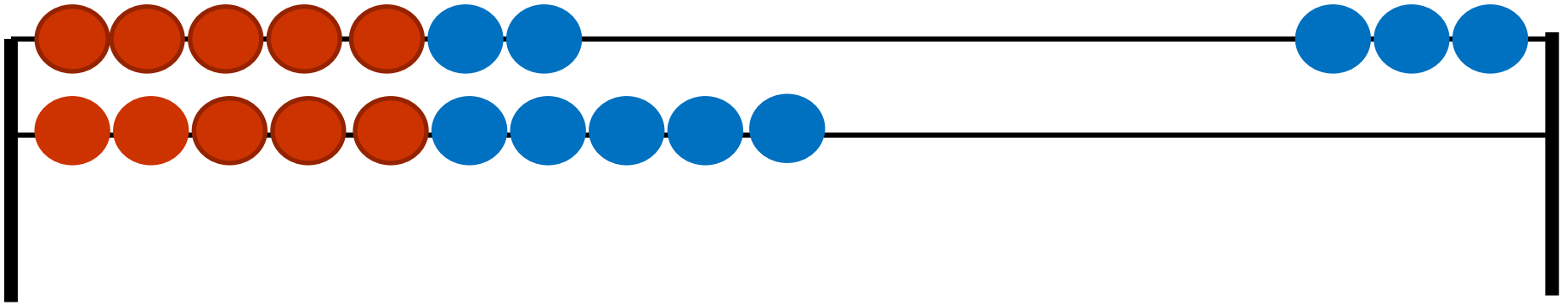
Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz des Rechenrahmens

Zeige 7 + 10!
Versuche es, ohne Kugeln einzeln abzuzählen!



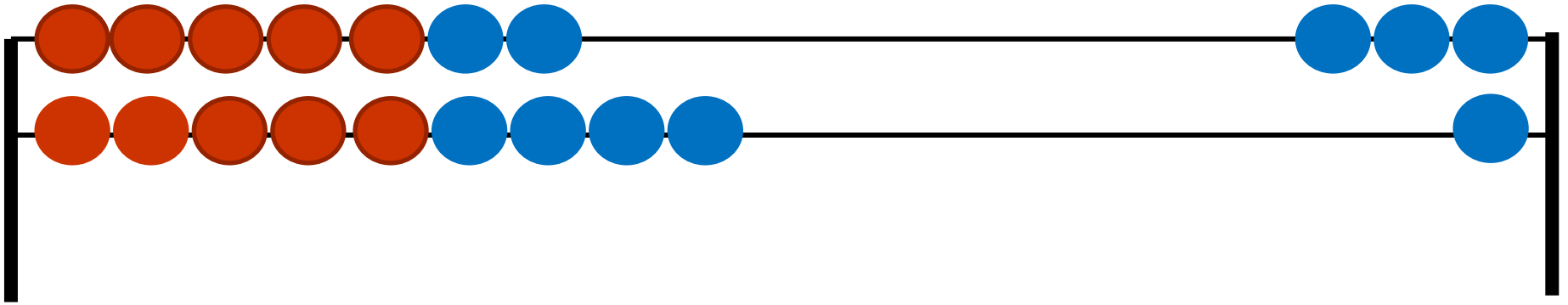
Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz des Rechenrahmens

Zeige 7 + 10!
Wie kannst du daraus 7 + 9 machen?



Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz des Rechenrahmens

Zeige 7 + 10!
Wie kannst du daraus 7 + 9 machen?



Was ändert sich von 7 + 10 auf 7 + 9?

Der "Zehnerstopp": Eine Erleichterung, wenn …

- Ergänzen bis 10 „im Schlaf“ abläuft
- Zerlegen vollständig automatisiert, sodass „zweite Portion“ immer schon mitgedacht
- Rechnungen wie 10 + 3 „babysch“ sind
- Der Ablauf all dieser Rechenschritte problemlos überblickt wird

Der "Zehnerstopp": Viele Voraussetzungen …

… die viele Kinder Ende der 1. Volksschule (und manche noch viel später) nicht abgesichert haben!

Die Folge:

- Zählendes Rechnen…
- … welches bald zur Gewohnheit wird …
- … und doch eine Sackgasse darstellt!

