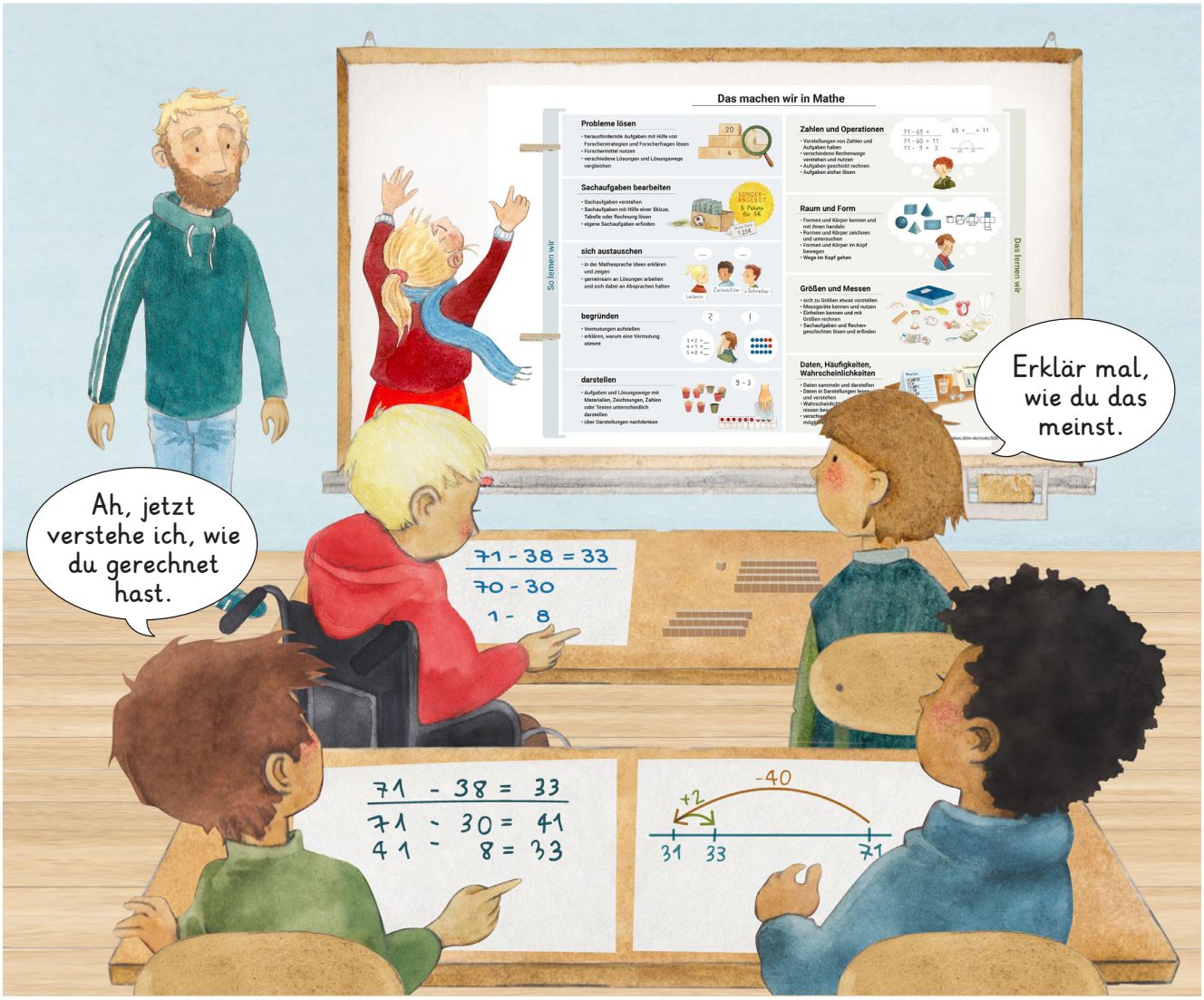
PIKAS
Deutsches Zentrum für
Lehrkräftebildung Mathematik



Prozessbezogene Kompetenzen herausfordern und unterstützen

Anregungen zur Umsetzung in der Grundschule

Inhaltsverzeichnis

DAS MACHEN WIR IN MATHE 4

MATHE – MEHR ALS RECHEN 6

1 DARSTELLEN 8

2 KOMMUNIZIEREN 12

3 ARGUMENTIEREN 16

4 PROBLEMLÖSEN 20

5 MODELLIEREN 26

6 PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN VERNETZEN 31

LITERATUR 34

Das machen

So lernen wir

Probleme lösen

- herausfordernde Aufgaben mit Hilfe von Forscherstrategien und Forscherfragen lösen
- Forschermittel nutzen
- verschiedene Lösungen und Lösungswege vergleichen



Sachaufgaben bearbeiten

- Sachaufgaben verstehen
- Sachaufgaben mit Hilfe einer Skizze, Tabelle oder Rechnung lösen
- eigene Sachaufgaben erfinden



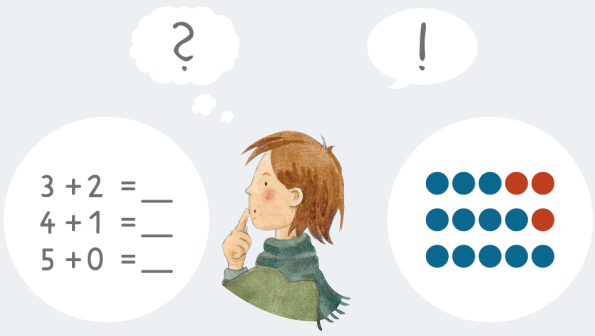
sich austauschen

- in der Mathesprache Ideen erklären und zeigen
- gemeinsam an Lösungen arbeiten und sich dabei an Absprachen halten



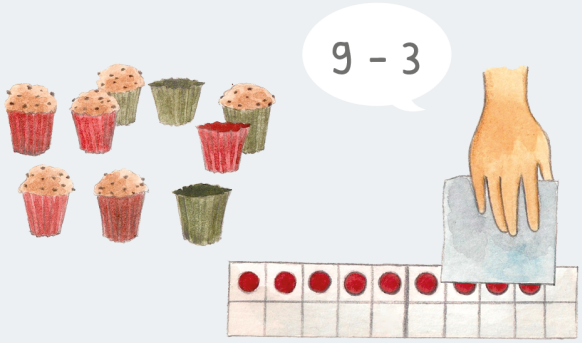
begründen

- Vermutungen aufstellen
- erklären, warum eine Vermutung stimmt



darstellen

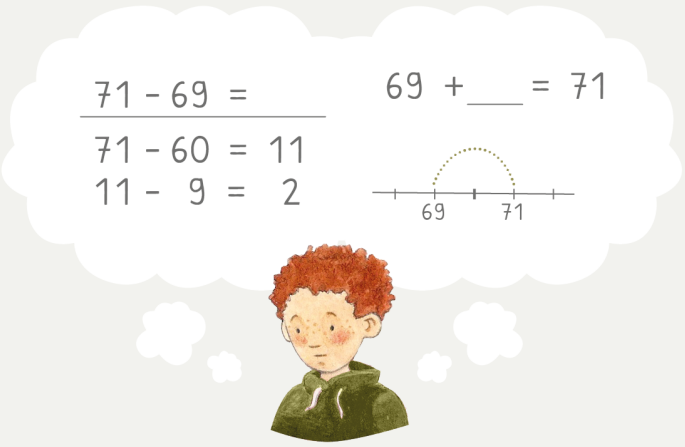
- Aufgaben und Lösungswege mit Materialien, Zeichnungen, Zahlen oder Texten unterschiedlich darstellen
- über Darstellungen nachdenken



wir in Mathe

Zahlen und Operationen

- Vorstellungen von Zahlen und Aufgaben haben
- verschiedene Rechenwege verstehen und nutzen
- Aufgaben geschickt rechnen
- Aufgaben sicher lösen



Raum und Form

- Formen und Körper kennen und mit ihnen handeln
- Formen und Körper zeichnen und untersuchen
- Formen und Körper im Kopf bewegen
- Wege im Kopf gehen



Größen und Messen

- sich zu Größen etwas vorstellen
- Messgeräte kennen und nutzen
- Einheiten kennen und mit Größen rechnen
- Sachaufgaben und Rechengeschichten lösen und erfinden



Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten

- Daten sammeln und darstellen
- Daten in Darstellungen lesen und verstehen
- Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen beschreiben und erklären
- verschiedene Kombinationsmöglichkeiten finden



Das lernen wir

Mathe – mehr als Rechnen



Der Mathematikunterricht in der Grundschule ist facettenreich. Inhaltlich setzen sich die Lernenden mit verschiedenen Inhaltsbereichen auseinander: *Zahlen und Operationen, Raum und Form, Größen und Messen* sowie *Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten*[1]. Doch ebenso bedeutsam ist die Art und Weise, *wie* die Lernenden mathematisch tätig sind. Sie entdecken und begründen Zusammenhänge, stellen diese dar oder tauschen sich mit anderen Kindern aus. Auch setzen sie sich mit mathematischen Problemen auseinander und entwickeln dabei zunehmend geschicktere Vorgehensweisen. Alltagsprobleme werden mit und durch Mathematik gelöst. Mathematik ist also mehr als nur Rechnen.

Im Verlauf des Mathematikunterrichts in der Grundschule sollen die Lernenden somit neben inhaltsbezogenen Kompetenzen auch prozessbezogene Kompetenzen entwickeln. Diese beschreiben, auf welche Art und Weise Kinder Mathematik betreiben: Sie tauschen sich über ihre Ideen aus und zeigen diese nachvollziehbar, begründen ihre zuvor aufgestellten Vermutungen, stellen mathematische Zusammenhänge dar und interpretieren diese, tauschen sich über eigene und fremde Vorgehensweisen aus, lösen Probleme und entwickeln dabei zunehmend tragfähige Strategien, oder gehen mit Aufgaben in Sachkontexten um, indem sie diese strukturieren, vereinfachen und bearbeiten.

Einen auch für Kinder nachvollziehbaren Überblick über diese Kompetenzbereiche und deren Anforderungen bietet das Poster *Das machen wir in Mathe* (*https://pikas.dzlm.de/node/555*).

Dabei ist zu beachten, dass inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen im Mathematikunterricht eng miteinander verzahnt sind. Eine verstehensorientierte Auseinandersetzung etwa mit den halbschriftlichen Rechenstrategien der Subtraktion ist erst dann möglich, wenn die Lernenden mit anderen Kindern kommunizieren und eigene und fremde Vorgehensweisen in Beziehung setzen – anstatt Strategien bloß (rezeptartig) anzuwenden.

prozessbezogene Kompetenzen

- Problemlösen
- Argumentieren
- Kommunizieren
- Darstellen
- Modellieren

inhaltsbezogene Kompetenzen

- Zahlen/Operationen
- Raum/Form
- Größen/Messen
- Daten/Häufigkeiten/Wahrscheinlichkeiten

[1] Die in dieser Handreichung gewählten Beispiele stammen aus dem Bereich der Arithmetik, da dieser in der Grundschule eine zentrale Rolle einnimmt und sich hier die dargestellten Zusammenhänge besonders anschaulich verdeutlichen lassen. Natürlich können und sollten prozessbezogene Kompetenzen auch in anderen Inhaltsbereichen des Mathematikunterrichts gefördert und gefordert werden.

Die Gegenüberstellung folgender zwei Aufgabenvarianten kann dabei gut verdeutlichen, welches Potenzial sich zum Herausfordern prozessbezogener Kompetenzen durch die Öffnung der Aufgabenstellungen ergeben.

AUFGABENSTELLUNG 1:

Rechne aus.

45 − 23 = 22 71 − 38 = 33

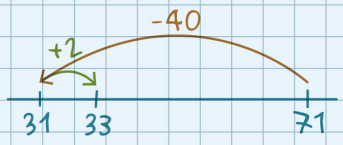


AUFGABENSTELLUNG 2:

Rechne geschickt.
Stelle deinen Rechenweg dar.

45 − 23 = 22 71 − 38 = 33

45 − 20 = 25 71 − 40 = 31
25 − 3 = 22 31 + 2 = 33



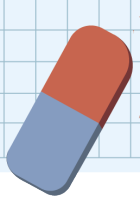
Rechne geschickt.
Stelle deinen Rechenweg dar.

45 − 23 = 22 71 − 38 = 33

40 − 20 = 20 70 − 30 = 40
5 − 3 = 2 1 − 8 = ~~−7~~
71 − 30 = 41
41 − 8 = 33

Rechne geschickt.
Stelle deinen Rechenweg dar.

45 − 23 = 22 71 − 38 = 33



So werden die Lernenden in der ersten Aufgabenstellung aufgefordert, die beiden Aufgaben zu berechnen. Dies ist auch Teil der zweiten Aufgabenstellung – jedoch nicht allein bzw. liegt der Fokus darauf, dass die Lernenden eigene Wege entwickeln, diese darstellen und im Anschluss darüber ins Gespräch treten können. Bei Betrachtung der Lernendenbearbeitungen zu Aufgabenstellung 2 wird deutlich, wie facettenreich die Antworten sein können. Es geht nicht allein um das Finden des richtigen Ergebnisses, sondern um das Verstehen und Begründen von Vorgehensweisen.