"Zehnerstopp": Erarbeitung früher oder später sicher sinnvoll – aber wie?

„Warum denn ausgerechnet „zuerst bis 10“?

Rechnungen zum Sortieren vorlegen:

10 + 4	7 + 9	30 + 6	24 + 9	*
6 + 7	10 + 3	40 + 2	58 + 6	
10 + 5	4 + 8	83 + 9	60 + 3	

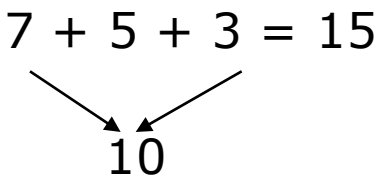
Leichte Rechnung oder schwere Rechnung ?

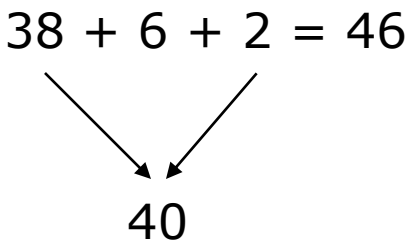
* Erfahrungsgemäß wird der Vorteil des Zehnerstopp-Verfahrens manchen Kindern erst bei Anwendung im ZR bis 99 so richtig klar. Arbeit an Rechenstrategien sollte ohnedies als „work in progress“ betrachtet werden: Eine Strategie, die im ersten Schuljahr vielleicht noch nicht angenommen wurde, besitzt vielleicht im zweiten Schuljahr unter geänderten Voraussetzungen eine erhöhte Attraktivität!

Wenn "Zehnerstopp" erarbeitet wird: Auf welche Weise?

Den Zehner als Zwischenstation nutzen:

Rechenvorteile erkennen und „elegant“ rechnen!





Wenn "Zehnerstopp": Auf welche Weise?

Sinnvoller Einstieg ins „Zehnerstopp"-Verfahren:

Zuerst die Handzerlegungen

5 + 8

5 3

Ebenso:
5 + 6
5 + 7
5 + 9

bzw., s.o.:
35 + 6
65 + 8 …

Dann vielleicht: Mit „vertauschten" Händen!

7 + 8

3 5

Ebenso:
6 + 9
8 + 7
9 + 6

bzw., s.o.:
34 + 9
48 + 7 …

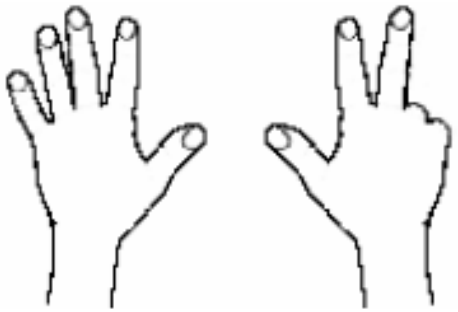
Erarbeitung nichtzählender Strategien im ZR 20: Subtraktionsstrategien

Plus	Minus
1 mehr mit Tauschaufgabe	1 weniger
2 mehr mit Tauschaufgabe	2 weniger
"Kraft der Fünf" ("Fingerbild")	"Kraft der Fünf" ("Eine Hand weg")
	(Nachbar von "Eine Hand weg")
Verdoppeln	Halbieren
Verdoppeln plus 1 (plus 2)	(Nachbar von Halbieren)
	Unterschied 1
	Unterschied 2
"Zusammen 10" ("Zahlenfreunde")	**Passende Zerlegung finden**
Nachbarn der "Zahlenfreunde	
"Kraft der Zehn"	"Kraft der Zehn"
"Zehnerstopp"	"Zehnerstopp"

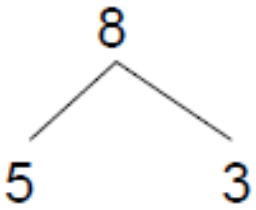
Passende Zerlegung/Umkehraufgabe: Auch das eine Frage der Sichtweise…

… die man mit Kindern gezielt erarbeiten sollte!

So zeige ich 8 Finger:



So kann man das aufschreiben:



So kann man damit rechnen:

5 + 3 = ____ 8 – 5 = ____

3 + 5 = ____ 8 – 3 = ____

Probier' dasselbe mit 7 und mit 9!

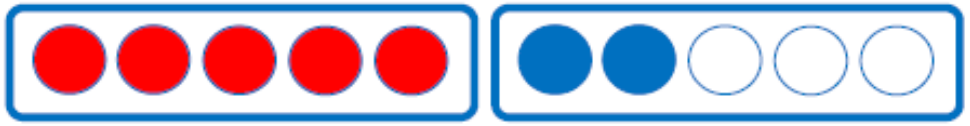
Umkehraufgaben: Auch das eine Frage der Sichtweise…

… die man mit Kindern gezielt erarbeiten sollte!

Plättchen in Rechenschiffchen: Kannst du hier „Rechnungen sehen“?

Ich sehe hier:	5 + 3 = 8	und auch	3 + 5 = ___
Dann sehe ich noch	8 – 5 = ___	und auch	8 – 3 = ___

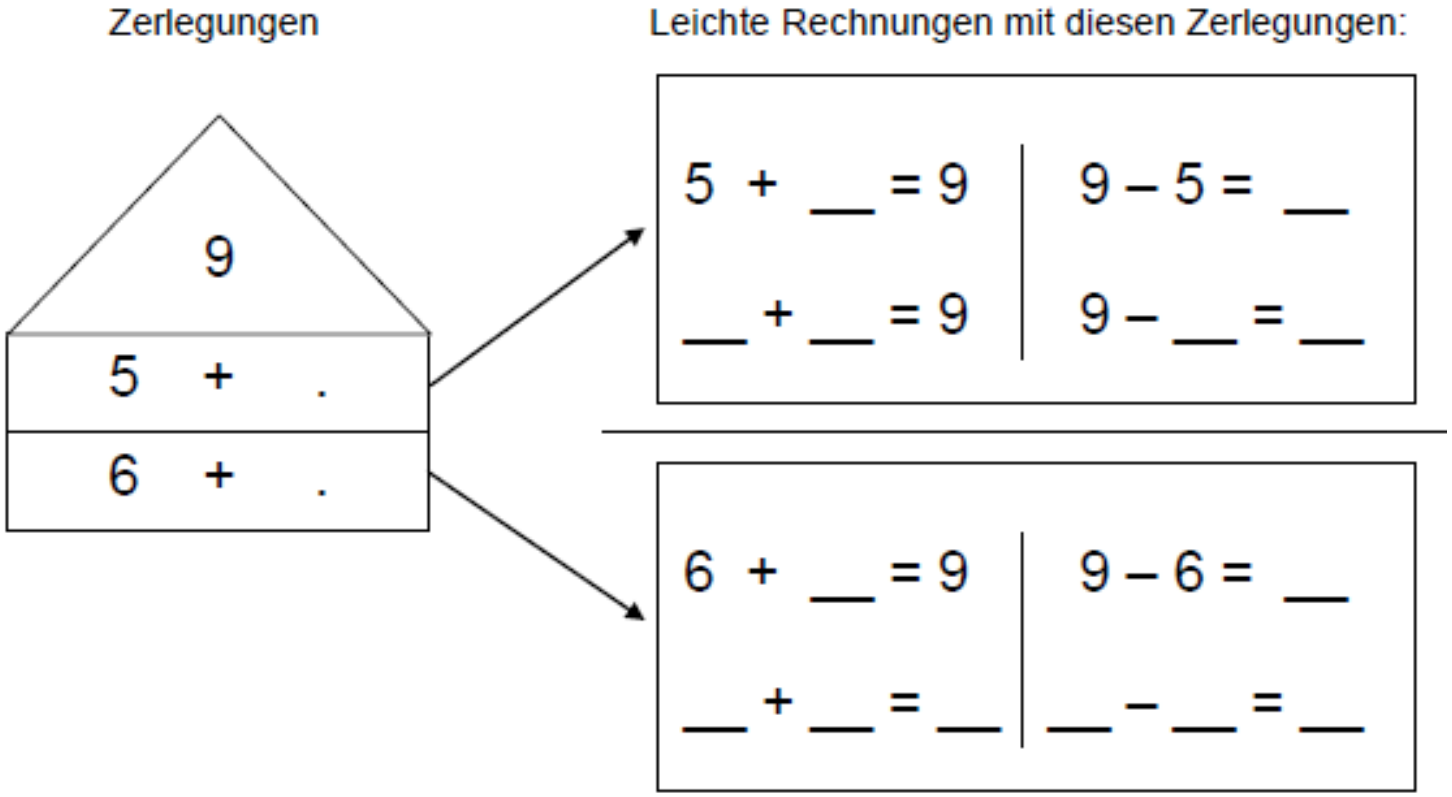
Jetzt du! Schreibe auf, welche Rechnungen du hier siehst:



Umkehraufgaben: Auch das eine Frage der Sichtweise…

… die man mit Kindern gezielt erarbeiten sollte!

Wer zerlegen kann, kann auch plus und minus rechnen!



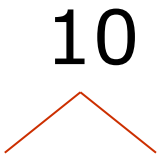
Umkehraufgaben: Auch das eine Frage der Sichtweise…

Welche Zerlegung passt für diese Minus-Aufgaben?

9 – 8

7 – 4

10 - 7



Ein wichtiger, *eigener* Schritt: Strategieauswahl trainieren!

Sinnvolle Übung (immer wieder einmal):
Aufgaben nach Strategien sortieren

um 1 mehr	*um 2 mehr*	*Finger-bild*	*Doppelt plus 1*

4 + 3

3 + 5

6 + 2

2 + 7

1 + 8

2 + 3

4 + 5

3 + 4

Ein wichtiger, *eigener* Schritt: Strategieauswahl trainieren!

Sinnvolle Übung (immer wieder einmal):
Aufgaben nach Strategien sortieren

um 1 mehr	*um 2 mehr*	*Finger-bild*	*Doppelt plus 1*
1 + 8	2 + 7	3 + 5	4 + 3
	6 + 2	4 + 5	2 + 3
			3 + 4

Automatisieren: Noch einmal zum Ziel…

"Am Ende des ersten Schuljahres sollten möglichst alle Kinder alle Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 10 [...] auswendig wissen."

SCHIPPER 2005, S. 7

Der Weg zu diesem Ziel*: Strategien* automatisieren, nicht Einzelaufgaben!

3 + 3 = ?
3 + 4 = ?

3 + 3 = 6
3 + 4 = 7

Strategien automatisieren

3 + 4= ?

3 + 3 = 6
3 + 4 = 7

Arbeiten mit einer Lernkartei im Klassenverband am Beispiel 1x1

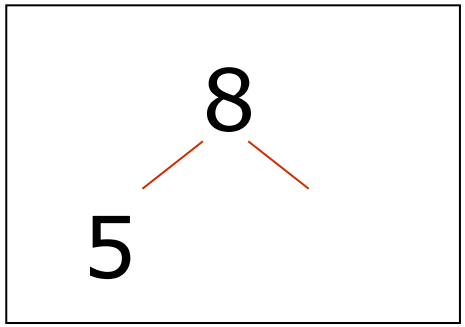
Strategien *automatisieren*

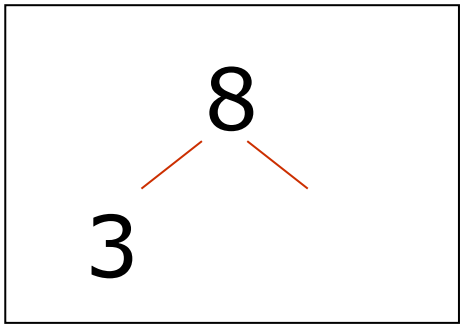
5 + 6	5 + 4	4 + 5	2 + 3	usw.	*eine* "Lerngruppe"
3 + 2	4 + 3	3 + 4	6 + 5		

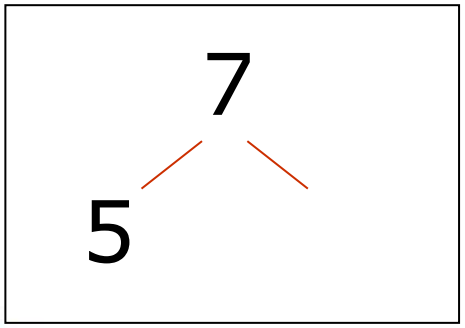
- ☞ Jedes Kind erarbeitet eine Gruppe in seinem Tempo.
- ☞ Erst wenn eine Gruppe (weitgehend) automatisiert, nimmt Kind neue Gruppe dazu.