Ein einseitiger Fokus auf das „Rechnen“ im Sinne der reinen Ergebnisproduktion greift im Mathematikunterricht zu kurz. Zentrale Aspekte wie das Durchdringen von Zusammenhängen, das Nutzen von Darstellungen oder das Reflektieren eigener Strategien treten in den Hintergrund. Gerade diese sind jedoch entscheidend für ein nachhaltiges mathematisches Verständnis. Das Beispiel dient zugleich als Brücke zu den folgenden Kapiteln. Die prozessbezogenen Kompetenzen werden dort zunächst jeweils einzeln in den Blick genommen und vertieft. Diese isolierte Betrachtung kann auf dem Papier sinnvoll sein, um zentrale Aspekte der jeweiligen prozessbezogenen Kompetenz herauszuarbeiten. Gleichzeitig ist zu betonen, dass die Kompetenzen im Unterricht nicht getrennt voneinander auftreten, sondern eng miteinander verwoben sind. Ein ganzheitlicher Blick bleibt daher unerlässlich, um Lernprozesse angemessen zu verstehen und zu gestalten, weswegen in dieser Handreichung sich ein abschließendes Kapitel der Verzahnung der prozessbezogenen Kompetenzen widmet.

Der Schwerpunkt dieser Handreichung liegt bewusst auf der Gestaltung von Lerngelegenheiten. Fragen der Leistungsbewertung werden daher ausgeklammert, da zunächst aufgezeigt werden soll, wie prozessbezogene Kompetenzen im Unterricht überhaupt sichtbar gemacht und gezielt angeregt werden können.

Die nachfolgenden Kapitel orientieren sich in ihrer Struktur an dem auf Seite 4 dargestellten Plakat *Das machen wir in Mathe*. Die Kapitelüberschriften sind dabei bewusst aus der Perspektive von Lehrkräften formuliert und greifen nicht die kindgerechten Formulierungen des Plakats auf. Dadurch wird eine fachlich orientierte Strukturierung ermöglicht, während gleichzeitig die Verbindung zu den zentralen Inhalten des Plakats erhalten bleibt.

1 Darstellen

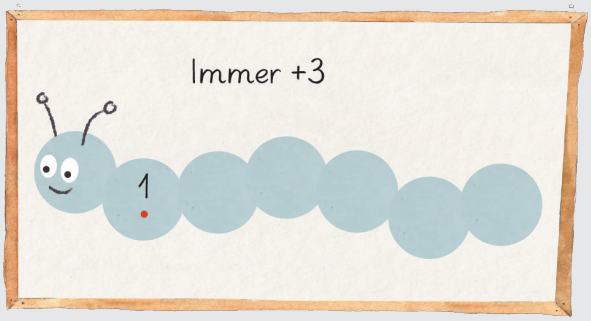
Darstellungen sind Kindern aus verschiedenen Bereichen ihrer Lebenswelt bekannt: Bereits früh zeichnen sie etwa Bilder, mit denen sie ihre Ideen ausdrücken und etwas auf eine bestimmte Weise festhalten. Auch begegnen ihnen im Alltag immer wieder Grafiken, denen sie bestimmte Informationen entnehmen müssen (z. B. in Bilderbüchern und auf Plakaten). Darstellungen können auf diese Weise die Kreativität anregen und das Verständnis für die Lebenswelt unterstützen. Ebenso bedeutsam sind Darstellungen für einen verstehensorientierten Mathematikunterricht.

Was bedeutet Darstellen im Mathematikunterricht?

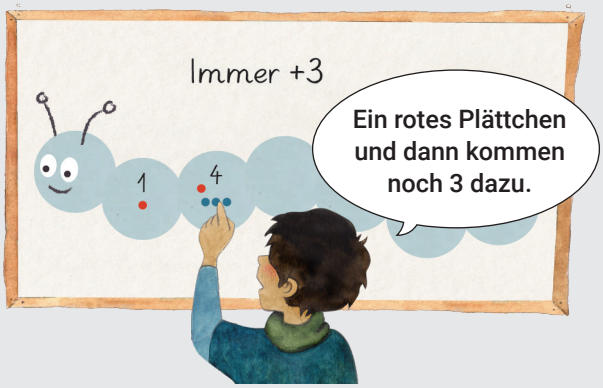
Das Darstellen im Mathematikunterricht nimmt wichtige Funktionen ein: Darstellungen dienen zunächst als Kommunikationsmittel, indem sie mathematische Gedanken, Lösungswege und Zusammenhänge sichtbar und nachvollziehbar machen. Zudem unterstützen sie die Veranschaulichung mathematischer Inhalte. Darüber hinaus können mathematische Inhalte durch bzw. über Darstellungen in der Tiefe durchdrungen werden – sie sind somit auch ein wichtiges Erkenntnismittel (Krauthausen, 2018). Der Einsatz von und das Gespräch über mathematische Darstellungen, die auch unterschiedlich gedeutet werden können, ist daher für einen verstehensorientierten Mathematikunterricht zentral, wie das folgende Unterrichtsbeispiel illustriert. Dabei wird zunächst die Funktion der Veranschaulichung mathematischer Inhalte anhand des Beispiels verdeutlicht. In der anschließenden Auseinandersetzung werden weitere Funktionen mathematischer Darstellungen herausgearbeitet.

UNTERRICHTSBEISPIEL: ZAHLENRAUPEN

In einer Lerngruppe der Schuleingangsphase wird das Aufgabenformat *Zahlenraupen* eingesetzt, um das Verständnis für Zahl- und Aufgabenbeziehungen zu vertiefen. Zahlenraupen beginnen stets mit einer Startzahl, zu der von Feld zu Feld die entsprechende Pluszahl addiert werden muss und die schließlich in einer Zielzahl endet. Der Arbeitsauftrag an die Lernenden lautet: „Wie geht es in der Zahlenraupe weiter?“



Um das Aufgabenverständnis für alle Kinder zu sichern, regt die Lehrkraft dazu an, Plättchen in die Zahlenraupe zu legen und dies sprachlich zu begleiten. Matteo legt daraufhin ein rotes und drei blaue Plättchen in das zweite Feld:

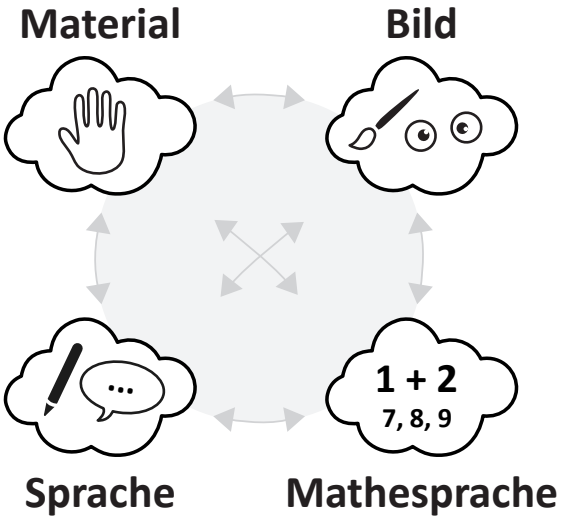


Die Plättchen dienen hier einerseits dazu, die Aufgabenvorschrift tiefer zu durchdringen und Beziehungen zwischen zwei Feldern in den Blick zu nehmen. Andererseits ermöglichen sie es Matteo auch, über die Zahlenraupe zu sprechen und ihre Entdeckungen zu versprachlichen. Der Ausdruck „drei kommen noch dazu“ greift hierbei die Darstellung gezielt auf und kann so wiederum andere Lernende beim Verstehen unterstützen.

Warum Darstellen im Mathematikunterricht?

Darstellungen ermöglichen es den Lernenden, zu vertieften Einsichten in mathematische Muster und Strukturen zu gelangen. Daher sollten sie immer wieder und gezielt eingesetzt werden. Mathematische Symbolsprache (z. B. in Form von Additionsaufgaben wie 1 + 3 = 4) ist allein oftmals nicht geeignet, um die Lernenden beim Aufbau von Vorstellungen zu unterstützen, zumal entsprechende Aufgaben dann häufig meist nur zählend gelöst werden (Gaidoschik, 2015; Wartha & Schulz, 2013). Erst wenn weitere Darstellungen hinzugezogen

und Zusammenhänge explizit thematisiert werden – z. B. indem Addition als *Hinzufügen, Zusammenfassen* oder *Vergleichen* anschaulich gemacht wird –, können inhaltlich tragfähige Vorstellungen aufgebaut und vertieft werden.
Es lassen sich vier Formen mathematischer Darstellungen ausmachen: *Bilder, Handlungen, Sprache* und *Mathesprache.* Mathematische Objekte können in jeder dieser vier Formen dargestellt werden (Kuhnke, 2013).



Eine Darstellung in eine andere überführen zu können, ist eine wichtige Fähigkeit, die Lernende im Verlauf des Mathematikunterrichts erwerben sollten. Doch nicht allein diese Darstellungswechsel, sondern die Vernetzung von Darstellungen spielt für den Vorstellungsaufbau eine zentrale Rolle (Kuhnke, 2013; Prediger, 2019). Indem die Lernenden aushandeln, inwiefern Darstellungen zueinander passen oder auch nicht (also Gemeinsamkeiten und Unterschiede in Darstellungen aushandeln lernen), gelangen sie zu einem vernetzenden Wissen und tragfähigen Vorstellungen. In diesem Zusammenhang wird deutlich, wie wichtig das Gespräch über und durch Darstellungen im Mathematikunterricht ist. Denn wenn Lernende etwa ihre Entdeckungen für andere Kinder aufbereiten und nachvollziehbar erklären, müssen sie ihre eigenen Deutungen klären, Beziehungen zwischen Darstellungen herausarbeiten und diese für andere verständlich machen.

Darstellen herausfordern und unterstützen

Damit das Darstellen zu einem selbstverständlichen Bestandteil mathematischer Lernprozesse wird, benötigen Lernende Unterstützung sowie Gelegenheiten, Darstellungen beim Erkunden, Lösen und Kommunizieren mathematischer Inhalte einzubeziehen. Der Rückgriff auf Materialien und andere Darstellungsformen kann Kinder dabei unterstützen, mathematische Einsichten zu gewinnen, Zusammenhänge zu erkennen sowie Wissen zunehmend zu vernetzen und zu vertiefen. Dies eröffnet sowohl leistungsschwächeren als auch leistungsstärkeren Lernenden Zugänge zum mathematischen Denken.

Darstellen herausfordern – Darstellungsanlässe bieten

Lernende nutzen nicht notwendigerweise von selbst Darstellungen, um Zusammenhänge tiefer zu durchdringen oder ihr Vorgehen zu beschreiben. Wichtig hierfür ist die Einbindung von vielfältigen Darstellungen (z. B. am Rechenstrich; visualisierte Handlung an Würfelmaterial). Daher sollten Lernende immer wieder dazu angeregt werden, auf zusätzliche Darstellungen zurückzugreifen – dies gilt nicht nur für leistungsschwächere, sondern für alle Lernenden.
Doch auch beim Erklären sollten die Lernenden auf Darstellungen zurückgreifen. Die eigenen Einsichten mit Darstellungen aufzubereiten, erfüllt hierbei gleich mehrere Funktionen: Einerseits können sich die Kinder auf diese Weise in mathematischen Gesprächen austauschen und die Denkweisen anderer nachvollziehen, andererseits vernetzen und reflektieren Lernende beim Erklären ebenfalls ihren eigenen Erkenntnisprozess erneut. Sie sollten daher im Mathematikunterricht auch dazu angeregt werden, Darstellungen in mathematischen Erklärungen mit einzubeziehen (siehe hierzu auch die Kapitel *Kommunizieren* und *Argumentieren).*

Darstellen unterstützen – Didaktische Materialien einbeziehen

Didaktischen Materialien kommt im mathematischen Verstehensprozess eine zentrale Rolle zu. Denn die relevanten mathematischen Vorstellungsbilder können oftmals erst dann entwickelt werden, wenn Bedeutungen anhand von konkreten Anschauungsmaterialien ausgehandelt werden. Je nach Gegenstand sind bestimmte Materialien und Nutzungsweisen besonders zentral und sollten im Unterricht stärker fokussiert werden:
Beispielsweise ermöglicht Würfelmaterial – auch

„Dienes-Material“ genannt – die verstehensorientierte Erarbeitung der dekadischen Struktur des Stellenwertsystems. Andererseits ist die Materialhandlung des Hinzulegens ein wichtiges Element in der Entwicklung der additiven Grundvorstellung Hinzufügen. Wie diese Materialhandlung im Kontext der Zahlenraupen umgesetzt werden kann, wird in der nachfolgenden Fortsetzung des Unterrichtsbeispiels deutlich.