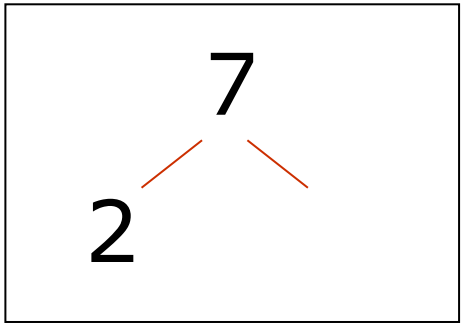
Auch beim Zahlenzerlegen: Automatisieren in „Strategiegruppen“

Gruppe „Handpakete“:







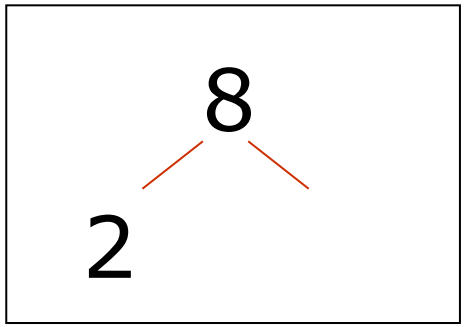


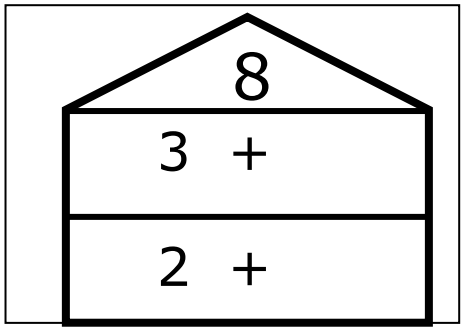
usw.

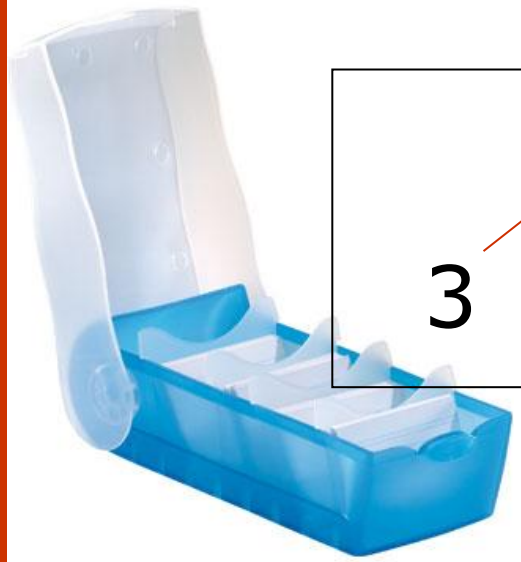
Auch beim Zahlenzerlegen: Automatisieren in „Strategiegruppen“

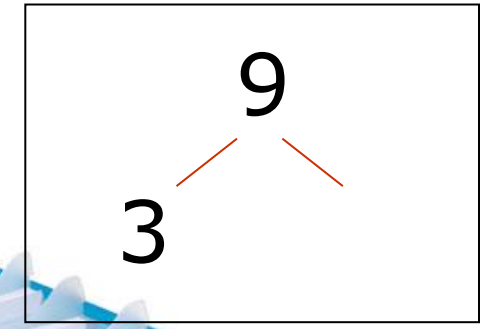
Gruppe „Nachbarn der Handpakete“:

Rückseite

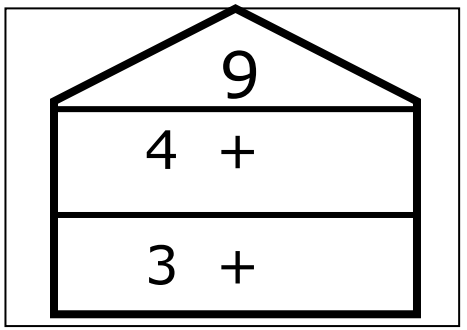






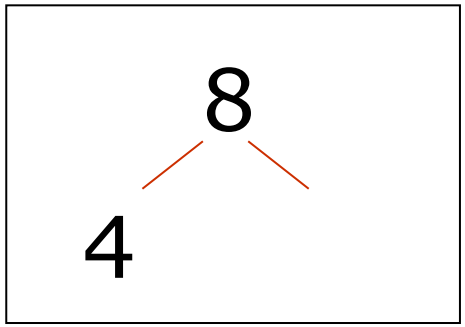


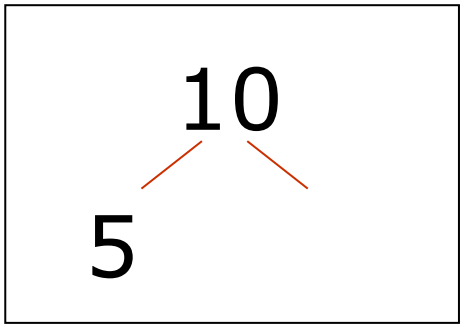
usw.

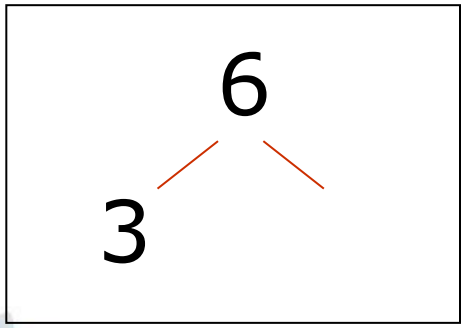


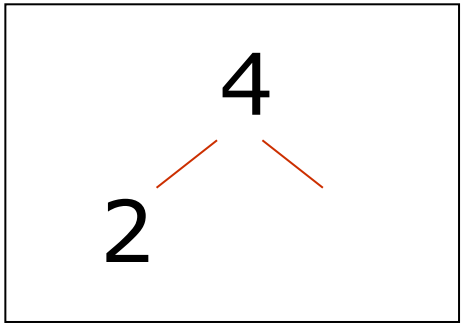
Auch beim Zahlenzerlegen: Automatisieren in „Strategiegruppen“

Gruppe „Hälften“:



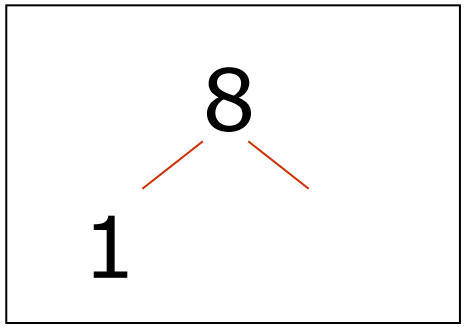


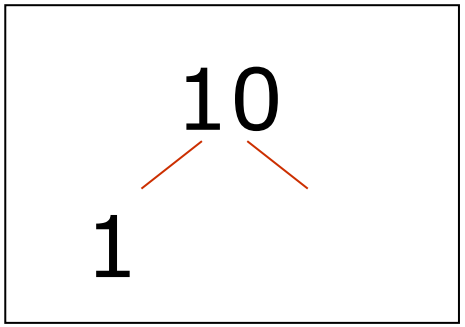


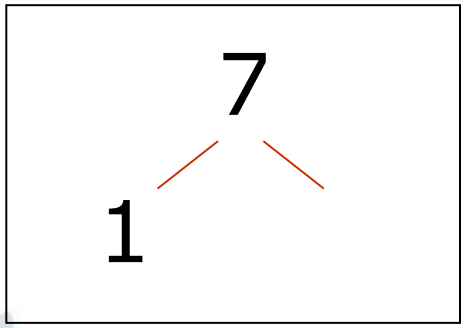


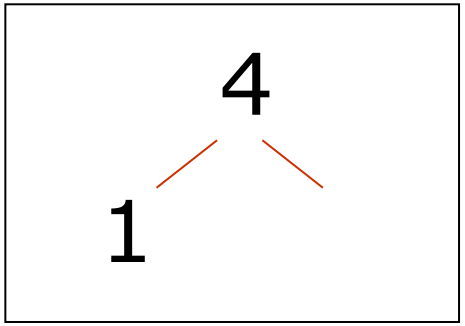
Auch beim Zahlenzerlegen: Automatisieren in „Strategiegruppen“