Hinweise zu Materialien und deren Einsatz im Mathematikunterricht finden Sie unter: pikas.dzlm.de/node/2696 und mahiko.dzlm.de/node/59

UNTERRICHTSBEISPIEL: ZAHLENRAUPEN

Anhand von Plättchen wurde, wie eingangs dargestellt, in der Lerngruppe ein Zugang zur Aufgabenvorschrift der Zahlenraupen eröffnet. Konzeptuell zentral für das Verständnis der Zahlenraupen ist hierbei die Vorstellung der Addition als *Hinzukommen*. Die Aufgabenvorschrift „immer + 3“ ist daher nicht selbsterklärend und sollte gezielt zum Thema gemacht werden. Die Lehrkraft fordert daher dazu auf, die Bedeutung von „immer + 3“ in eigenen Worten zu erklären. Yusuf sagt:



Die Auseinandersetzung mit den Zahlenraupen kann somit nicht nur das Ziel verfolgen, dass Lernende Entdeckungen an diesen sammeln können: Durch geeignete Darstellungen und eine passende sprachliche Begleitung können die Lernenden Vorstellungsbilder zur Addition entwickeln, welche auch für die weitere Arbeit im Mathematikunterricht zentral sind.

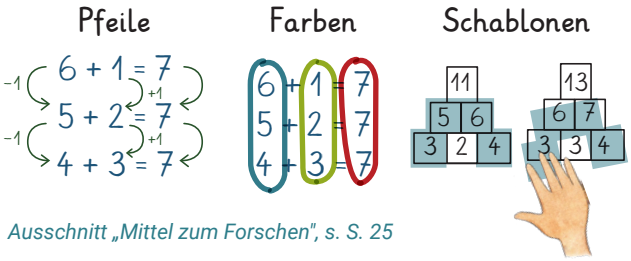
In der Vorbereitung des eigenen Unterrichts kann und sollte daher der gezielte Einsatz von didaktischen Materialien fokussiert werden.

TIPPS FÜR DEN UNTERRICHT

- Den Einsatz von Materialien und Materialhandlungen gezielt planen: Was ist für den jeweiligen Unterrichtsgegenstand zentral?
- Materialhandlungen sprachlich begleiten und das Sprechen über Darstellungen immer wieder aktiv einfordern
- Den Wechsel von und die Vernetzung zwischen Darstellungen immer wieder einfordern

Darstellen unterstützen – Mittel zum Forschen einbeziehen

Neben didaktischen Materialien sind auch weitere Darstellungen im Mathematikunterricht bedeutsam. Markierungen wie farbliche Umkreisungen oder Darstellungen mit Pfeilen, aber auch Veranschaulichungen in Form von Tabellen und Schablonen können zur Erarbeitung und Verdeutlichung mathematischer Einsichten genutzt werden (siehe auch Kapitel Problemlösen):



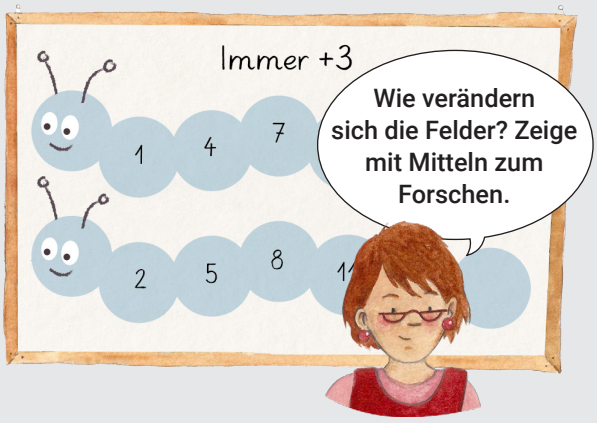
Ausschnitt „Mittel zum Forschen“, s. S. 25

Auch diese Mittel zum Forschen können hierbei verschiedene Funktionen einnehmen: Einerseits sind sie ein Instrument, indem mit ihnen bspw. die Aufmerksamkeit mittels Schablonen auf bestimmte Teilbereiche gelenkt oder zentrale Zusammenhänge zwischen verschiedenen Darstellungen mit Pfeilen hergestellt werden. Zugleich sind Mittel zum Forschen auch eine wichtige Denk- und Gesprächsgrundlage, etwa wenn sie beim Kommunizieren oder Argumentieren hinzugezogen werden. Die Übersicht über die Mittel zum Forschen kann auch mit den Lernenden bewusst zum Thema gemacht werden. Auf diese Weise kann dazu beigetragen werden, dass das Darstellen zu einem integralen Bestandteil des Mathematikunterrichts werden kann. Die Lernenden können sich somit bewusst mit dem mathematischen Darstellen auseinandersetzen. Auch die Lehrkraft kann immer wieder bewusst zum Einbezug der Mittel zum Forschen anregen und sprachlich auf das Plakat verweisen (siehe dazu das Kapitel *Problemlösen*).

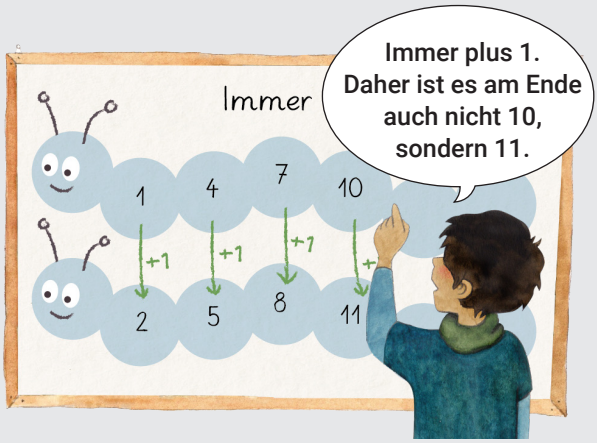
Wie Mittel zum Forschen im Unterricht einbezogen werden können, um Zusammenhänge tiefer zu durchdringen und zu vernetzen, wird im folgenden Unterrichtsbeispiel deutlich.

UNTERRICHTSBEISPIEL: ZAHLENRAUPEN

Im weiteren Verlauf der Unterrichtseinheit zu den Zahlenraupen nimmt die Lerngruppe Veränderungen an den Zahlenraupen gezielt in den Blick. Um die Zusammenhänge zu durchdringen, regt die Lehrkraft zur Nutzung von Mitteln zum Forschen an:



Matteo markiert die Veränderungen von der oberen zur unteren Zahlenraupe mit Pfeilen. Dadurch kann er seine Aufmerksamkeit auf die wesentlichen Merkmale fokussieren und sich tiefgehend mit den zugrundeliegenden Mustern und Strukturen auseinandersetzen sowie schlussendlich feststellen, dass sich die letzte Zahl ebenfalls um eins erhöht, wenn die Startzahl um eins erhöht wird.



Der Einsatz von Darstellungen bietet für Matteo somit die Chance, dass er sich auf diese in seiner Äußerung beziehen kann. Zugleich können diese alle Lernenden dabei noch weiter unterstützen, den mathematischen Gegenstand in der Tiefe zu durchdringen. Es wird deutlich: Nicht der Einsatz verschiedener Darstellungen allein kann das Verstehen unterstützen – vielmehr sollten die Darstellungen gezielt aufeinander bezogen und miteinander vernetzt werden.

TIPPS FÜR DEN UNTERRICHT

- Darstellungen bewusst zum Unterrichts- und Gesprächsgegenstand machen, z. B. mit dem Plakat *Mittel zum Forschen (https://pikas.dzlm.de/node/556)*
- Darstellungen selbst immer wieder aktiv einbeziehen
- Das Herstellen von Zusammenhängen zwischen Darstellungen (mit Markierungen und Sprache) einfordern

Fazit & Ausblick

Darstellungen sind somit im Mathematikunterricht sowohl Anschauungs- als auch Erkenntnismittel. Lernende können Darstellungen nutzen, um Lösungsprozesse und Erkenntnisse aufzubereiten, zu strukturieren und sich in ihren Erklärungen auf diese zu beziehen. Zugleich kann der Einsatz von Darstellungen im Mathematikunterricht das Verstehen unterstützen und damit zum Aufbau zentraler mathematischer Vorstellungen beitragen. Daher sollten Darstellungen von Anfang an und immer wieder gezielt eingesetzt und so zunehmend zu einem festen Bestandteil des Mathematikunterrichts werden (Götze et al., 2025).

BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Welche Darstellungen wähle ich zu den jeweiligen Inhalten aus, um den Aufbau zentraler mathematischer Vorstellungen zu unterstützen?
- Wie mache ich Darstellungen selbst in meinem Mathematikunterricht zum Thema und wie begleite ich sie sprachlich?
- Wie sorge ich dafür, dass Lernende Gelegenheiten erhalten, verschiedene Darstellungen miteinander in Beziehung zu setzen und zu vernetzen?
- Wie stelle ich sicher, dass Lernende die genutzten Darstellungen verstehen?

2 Kommunizieren

Wenn Kinder im Alltag kommunizieren, erzählen sie, fragen nach, erklären, widersprechen, hören zu und stimmen sich mit anderen ab. Dabei geht es häufig darum, Erlebnisse zu teilen, eigene Gedanken auszudrücken oder gemeinsam etwas zu klären. Auch im Mathematikunterricht sind Gespräche bedeutsam und werden zunehmend fachbezogen geführt. Dabei sprechen die Kinder etwa über Anzahlen, Strukturen, Darstellungen, Aufgaben und Zusammenhänge – ausgehend von zunächst alltagssprachlichen Beschreibungen, die zunehmend durch passende Fachbegriffe erweitert und präzisiert werden (Krauthausen, 2018).

Was bedeutet Kommunizieren im Mathematikunterricht?

Mathematisches Kommunizieren bedeutet also, dass Kinder Mathematikunterricht nicht nur Aufgaben bearbeiten und zu Ergebnissen finden, sondern auch dazu angeleitet werden, über Mathematik zu sprechen. Sie müssen Beobachtungen äußern, Entdeckungen und Lösungswege beschreiben, anderen zuhören und deren Ideen mit den eigenen in Beziehung setzen. So wird Kommunikation selbst zum Lerngegenstand: Die Fähigkeit, mathematische Gespräche zu führen, muss schrittweise aufgebaut, indem Kinder dazu angeregt und sprachlich unterstützt werden. Dabei greifen fachliches und sprachliches Lernen ineinander. Die Lehrkraft schafft Gesprächsanlässe, gibt Impulse und unterstützt die Kinder dabei, zunehmend präziser über mathematische Inhalte zu sprechen (Götze, 2015). So auch im folgenden Unterrichtsbeispiel.

UNTERRICHTSBEISPIEL: WIMMELBILD

In der Kurzaktivität „Wimmelbild – Anzahlen“ aus der Kartei Mathematik am Schulanfang *(pikas.dzlm.de/node/2315;* Karte 26) wird deutlich, dass mathematisches Kommunizieren bereits in den ersten Schulwochen stattfinden kann. Ausgangspunkt ist ein Wimmelbild zu einem Fußballspiel. Die Kinder können darin verschiedene Zahldarstellungen entdecken: Zahlen können als Zahlsymbole sichtbar sein, als Anzahlen erkannt werden oder in anderen Darstellungen, etwa einer Strichliste, vorkommen. Ziel der Übung ist es, solche Darstellungen im Bild zu identifizieren, zu benennen und miteinander in Beziehung zu setzen.

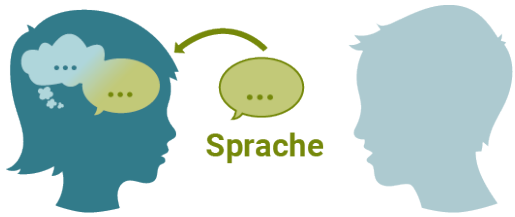


Auf den Impuls können die Kinder sehr unterschiedlich reagieren. Einige benennen zunächst vor allem außermathematische Elemente, etwa „Pokal“ oder „Rot gegen Blau.“ Andere richten den Blick bereits auf Zahldarstellungen und erkennen zum Beispiel Zahlsymbole oder deuten Zeichen im Bild, etwa „:“ als „zu“. Wieder andere beschreiben Beziehungen: Eine Aussage wie „Gelb ist auf dem ersten Platz“ verweist auf den Ordinalzahlaspekt, während „Drei blaue und drei rote Kinder. Also sechs.“ zeigt, dass Anzahlen erfasst und miteinander verknüpft werden.

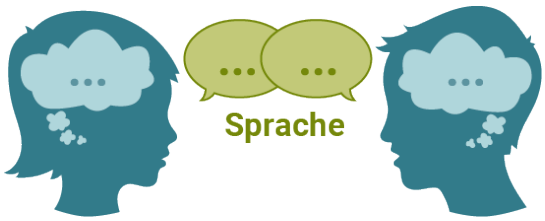
An diese unterschiedlichen Beiträge kann die Lehrkraft anknüpfen. Durch gezielte Nachfragen und Impulse, wie zum Beispiel „Wie kannst du zeigen, dass es drei blaue und drei rote Kinder sind?“, lenkt sie den Blick zunehmend auf mathematische Aspekte wie Anzahlen, Positionen und Zahldarstellungen. So werden die zunächst offenen Bildbeschreibungen fachlich weitergeführt und von Beginn an für mathematisches Kommunizieren nutzbar gemacht.