Gruppe „1 und ?“:





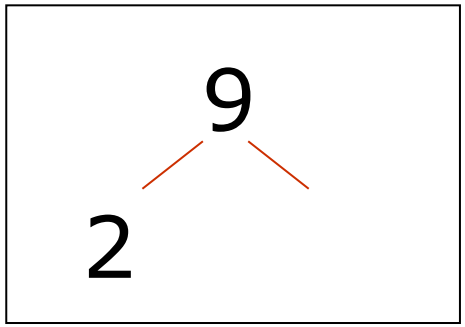


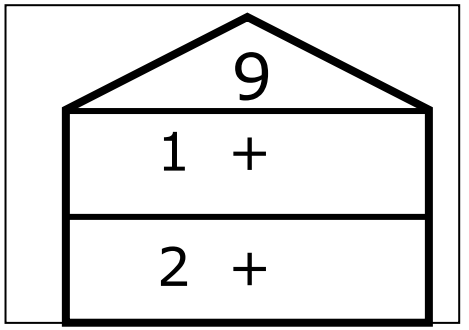


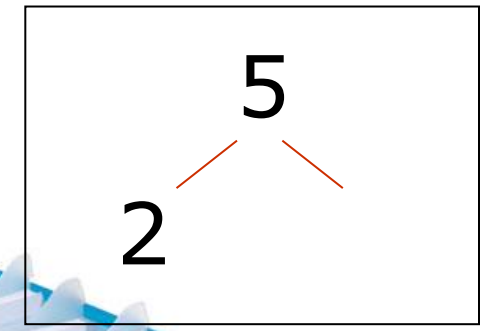
Auch beim Zahlenzerlegen: Automatisieren in „Strategiegruppen“

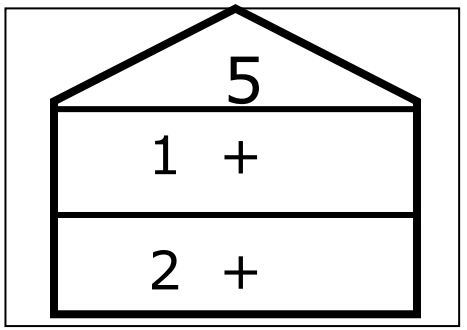
Gruppe „2 und ?“:

Rückseite

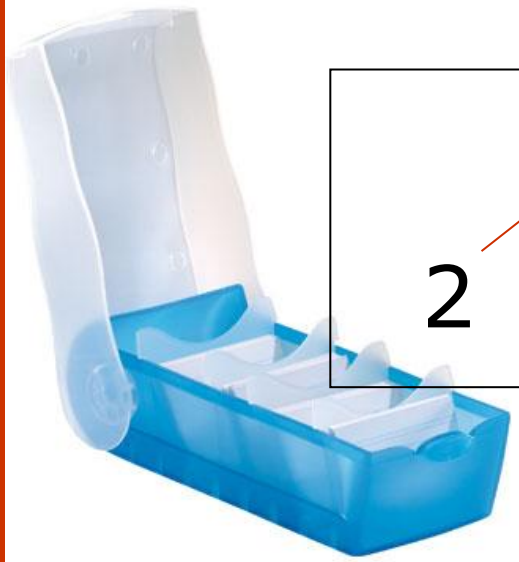








usw.



Details zum Erarbeiten von nicht zählenden Strategien im ZR 10 und 20:

Gaidoschik, Michael (2007): Rechenschwäche vorbeugen. Erstes Schuljahr: vom Zählen zum Rechnen. Wien: g&g

Dasselbe Buch bei Persen: „Rechenschwäche verstehen“

Titel- und Cover-Änderung gegen deklarierten Willen des Autors!

Weitere Literaturhinweise auf **www.recheninstitut.at**