Warum Kommunizieren im Mathematikunterricht?

Kinder profitieren vom Kommunizieren im Mathematikunterricht in zweifacher Weise. Zum einen weist Kommunizieren eine *kognitive Funktion* auf: Wenn Kinder Beobachtungen, Lösungswege oder Vermutungen sprachlich ausdrücken, ordnen sie ihre Gedanken, vernetzen Handlungen, Bilder, Zeichen und Zahlen und klären Fachbegriffe bedeutungsbezogen (Prediger & Vogel, 2024).



Zum anderen ist mit dem Kommunizieren eine *kommunikative Funktion* verbunden: Kinder machen ihre Ideen für andere nachvollziehbar, hören unterschiedliche Sichtweisen und entwickeln mathematische Deutungen im Austausch gemeinsam weiter (Maier & Schweiger, 1999).



Mathematik ist damit kein spracharmes Fach, in dem Sprache lediglich zur Benennung von Ergebnissen oder zum Auswendiglernen einzelner Fachbegriffe genutzt wird. Vielmehr ist Sprache ein zentrales Mittel, um mathematische Vorstellungen aufzubauen, Darstellungen miteinander zu vernetzen und Zusammenhänge bedeutungsbezogen zu klären.

Kommunizieren herausfordern und unterstützen

Mathematisches Kommunizieren entsteht nicht automatisch. Auch Beobachtungen und Entdeckungen äußern Kinder meist erst dann, wenn sie durch geeignete Impulse immer wieder zum genauen Hinschauen, Beschreiben und Vergleichen angeregt werden. Dabei bleiben ihre Äußerungen zunächst häufig auf einer alltagssprachlichen oder beschreibenden Ebene. Damit Gespräche fachlich tragfähig werden, braucht es eine klare Rahmung durch die Lehrkraft: Aufgaben und Impulse müssen mathematische Gespräche herausfordern und zugleich so unterstützen, dass alle Kinder daran teilnehmen können (Schwarzkopf, 2019).

Kommunizieren herausfordern – Zwischen Lehrkraft und Kindern sowie unter Kindern

Damit mathematisches Kommunizieren gelingt, muss die Lehrkraft ihre Rolle in den jeweiligen Unterrichtsphasen bewusst gestalten. In einer gemeinsamen Einstiegsphase – so auch im vorangegangenen Unterrichtsbeispiel – ist sie häufig stärker steuernd eingebunden: Sie eröffnet Gesprächsanlässe, moderiert Beiträge, stellt gezielte Nachfragen und unterstützt die Kinder dabei, ihre Äußerungen auf mathematische Aspekte zu beziehen. Dabei wirkt sie zugleich als Sprachvorbild, indem sie Formulierungen aufgreift, ordnet und fachlich präzisiert.

In anschließenden Arbeits- oder Austauschphasen verändert sich diese Rolle. Die Lehrkraft tritt stärker in den Hintergrund und gibt den Kindern Raum, selbst miteinander ins Gespräch zu kommen. Sie überlegt dabei, wie der Austausch so angeregt und fokussiert werden kann, dass Gespräche zeitweise auch ohne direkte Steuerung weitergeführt werden. Unterstützend begleitet sie die Kinder etwa durch Impulse zum Weiterdenken, Nachfragen oder Vergleichen. So wird Kommunikation nicht nur zwischen Lehrkraft und Kindern geführt, sondern zunehmend auch unter den Kindern angeregt.

Als Grundlage für mathematische Gespräche braucht es somit zweierlei: geeignete Gesprächsanlässe, zu denen Kinder mathematische Gedanken äußern können, und eine Lehrkraft, die ihre Rolle bewusst gestaltet.

Kommunizieren unterstützen – Darstellungen vernetzen und Beschreibungen präzisieren

Eine Grundlage für mathematische Gespräche zu schaffen ist notwendig, aber noch nicht hinreichend. Damit Kinder ihre Beobachtungen und Deutungen für andere nachvollziehbar ausdrücken können, brauchen sie gezielte Unterstützung. Gewinnbringend wird der Austausch besonders dann, wenn er über das reine Beschreiben hinausgeht: Die Kinder zeigen im Bild, worauf sie sich beziehen, legen Anzahlen mit Material nach, vergleichen unterschiedliche Deutungen oder arbeiten den mathematischen Zusammenhang ihrer Entdeckung heraus.

In Bezug auf die skizzierte Unterrichtssituation kann die Vernetzung von Darstellungen und der Einbezug von Mitteln zum Forschen (Sundermann & Selter, 1995) besonders unterstützen.

UNTERRICHTSBEISPIEL: WIMMELBILD



Sören stellt fest, dass Rot mehr Tore als Grün geschossen hat. Dies ist zutreffend, bietet jedoch Spielraum für weitere Konkretisierungen. Die beiden nachstehenden Impulse können Sören dabei unterstützen, die Aussage genauer zu fassen. Wenn er markiert, wo er die Zahlen genau erkennt, kann der Bezug auf konkrete Zahldarstellungen gestärkt werden. Das Nachlegen mit Plättchen bietet zudem die Möglichkeit, die Aussage „mehr Tore als“ anschaulich zu prüfen und für andere nachvollziehbar zu machen.

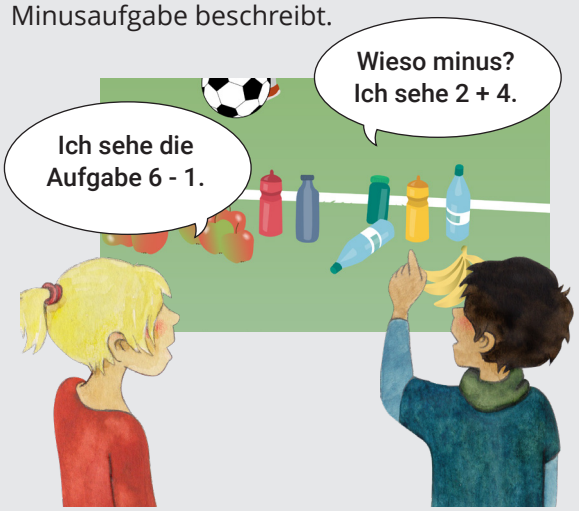
Darstellungen dienen damit nicht nur der Veranschaulichung, sondern auch als gemeinsame Gesprächsgrundlage: Sie helfen, eigene Gedanken zu klären, Aussagen anderer nachzuvollziehen und Beschreibungen genauer zu fassen. In Verbindung mit einem gemeinsam aufgebauten Sprachspeicher können solche Darstellungen zudem dazu beitragen, passende Begriffe und Formulierungen für wiederkehrende mathematische Situationen verfügbar zu machen.

Kommunizieren unterstützen – Beschreibungen diskutieren und weiterentwickeln

Mathematische Beschreibungen zu unterstützen, heißt nicht nur, einzelne Aussagen zu präzisieren. Ebenso wichtig ist es, verschiedene Beschreibungen gegenüberzustellen und gemeinsam weiterzuentwickeln – im Plenum ebenso wie in Phasen, in denen Kinder miteinander arbeiten.

UNTERRICHTSBEISPIEL: WIMMELBILD

Milo entdeckt im Wimmelbild die Trinkflaschen und verbindet diese mit der Aufgabe 2 + 4. Für ihn steht die räumliche Anordnung im Vordergrund: Zwei Flaschen stehen links, vier weitere etwas weiter rechts. Dass eine hellblaue Flasche auf dem Boden liegt, spielt für seine Beschreibung zunächst keine Rolle.
Für Kimya scheint genau dieser Aspekt bedeutsam zu sein. Sie verbindet dieselbe Situation mit der Aufgabe 6 − 1: Insgesamt sind sechs Flaschen zu sehen, eine davon liegt auf dem Boden. Für Milo ist diese Deutung zunächst nicht naheliegend, da er die Situation nicht als Minusaufgabe beschreibt.



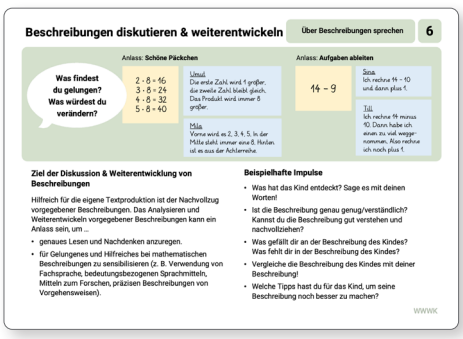
Die Lehrkraft nimmt das Gespräch wahr und überlegt, wie sie den mathematischen Austausch unterstützen kann, ohne ihn selbst zu dominieren. Ziel ist es, die unterschiedlichen Deutungen sichtbar zu machen und die Kinder dabei zu unterstützen, die jeweils andere Sichtweise nachzuvollziehen, indem die Beschreibungen diskutiert werden. Dazu können erneut Mittel zum Forschen genutzt werden: Die Kinder zeigen und markieren im Bild, welche Zahlen sie sehen und worauf sich ihre jeweilige Deutung bezieht. Anschließend prüfen sie gemeinsam, ob beide Beschreibungen zur

Situation passen können und wodurch sie sich unterscheiden.
Die Lehrkraft unterstützt diesen Prozess durch Impulse zum Zeigen („Markiere auf dem Bild, wo du die Zahlen sehen kannst.“), Vergleichen („Können beide Aufgaben zum Bild passen?“) und Nachvollziehen („Lege die passende Minusaufgabe mit Plättchen. Erkläre, wieso die Aufgabe zum Bild passt.“), ohne die Deutung vorschnell aufzulösen.

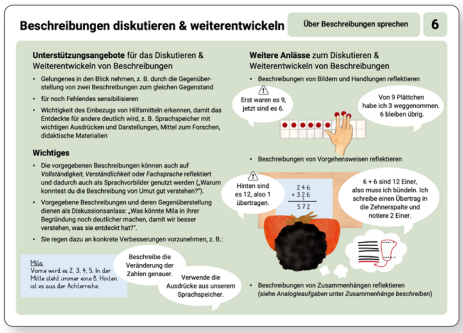
Das Wimmelbild-Unterrichtsbeispiel zeigt exemplarisch, wie unterschiedliche Beschreibungen zum Gesprächsanlass werden können. Solche Anlässe sind jedoch nicht auf dieses Beispiel beschränkt. Auch bei anderen Inhalten des Mathematikunterrichts kann es hilfreich sein, Beschreibungen gegenüberzustellen, auf Verständlichkeit zu prüfen und gemeinsam weiterzuentwickeln.

TIPPS FÜR DEN UNTERRICHT
ÜBER BESCHREIBUNGEN SPRECHEN

Die Kartei *Was? Wie? Warum? (pikas.dzlm.de/node/2684)* bietet übergreifende Ideen und Impulse, mit denen mathematisches Kommunizieren in unterschiedlichen Unterrichtssituationen angeregt und unterstützt werden kann. Die Beispiele auf den Karten können daher jeweils auf den konkreten mathematischen Inhalt, die Lerngruppe und die jeweilige Gesprächssituation übertragen werden.
Für den Bereich *Über Beschreibungen sprechen* bietet Karte 6 *Beschreibungen diskutieren & weiterentwickeln* passende Impulse, um Beschreibungen zu vergleichen, zu prüfen und gemeinsam weiterzuentwickeln. Dazu bietet die Karte beispielhafte Impulse, etwa zur Verständlichkeit, Genauigkeit und Nachvollziehbarkeit von Beschreibungen.



Die Rückseite der Karte enthält weitere Unterstützungsangebote. Sie macht deutlich, dass Beschreibungen unter anderem auf Vollständigkeit, Verständlichkeit und Fachsprache geprüft werden können. Außerdem wird angeregt, gelungene Aspekte hervorzuheben, Fehlendes sichtbar zu machen und Hilfsmittel wie Sprachspeicher, Mittel zum Forschen oder didaktisches Material einzubeziehen. So werden Beschreibungen selbst zum Gesprächsanlass und können gemeinsam fachlich und sprachlich weiterentwickelt werden.



Fazit & Ausblick

Kommunizieren sollte fester Bestandteil des Mathematikunterrichts sein. Mathematische Gespräche ermöglichen es, Ideen sichtbar zu machen, Darstellungen miteinander zu vernetzen und voneinander zu lernen. Dabei steht Kommunizieren nicht isoliert neben anderen prozessbezogenen Kompetenzen: Wer beschreibt, zeigt und erklärt, nutzt Darstellungen. Wer Rückfragen stellt und Aussagen prüft, bereitet Argumentieren vor. Entscheidend ist, dass die Lehrkraft mathematische Gespräche gezielt anregt, sprachlich unterstützt und gemeinsam mit den Kindern weiterentwickelt.

BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Wie rege ich mathematische Gespräche gezielt an, statt nur Ergebnisse abzufragen?
- Wie unterstütze ich Kinder dabei, Entdeckungen nachvollziehbar zu beschreiben?
- Welche Darstellungen, Sprachspeicher und Fachwörter wähle ich aus, damit alle Kinder am Gespräch teilnehmen können?
- In welchen Situationen können Gelegenheiten geschaffen werden, in denen Kinder Beschreibungen anderer nachvollziehen, vergleichen und weiterentwickeln?

3 Argumentieren

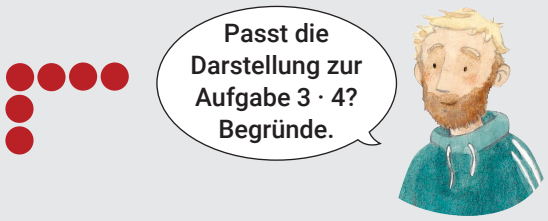
Wenn Kinder im Alltag argumentieren, dann möchten Sie oft etwas erreichen sich durchsetzen oder eine Entscheidung beeinflussen („Das zählt nicht, weil…“; „Das ist nicht gerecht, weil …“; „Meine Lehrerin macht das auch so.“). Solche Äußerungen können erste Ansätze des Argumentierens darstellen und stützen sich auf persönliche Erfahrungen, Gefühle oder einzelne Beispiele – und sie können in einer Situation durchaus passend sein. Denn die Kinder können so die eigenen Meinungen und Gedanken ausdrücken und auch mit anderen in den Austausch treten.

Was bedeutet Argumentieren im Mathematikunterricht?

Im Mathematikunterricht wird das alltagsbezogene Argumentieren aufgegriffen und fachbezogen weiterentwickelt: Es geht darum, mathematische Muster, Strukturen und Zusammenhänge zu beschreiben, zu begründen und zu überprüfen, sodass Aufgaben und Verfahren nicht unverstanden ausgeführt, sondern diese auch durchdrungen werden. Das Argumentieren umfasst dabei die Tätigkeiten Beschreiben, Vermuten, Begründen und Überprüfen (Brunner, 2019). Diese sind nicht linear abzuarbeiten und müssen auch nicht in jeglichen Aufgaben adressiert werden. Bleiben diese Bereiche im Rahmen von Aktivitäten jedoch gänzlich unberücksichtigt, verengt sich Mathematiklernen leicht auf inhaltsbezogene Aspekte, die zwar wichtig, für tiefes Verständnis jedoch nicht hinreichend sind (Selter & Zannetin, 2018). Das nachstehende Beispiel illustriert dies anhand der Einführung der Multiplikation.

UNTERRICHTSBEISPIEL: MARIE ARGUMENTIERT

Bei der Einführung der Multiplikation im zweiten Schuljahr ist es für den weiteren produktiven Umgang mit Multiplikationsaufgaben unerlässlich, ein Verständnis zur Operation zu entwickeln. Dieses umfasst einerseits, mit Lernenden die mathematische Bedeutung des im Alltag nicht immer eindeutig genutzten Ausdrucks „mal“ zu thematisieren. Andererseits müssen dabei entsprechende Darstellungen und sprachliche Mittel entwickelt werden, die die Bedeutung der multiplikativen Strukturen transportieren (Gaidoschik, 2022). Um dieses Ziel zu erreichen, kann etwa eine Plättchendarstellung vorgegeben und eine (potenzielle) Passung zu einer symbolischen Multiplikationsaufgabe erfragt werden.



Die Plättchendarstellung liefert einen (unvollständigen) Rahmen mit drei Plättchen nach unten sowie vier Plättchen zur Seite. Es kann vermutet werden, dass die Plättchendarstellung die Aufgabe 3 · 4 repräsentiert. Da das Produkt (12) sowie die die Anzahl der Gruppen (3) sowie die Gruppengröße (4) offenkundig jedoch nicht in der Darstellung ablesbar sind, liegt keine passende Darstellung vor. Die Lernenden werden nicht nur herausgefordert, anzugeben, ob die Darstellungen zueinander passen, sondern auch, warum (nicht).

Warum Argumentieren im Mathematikunterricht?

Wenngleich Kinder außermathematisch argumentieren, ist es ein wohlbekanntes Phänomen, dass Lernende oft kein eigenes Bedürfnis zur Argumentation von Zusammenhängen im Mathematikunterricht erkennen lassen – insbesondere dann, wenn eine Argumentation in der jeweiligen Aufgabe nicht explizit eingefordert wird. Es bedarf somit einer Haltung auf Seiten der Lernenden, Aussagen und Zusammenhänge konsequent hinterfragen zu wollen. Diese Haltung zeigt sich etwa daran, dass Kinder nachfragen (z. B. „Woran sieht man das?“), Begründungen einfordern (z. B. „Warum gilt das?“) und Ergebnisse nicht einfach übernehmen, sondern prüfen.

Ist eine solche Haltung entwickelt, ist die Grundlage für einen produktiven Austausch im Klassenzimmer gegeben. Schließlich ist mit dem Argumentieren zugleich eine individuelle und soziale Komponente untrennbar verbunden: Etwa bezogen auf das illustrierte Unterrichtsbeispiel sollen die Lernenden nicht nur sich selbst davon überzeugen, dass die Darstellungen so nicht zueinan-

der passen – sie sollen auch ihre Mitschüler:innen durch entsprechende Argumentationen überzeugen (können). Dies schließt auch ein, miteinander sowie gegeneinander zu argumentieren, flexibel auf verschiedene Argumente zu reagieren und Argumente anderer in Beziehung zu den eigenen zu setzen. Für den Unterricht beutetet das, Beiträge aufzugreifen, zu hinterfragen, weiterzuführen und gemeinsam zu klären, welche Begründung tragfähig ist.

Argumentieren herausfordern und unterstützen

Mathematisches Argumentieren stellt für viele Kinder eine besondere Herausforderung dar, weil sie ihre Zusammenhänge nicht nur äußern, sondern auch so begründen müssen, dass andere Kinder und die Lehrkraft sie nachvollziehen und einordnen können. Damit das gelingt, braucht es eine klare Rahmung durch die Lehrkraft. Dies kann durch Aufgaben unterstützt werden, die zum Argumentieren anregen und entsprechende Denkprozesse eröffnen. Ergänzend bieten gezielte, zum jeweiligen Unterrichtsgegenstand passende Impulse den Kindern konkrete Anknüpfungspunkte für das Begründen (Selter & Zannetin, 2018).

Argumentieren herausfordern – Argumentationsanlässe anbieten

Da Lernende häufig nicht *von sich aus* in den Diskurs treten, bedarf es somit zielgerichteter Anlässe, die Argumentationen von Kindern *herausfordern.* Diese können bereits dadurch geschaffen werden, dass Vermutungen eingefordert werden. Es kann aber auch ein (gezielt herbeigeführter) Klärungsbedarf geschaffen und mit einer provokativen These verbunden werden, die zum Argumentieren anregt (Winter, 1983; Mayer; 2019). So auch im Unterrichtsbeispiel:

Marie verneint die Frage nach der Passung der Plättchendarstellung zur Aufgabe 3 · 4 und begründet ihre Aussage durch das Denken in gleich großen Gruppen (Lamon, 1994). Aus ihrer Sicht könne man aus den vorgegebenen Plättchen „nicht 3 Vierer machen", was zutreffend ist. Um jedoch eine noch tiefere Begründung einzufordern, bittet die Lehrkraft Marie darum, dies an den Plättchen zu zeigen.
Marie legt die Plättchen so um, dass sie zunächst einen Vierer – angeordnet als Würfelvier – erzeugt und rechts daneben zwei weitere Plättchen vertikal übereinanderlegt. Begleitend deutet sie auf den Bereich rechts neben den gelegten Plättchen und sagt:



Argumentieren unterstützen – Bausteine guter Argumentationen klären

Argumentationsanlässe anzubieten, ist notwendig, alleine jedoch nicht hinreichend. Denn es ist nicht garantiert, dass Lernende diese Anlässe bereits mit tragfähigen Begründungen füllen – selbst wenn Aufgaben ein hohes Argumentationspotenzial bieten. Deshalb ist es hilfreich, frühzeitig gemeinsam zu erarbeiten, was im Mathematikunterricht ein gutes Argument sein kann – und was nicht ausreicht. Diese Klärung schafft eine gemeinsame Grundlage, auf der die Lerngruppe Schritt für Schritt ein gemeinsames Verständnis dafür entwickeln kann, was mathematisches Argumentieren ausmacht.

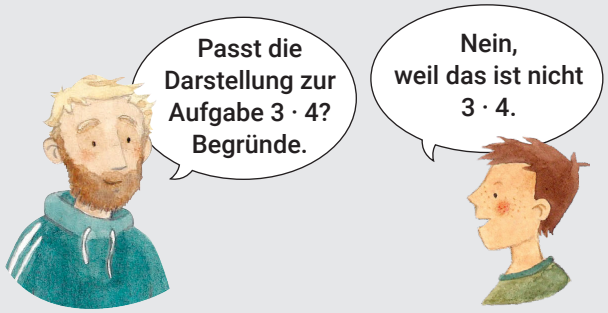
UNTERRICHTSBEISPIEL: MARIE ARGUMENTIERT



UNTERRICHTSBEISPIEL: MARIE ARGUMENTIERT



Mia ist der Meinung, dass eine Passung zwischen Plättchendarstellung und Aufgabe vorliegt. Und sie begründet auch – jedoch über die Anzahl der in der ersten Spalte bzw. der ersten Zeile vorliegenden Plättchen. Diese Argumentation deutet auf Schwierigkeiten beim Multiplikationsverständnis hin.



Tom ist wie Marie der Meinung, dass die Darstellung nicht zu der Malaufgabe passt. Auf den ersten Blick mag der Ausdruck „Nein, weil …“ vielversprechend wirken, zumal Argumentationen häufig mit „weil“ eingeleitet werden. Allerdings formuliert Tom nachfolgend kein Argument, das die Aussage wirklich stützt. An beiden Äußerungen zeigt sich, dass nicht jede Begründung und auch nicht jedes „weil“ automatisch ein mathematisches Argument ergibt. Gerade deshalb kann es im Unterricht hilfreich sein, mit den Lernenden explizit zu klären, was ein gutes mathematisches Argument ausmacht. Bezogen auf die Multiplikation sind insbesondere solche Begründungen tragfähig, die sich auf das Denken in gleich großen Gruppen stützen und über die Gruppensprechweise versprachlicht werden.

Das tragfähige mathematische Argumentieren sollte somit selbst auch Ziel des Mathematikunterrichts sein, sodass sich die Frage nach zielgerichteter *Unterstützung* aufdrängt. Die exemplarisch vorgestellten Argumentationsansätze der Lernenden zeigen dabei, dass Schwierigkeiten unterschiedlicher Natur sein können und es daher sicherlich nicht die eine hilfreiche und zugleich wirksame Unterstützungsmaßnahme geben kann. Gleichwohl können sich bestimmte Impulse anbieten, um Argumentationsprozesse zu unterstützen, die allerdings je nach Anlass noch weiter ausdifferenziert werden müssen.

So kann die Schülerin Mia aus dem Unterrichtsbeispiel von einem Impuls profitieren, der einen Vergleich zwischen ihrer Argumentation sowie den Argumentationen anderer Kinder (etwa von Marie) fokussiert, wodurch die soziale und kommunikative Funktion des Argumentierens deutlich wird (Fetzer 2015; Nührenbörger & Schwarzkopf, 2019):



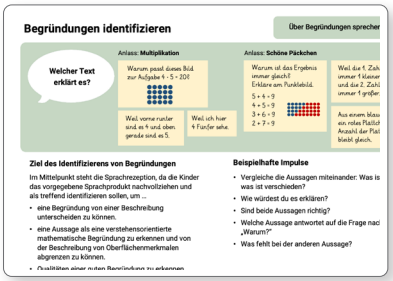
So könnte Mia angeregt werden, nach Gleichem und Verschiedenem der Argumentationen zu suchen und etwa zu ergründen, welche Argumentation aus welchen Gründen passend erscheint. Schließlich haben Mia und Marie die Frage der Passung unterschiedlich beantwortet oder unterschiedlich begründet: Während Marie die Passung über das (tragfähige) Denken in Gruppen am Plättchenbild argumentiert, ist für Mia lediglich die Anzahl der Plättchen in der ersten Spalte bzw. Zeile entscheidend.

Tom könnte hingegen von einem Impuls profitieren, der ihm aufzeigt, was eine Argumentation ausmacht – und was noch nicht, denn seine Aussage ist eher beschreibender statt argumentativer Natur. Impulse, wie „Woran kannst du erkennen, dass es (nicht) zusammenpasst?“ oder (konkreter auf die Darstellung bezogen) „Zeige mir am Plättchenbild, warum es (nicht) passt.“ könnten ihn herausfordern, die Darstellungen zu vernetzen, statt lediglich die Entscheidung zur Passung zu formulieren.

TIPPS FÜR DEN UNTERRICHT – BEGRÜNDUNGEN IDENTIFIZIEREN

Um das Argumentieren auch bei anderen Themen herauszufordern und zu unterstützen, liefert die Kartei *Was? Wie? Warum? (https://pikas.dzlm.de/node/2684)* hilfreiche Anregungen. Die Karte 11 *Begründungen identifizieren* zeigt auf der Vorderseite Argumentationsanlässe am Beispiel der Multiplikation und bei Schönen Päckchen. Zu den Anlässen enthält die Karte jeweils zwei Aussagen von Kindern. Es soll jeweils entschieden werden, welche der

vorgegebenen Aussagen Begründungen darstellen und welche lediglich beschreiben. Dadurch sollen die Lernenden zunehmend besser Beschreibungen und Begründungen voneinander abgrenzen. Um diesen Prozess anzustoßen, liefert die Karte unter *Beispielhafte Impulse* Fragen, die nicht nur bei diesen Beispielen, sondern auch bei weiteren Anlässen nutzbar sind.



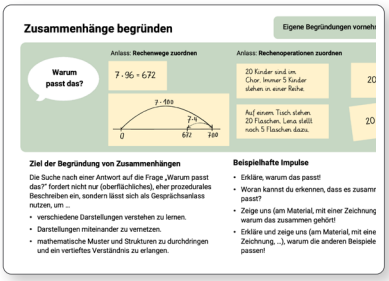
Die Rückseite der Karte enthält weitere Unterstützungsangebote für das Identifizieren von Begründungen, wie etwa der Fokussierung auf Aussagen sowie dem Rückwärtsdenken von Aussagen, indem eine Aussage anhand von Darstellungen aufgefaltet wird. Dies kann potenzielle Widersprüche zwischen der Aussage und dem Anlass offenlegen und so dazu anregen, gegebene Informationen zu hinterfragen und auf diese Weise das Argumentieren selbst zum Thema zu machen.

Argumentieren unterstützen – Darstellungen nutzen, um Zusammenhänge zu begründen

Um Kinder beim mathematischen Argumentieren zu unterstützen, lohnt es sich, konsequent mit Darstellungen zu arbeiten. Sie machen Denkwege sichtbar und bieten eine gemeinsame Grundlage für Gespräche. Erst wenn Kinder am Material handeln, Skizzen einsetzen oder zwischen anschaulicher Darstellung und Aufgabe hin- und herwechseln, können sie Zusammenhänge nicht nur vermuten, sondern nachvollziehbar begründen. So wird aus „Ich glaube, das passt" ein „Ich kann zeigen, warum das passt" – und Begründungen werden für andere überprüfbar.

TIPPS FÜR DEN UNTERRICHT – ZUSAMMENHÄNGE BEGRÜNDEN

Die Karte 8 *Zusammenhänge begründen* aus der Kartei *Was? Wie? Warum? (pikas.dzlm.de/node/2684)* setzt den Fokus auf die Frage „Warum passt das?" – also darauf, dass Kinder begründen, warum eine Aufgabe, eine Situation und/oder eine Aufgabe zusammengehören. Auf der Vorderseite werden dafür konkrete Impulse vorgeschlagen (u.a. „Zeige uns (am Material, mit einer Zeichnung, …)". Dabei soll nicht nur die Passung zweier Darstellungen nachgewiesen werden. Vielmehr soll auch gezeigt werden, warum Darstellungen nicht zueinander passen.



Die Rückseite der Karte nennt als Unterstützung vor allem den Einbezug von Materialhandlungen. Antworten von Lernenden unter Verwendung von Material können besonders gut sichtbar machen, was schon verstanden ist und wo noch Hürden liegen.

Fazit & Ausblick

Insgesamt sollte das Argumentieren nach und nach essenzieller Bestandteil des Mathematikunterrichts werden, um Inhalte überhaupt in der Tiefe durchdringen zu können. Außerdem zeigt sich, dass Argumentieren im Mathematikunterricht selten für sich allein steht, sondern eng mit anderen prozessbezogenen Kompetenzen zusammenhängt. In den hier aufgegriffenen Beispielen geht es etwa darum, ob Aufgabe und Plättchendarstellung zueinander passen. Dabei werden bei den Kindern auch Kompetenzen im Bereich des Darstellens gefördert. Gleichzeitig fördert Argumentieren die Kommunikation über Mathematik: Kinder vergleichen ihre Ideen, prüfen Begründungen gegenseitig und kommen so miteinander ins Gespräch.

BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Wie regelmäßig und auf welche Weise verknüpfe ich die Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten mit dem Argumentieren?
- Inwiefern stelle ich vielfältige Argumentationsanlässe in hinreichendem Maße bereit, um das Argumentieren bei Lernenden herauszufordern?
- Wie unterstütze ich die Lernenden passgenau, damit sie tragfähige Argumentationen entwickeln können?

4 Problemlösen

Spielen Kinder das erste Mal ein neues Gesellschaftsspiel, müssen sie dafür oft nicht nur verstehen, was das Ziel des Spieles ist und ihnen bekannte Spielzüge anwenden, sondern müssen neue Spielstrategien entwickeln, die nicht immer sofort erfolgreich sind, um nach mehreren Versuchen am Ende vielleicht dann doch als Gewinner:in raus zu gehen. Dafür können die Kinder sich zunächst probieren und dann dadurch gesammelte Kenntnisse nutzen, um zunehmend strategisch vorzugehen.

Auch im Mathematikunterricht ist die Lösung einer Aufgabe nicht immer auf den ersten Blick ersichtlich – und das soll sie auch gar nicht sein! Denn für einen verstehensorientierten Mathematikunterricht ist es von Bedeutung, Kinder dabei zu unterstützen, individuelle und auch kreative Vorgehensweisen beim Lösen zu entwickeln. Auf diese Weise können Inhalte tiefer durchdrungen, zentrale Verstehensgrundlagen erworben, sowie eine grundlegende Neugier an mathematischen Problemstellungen geweckt werden. Die für diese Prozesse notwendigen Fähigkeiten im „Problemlösen“ spielen dabei eine bedeutende Rolle (Rathgeb-Schnierer et al., 2023).

Was bedeutet Problemlösen im Mathematikunterricht?

Was unter Problemlösen im Mathematikunterricht verstanden werden kann, wird durch die Gegenüberstellung von Routineaufgaben und Problemlöseaufgaben gut deutlich.

Löse die Aufgaben.

	H	Z	E
	7	3	1
+	2	6	9

	H	Z	E
	1	5	3
+	8	4	7

	H	Z	E
	2	8	4
+	7	1	6

Routineaufgabe

Denn reine *Routineaufgaben* (vgl. Abbildung) erfordern wie hier z.B. zur Lösung die Durchführung eines vorgegebenen Algorithmus, der den Kindern bekannt ist und dessen Anwendung kein „Problem“ für sie darstellt (Dörner, 1976). So gibt es nach Einführung des schriftlichen Algorithmus keine sichtbaren und für die Lernenden „unbekannten“ Hürden, die im Lösungsprozess überwunden werden müssen.

Wie treffen wir die 1000?

Finde möglichst schlau Additionsaufgaben mit der Summe 1000.

		H	Z	E
	+			

○ zu klein ○ zu groß

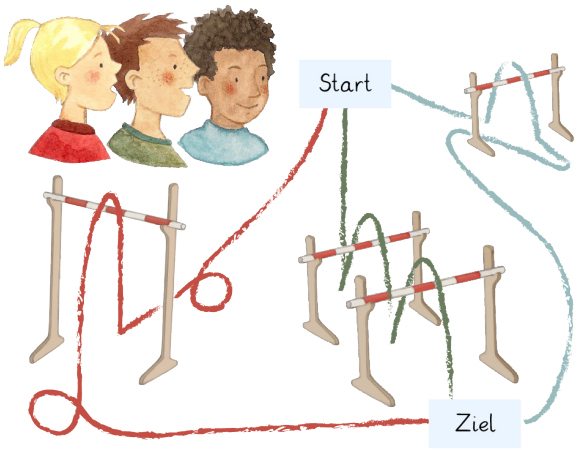
		H	Z	E
	+			

○ zu klein ○ zu groß

		H	Z	E
	+			

○ zu klein ○ zu groß

Bei Aufgaben wie dieser (vgl. *pikas.dzlm.de/node/789*), in denen das Problemlösen angesprochen wird, gibt es hingegen oft mehrere, vorab nicht bekannte und den Lernenden nicht vorgegebene Lösungswege, die erst unter Rückgriff auf bereits Bekanntes entwickelt werden müssen. Dabei gilt es (auch individuelle) Schwierigkeiten bzw. *Hürden* zu überwinden (Heinrich et al., 2015).



Warum Problemlösen im Mathematikunterricht?

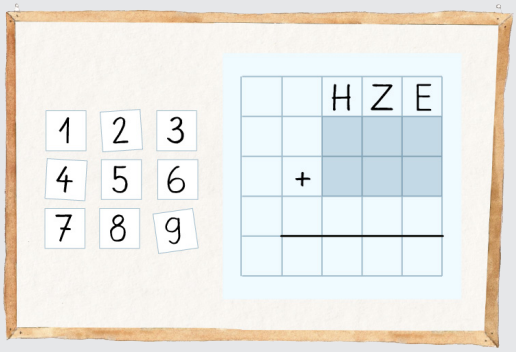
Anlässe zum Problemlösen fördern zum einen allgemeine Kompetenzen wie kreatives Denken, die Entwicklung von Neugier, Offenheit und Motivation für (mathematische) Probleme sowie ein Bewusstsein und die Weiterentwicklung für zielgerichtete und systematische Vorgehensweisen (Heinrich et al., 2015; Rathgeb-Schnierer et al., 2023). Gleichzeitig ermöglichen sie aber auch eine tiefere Auseinandersetzung mit und Durchdringung von mathematischen Inhalten (wie im Beispiel die tiefere Durchdringung des Algorithmus der schriftlichen Addition) (Söhling, 2017a).

Eine stärkenorientierte Sicht auf Fehler – sowohl vonseiten der Lehrkraft als auch den Kindern – ist in diesem Prozess von Bedeutung. Denn beim Problemlösen entstehen durchaus „Sackgassen“ und

nicht jedes Vorgehen führt direkt zu einer (richtigen) Problemlösung. Fehler und Umwege sollten dabei von allen Beteiligten als Lerngelegenheiten wahrgenommen werden. Durch das gemeinsame Thematisieren und die Überwindung der auftretenden Probleme können Kinder Inhalte tiefer durchdringen. Ziel ist es, dass sie so zunehmend systematische Vorgehensweisen entwickeln, Probleme zu lösen und diese langfristig dann auch in anderen Aufgaben flexibel anwenden können (Rathgeb-Schnierer et al., 2023; Söhling, 2017b).
Wie das Problemlösen im Unterricht herausgefordert (und im Folgenden unterstützt) werden kann, zeigt das nachstehende Unterrichtsbeispiel.

UNTERRICHTSBEISPIEL: WIE TREFFEN WIR DIE 1000?

Nach Einführung der schriftlichen Addition wird in der 3. Klasse der folgende Auftrag zum Forschen gestellt: Findet eine Strategie, wie wir die 1000 treffen können.



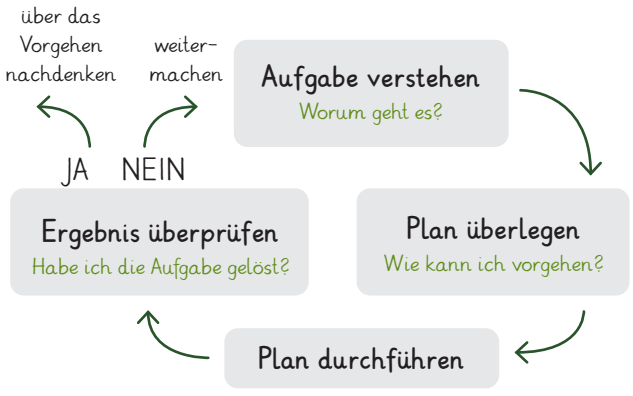
Ziel der Aktivität *Wie treffen wir die 1000?* ist es, mit den jeweils einmal zur Auswahl stehenden Ziffernkarten (1-9) zwei dreistellige Zahlen zu bilden, die miteinander addiert die Summe 1000 ergeben. Das „Wie" der Problemstellung zielt darauf ab, das Vorgehen zum Finden einer bzw. mehrerer Lösungen zu beschreiben und zu erklären – somit liegt der Fokus nicht nur auf der rechnerischen Lösung der Aufgabe.
Im Unterricht versuchen die Kinder zunächst in einer Phase individuellen Arbeitens erste Vorgehensweisen zu entwickeln. Anschließend vergleichen sie diese mit denen anderer Kinder in Mathekonferenzen und tauschen sich über diese aus. Für die gemeinsame Reflexion im Plenum halten sie ihre Ideen in einem Bericht zum Forschen fest (vgl. *pikas.dzlm.de/node/789)*

Problemlösen herausfordern und unterstützen

Um den „Forschergeist" bei Kindern anzuregen, sollten sie somit im Mathematikunterricht fortwährend mit mathematischen Problemen konfrontiert und in der Auseinandersetzung mit ihnen zum Problemlösen herausgefordert werden. In Kombination mit einer positiven Fehlerkultur und mittels geeigneter Unterstützungsmaßnahmen kann das Problemlösen auf diese Weise zu einem festen und für die Kinder „natürlichen" Bestandteil des Mathematikunterrichts werden mit dem Ziel, den Vorstellungsaufbau zu unterstützen. Wie Lernende mathematischen Problemen begegnen können, sollte hierbei bewusst mit den Kindern im Unterricht zum Gesprächsgegenstand gemacht werden (Rathgeb-Schnierer et al., 2023; Heinrich et al., 2015). Eine Übersicht hierzu bietet das Plakat *So forschen wir in Mathe,* welches im Folgenden näher erläutert wird (*pikas.dzlm.de/node/556*)

Problemlösen unterstützen – Schritte zum Forschen

Anlässe zum Problemlösen erfordern offene Aufgaben, die individuelle Lösungs- und Denkwege zulassen. Die daraus resultierenden Lösungsprozesse der Kinder unterscheiden sich somit und die Kinder stehen daher vor individuellen Herausforderungen, die sich auf verschiedene Schritte im Problemlöseprozess beziehen. Übergeordnet lassen sich in (Problem)Lösungsprozessen folgende Schritte zum Forschen identifizieren:



Ausschnitt „Schritte zum Forschen", s. S. 25

Die Anordnung soll verdeutlichen, dass ein (Problem-) Lösungsprozess in den seltensten Fällen linear verläuft. Vielmehr ist es notwendig, einzelne Schritte mehrfach oder auch einmal wieder

zurück zu gehen, bevor ein Problemlöseweg abgeschlossen (oder vollständig verworfen) wird.
Ein Bewusstsein für diese einzelnen Schritte zum Forschen kann den Lernenden helfen, den eigenen Problemlöseprozess zu planen („Worum geht es?“ „Was soll ich herausfinden?“), ihn durchzuführen („Wie kann ich vorgehen?“) und zu hinterfragen („Habe ich die Aufgabe gelöst? Kann meine Lösung wirklich eine Lösung für das Problem sein?). Auch für Lehrkräfte ist dieses Bewusstsein für die möglichen Herausforderungen der verschiedenen Stellen des Lösungsprozesses wichtig, um geeignete Unterstützungsmaßnahmen anbieten zu können. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, die Kinder aufzufordern, ihren Lösungsprozess stetig zu reflektieren, einzuordnen und zu beschreiben. Im folgenden Unterrichtsbeispiel lässt sich in diesem Kontext die Bedeutung des Austausches unter den Kindern verdeutlichen, um Hürden im Lösungsprozess zu meistern:

UNTERRICHTSBEISPIEL: WIE TREFFEN WIR DIE 1000?



Kai befindet sich am Anfang seines Lösungsprozesses für die Aufgabe „Wie treffen wir die 1000?“. Es wird deutlich, dass er noch Unterstützung braucht, um die Aufgabe überhaupt zu verstehen. Marie gibt das Ziel der Problemstellung in ihren eigenen Worten wieder und verschafft Kai einen Zugang zur Aufgabe und einen Einstieg in seinen Problemlöseprozess.



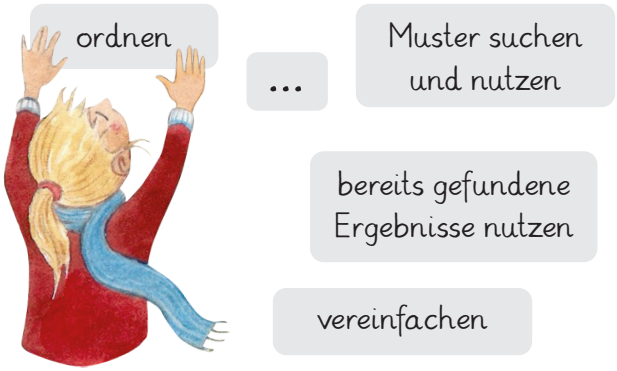
Pia hat zwar schon eine Idee, ist sich aber noch unsicher, wie sie ihren Lösungsweg planen soll. Im Gespräch mit Joventa diskutieren sie Lösungsansätze. Dabei erkennt Pia, dass sie auch erstmal nur Teilprobleme fokussieren und sich so der Problemlösung nähern kann.

TIPPS FÜR DEN UNTERRICHT

- *Aufgabe verstehen:* Fokus zunächst auf das Verständnis und nicht auf das Lösen der Aufgabe legen; Kinder die Problemstellung in eigenen Worten wiedergeben lassen
- *Plan überlegen:* z. B. gemeinsam Lösungsansätze entwickeln; Vermutungen äußern und selbst zu Vermutungen über den weiteren Lösungsweg anregen
- *Plan durchführen:* Kinder (eigene) Lösungen in Beziehung zur Problemstellung setzen lassen; zu systematischen Veränderungen anregen und Auswirkungen (auf den Lösungsweg) untersuchen lassen
- *Ergebnisse überprüfen:* Lösungen gezielt hinterfragen lassen; Austausch über weitere Lösungen anregen und Beziehungen zwischen Lösungswegen fokussieren

Problemlösen unterstützen – Strategien zum Forschen

Wenn es zum Lösen einer Aufgabe nicht nur den einen richtigen Weg gibt, werden die Kinder unterschiedliche Vorgehensweisen entwickeln. Diese können zunächst informelle Versuche und nicht von Beginn an systematisch sein. Kindern müssen stetig Anlässe geboten werden, verschiedene *Strategien zum Forschen* zu entwickeln, kennenzulernen und über diese zu reflektieren (Herold-Blasius et al., 2019).



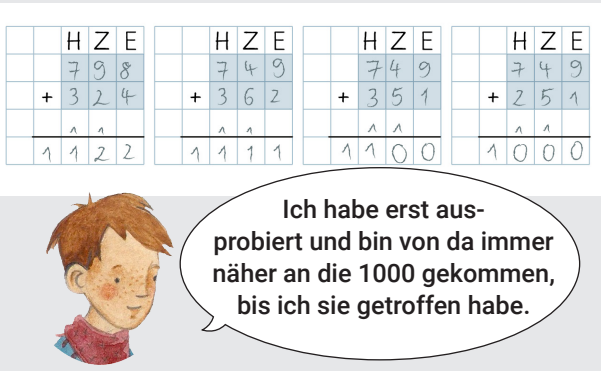
Ausschnitt „Strategien zum Forschen“, s. S. 25

Denn verschiedene Strategien zum Forschen können im Problemlöseprozess als Hilfen für Lösungsansätze dienen und zum Weiterdenken anregen. Dazu müssen sie zum konkreten Gegenstand des gemeinsamen Nachdenkens im Unterricht werden und ihr Einsatz kritisch in Bezug zur jeweili-

gen Problemstellung reflektiert werden. Ziel des Mathematikunterrichts ist es dann, die eigenen Strategien weiterzuentwickeln und zunehmend systematischer vorzugehen (Winter, 1995), wie im Beispiel deutlich wird.

UNTERRICHTSBEISPIEL: WIE TREFFEN WIR DIE 1000?

Probieren kann ein erster Zugang und Ausgangspunkt für zunehmend systematischere Strategien sein. Sören z. B. verändert nach erstem „Ausprobieren" die Auswahl seiner Ziffernkarten in Abhängigkeit von den Ergebnissen.



Maya hat bereits von Beginn an eine systematischere Strategie entwickelt, um verschiedene Aufgaben mit dem Ergebnis 1000 zu finden:



Sie erläutert, wie sie ihr Vorwissen zu Zahlzerlegungen und Stellenwerten genutzt hat. Davon könnten Kinder wie Sören im Austausch profitieren, um die eigenen Strategien weiterzuentwickeln.

TIPPS FÜR DEN UNTERRICHT

- Gelegenheiten schaffen, um Strategien zu entwickeln und anzuwenden
- Strategien zum Gegenstand des Austausches (zwischen Kindern und im Plenum) machen
- über Strategien reflektieren und diese vergleichen, um diese bewusst einzusetzen und weiterzuentwickeln

Problemlösen unterstützen – Fragen zum Forschen

Um Kinder in ihren Problemlöseprozessen zu unterstützen und sie dabei zu einem zunehmend systematischen Nutzen verschiedener Strategien anzuregen, haben *Fragen zum Forschen* eine zentrale Bedeutung.

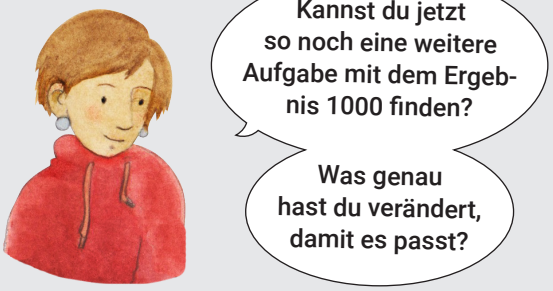


Abb. x: Ausschnitt „Fragen zum Forschen"

Fragen zum Forschen sollen die Aufmerksamkeit der Lernenden auf konkrete Stellen des Lösungsprozesses lenken und können sowohl als Ausgangspunkt als auch als Hilfen zum Weiterdenken dienen. Dies zeigt auch das Unterrichtsbeispiel:

UNTERRICHTSBEISPIEL: WIE TREFFEN WIR DIE 1000?

Die Lehrkraft versucht Sören durch entsprechende Impulsfragen anzuregen, die von ihm genutzten Zusammenhänge zu erkennen, um sie für das Finden weiterer Lösungen bewusst zu nutzen:



Langfristiges Ziel ist es, dass die Kinder sich diese Fragen selbst oder im Austausch gegenseitig stellen, um ein Vorankommen im oder Strukturieren der Lösungsprozesse zu ermöglichen. Dies passiert nicht von selbst und bedarf entsprechender Anregungen durch die Lehrkraft.

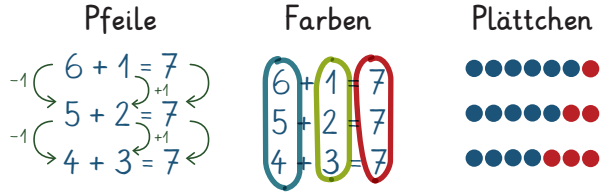
TIPPS FÜR DEN UNTERRICHT

- Fragen in gemeinsamen Gesprächsphasen einbringen und explizit zum Gesprächsgegenstand machen

- Kinder konkret anregen, die Fragen zunehmend selbstständig als Unterstützung des eigenen Lösungsprozesse zu nutzen
- Fragen durch Tippkarten oder als Forscherheft für die Kinder zugänglich machen

Problemlösen unterstützen – Mittel zum Forschen

Auch der Einsatz von Darstellungsmitteln kann Kinder in unterschiedlichen Phasen des Lösungsprozesses und bei der sich anschließenden Kommunikation über diese unterstützen.

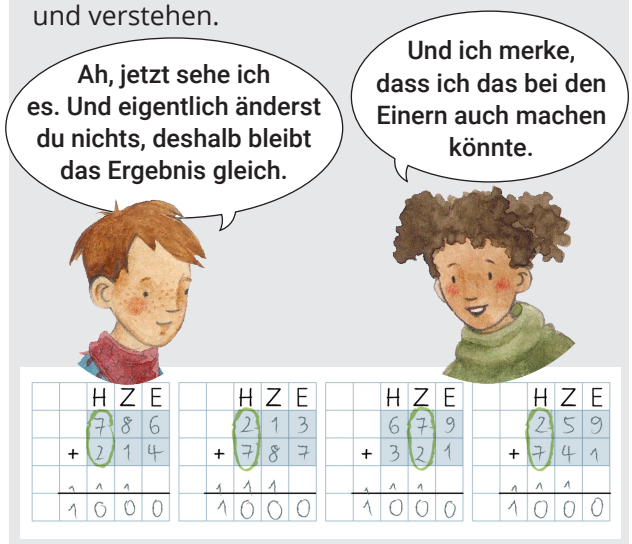


Ausschnitt „Mittel zum Forschen", s. S. 25

Mit *Mitteln zum Forschen* wie z. B. Pfeilen, Farben oder Plättchen können wichtige Elemente dargestellt oder hervorgehoben, und so Lösungen und Vorgehensweisen für sich und andere visualisiert werden. Ebenso kann ihr Einsatz ein Weiterdenken und Voranschreiten ermöglichen, indem einzelne Elemente bzw. Zusammenhänge zwischen einzelnen Elementen fokussiert in den Blick genommen werden (Selter & Zannetin, 2018), wie das folgende Beispiel zeigt:

UNTERRICHTSBEISPIEL: WIE TREFFEN WIR DIE 1000?

Maya visualisiert ihre Vorgehensweise für das Finden weiterer Lösungen durch farbige Pfeile und stellt diese somit anschaulich dar. Dadurch kann Sören die Erklärungen auf der rein sprachlichen Ebene einfacher nachvollziehen und verstehen.



Durch die fokussierte Betrachtung der einzelnen Stellenwerte und die Erklärung von Mayas Vorgehensweise erlangen beide Kinder weiterführende Erkenntnisse.

TIPPS FÜR DEN UNTERRICHT

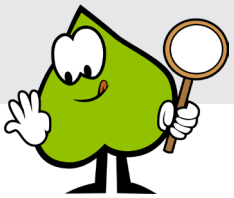
- *Mittel zum Forsche*n als „natürliche" Hilfsmittel zum Darstellen und Erklären von Entdeckungen und Strategien thematisieren und zum konkreten Gesprächsgegenstand machen
- Kinder Darstellungen zum Darstellen, Erklären und Entdecken bewusst einsetzen lassen

Fazit & Ausblick

Aufgaben zum Problemlösen eröffnen Gelegenheiten, um individuelle Vorgehensweisen zu entwickeln. Den damit verbundenen Herausforderungen kann durch bewussten Einsatz von Strategien, Fragen und Mitteln zum Forschen begegnet werden, wodurch Kindern der Zugang zu Problemlöseprozessen ermöglicht und die Weiterentwickliung sowie Systematisierung individueller Prozesse unterstützt wird. Das Poster (s.S.25) „So forschen wir in Mathe" stellt diese Orientierungshilfen und Unterstützungsmaßnahmen beim Problemlösen dar (*pikas.dzlm.de/node/556*). Im Verlauf wurde deutlich, wie eng die einzelnen Bereiche miteinander verknüpft sind und wie wichtig es ist, dass Schritte, Strategien, Fragen und Mittel zum Forschen konkrete Gegenstände des Unterrichts und des gemeinsamen Nachdenkens werden. Die Kinder sollen lernen, diese und die damit verbundenen Einsichten bewusst selbstgesteuert und reflektiert einzusetzen und ihr Nutzen zu „erleben".

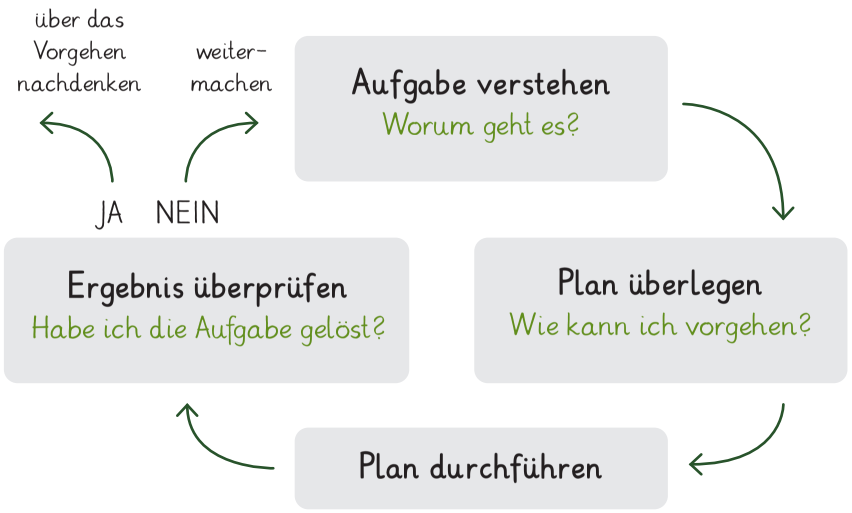
BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Wie kann ich den Lernenden ausreichend Gelegenheiten geben, Strategien zum Forschen in der Auseinandersetzung mit Anlässen zum Problemlösen zu entwickeln, diese auf neue Problemstellungen zu übertragen und über ihren Einsatz zu reflektieren?
- Mit welchen Impulsen unterstütze ich die Lernenden? Fordere ich das Nutzen von Fragen und Mitteln zum Forschen ausreichend ein?
- Bietet mein Schulbuch Anlässe zum Problemlösen oder muss ich diese selbst schaffen?
- Wie kann ich die Lernenden sowohl beim Erkenntnisgewinn als auch beim prozessbezogenen Arbeiten gezielt unterstützen?

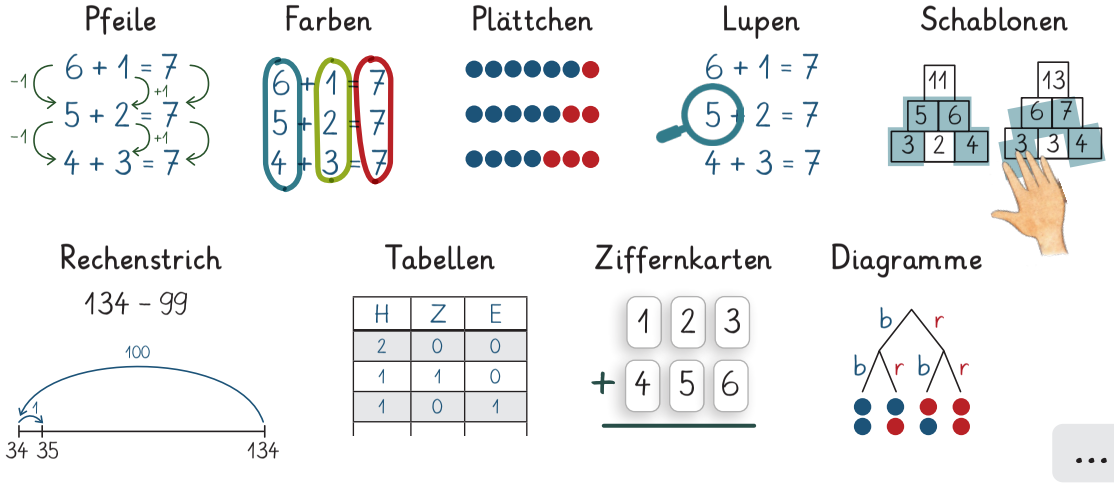


So forschen wir in Mathe

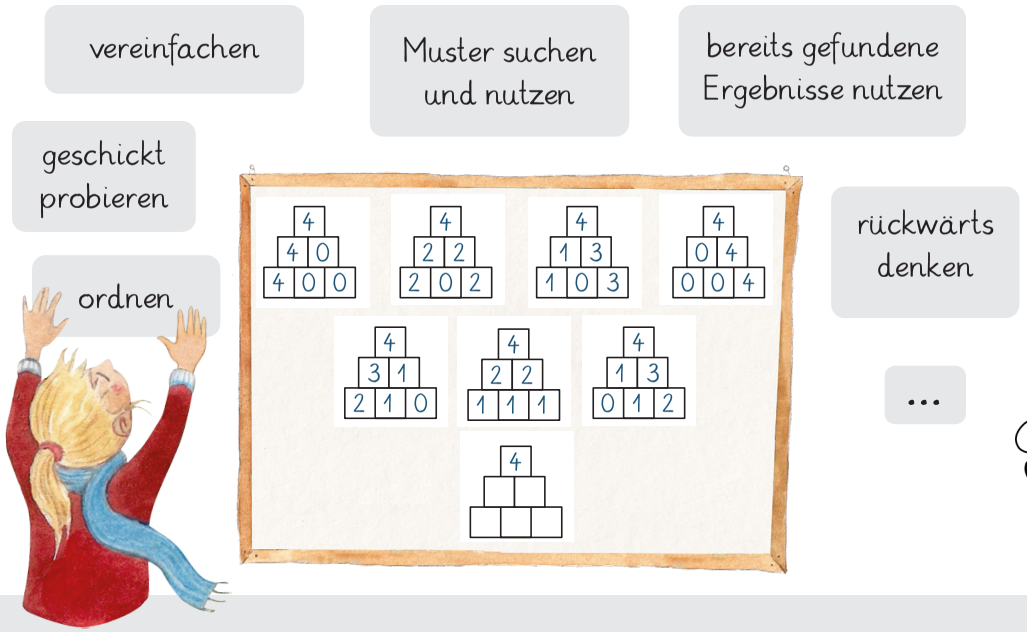
Schritte zum Forschen



Mittel zum Forschen



Strategien zum Forschen



Fragen zum Forschen



5 Modellieren

Mathematisches Modellieren ist Kindern aus verschiedenen Alltagssituationen bereits vertraut. Schon früh setzen sie sich mit realen Situationen auseinander, indem sie diese vereinfachen, nachstellen oder in eigenen Darstellungen festhalten, um sie besser zu verstehen und zu erklären. So entsteht zum Beispiel beim Spielen im Kaufladen eine Preisübersicht, beim Bauen mit Bausteinen eine Ordnung oder beim Planen eines Geburtstagsfestes eine Liste. Dabei ordnen Kinder Alltagssituationen, entwickeln Vorstellungen zu Mengen oder Operationen und nutzen eigene Darstellungen, um diese zu erklären. Modellieren kann so die Kreativität anregen und das Verständnis für die Lebenswelt unterstützen. Ebenso ist es bedeutsam für einen verstehensorientierten Mathematikunterricht, da es Kindern ermöglicht, reale Probleme zunehmend eigenständig zu erschließen und mathematisch zu bearbeiten (Selter & Zannetin, 2018).

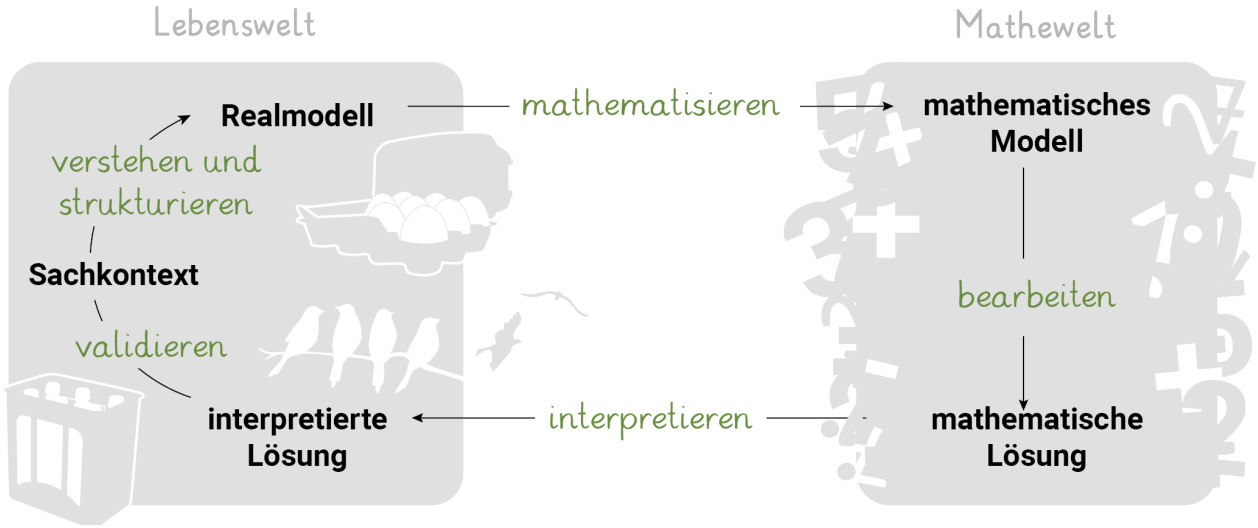
Was bedeutet Modellieren im Mathematikunterricht?

Modellieren ermöglicht, reale Situationen zu strukturieren, zu vereinfachen und in mathematische Zusammenhänge zu überführen. Es geht darum, Probleme aus der Lebenswelt in die Mathewelt zu übersetzen, dort zu lösen und die Lösung wieder auf die Lebenswelt zu beziehen. Es stellt somit auch ein zentrales Erkenntnismittel dar, welches unterschiedliche Tätigkeiten umfasst (Maaß, 2009).

Sollen Kinder einschätzen, ob sie die meiste Zeit in der Schule verbringen, kann dies als Modellierungsaufgabe bearbeitet werden. Neben dem *Verstehen und Strukturieren* der realen Situation ist insbesondere das Mathematisieren zentral, da relevante Informationen aus Sachsituationen in mathematische Darstellungen überführt werden, etwa indem Tage pro Woche, Stunden pro Tag, Schulwochen pro Jahr als zentrale Größen angenommen werden. Das entstehende Modell kann anschließend *bearbeitet* werden.

Ebenso bedeutsam ist die *Interpretation* der Ergebnisse im Kontext der Ausgangssituation, also die Rückübersetzung in den Alltag, etwa im Vergleich von Schulzeit und Freizeit. Die anschließende *Validierung* umfasst die Überprüfung der Ergebnisse im Hinblick auf die in der Aufgabe gegebenen Informationen, etwa durch das Prüfen der verwendeten Angaben oder der rechnerischen Plausibilität (Rathgeb-Schnierer et al., 2023). Auch wenn der beschriebene Modellierungskreislauf eine zyklische Abfolge suggeriert, findet diese in der Praxis nicht immer so statt. Auch die Intensität einzelner Tätigkeiten variiert je nach Aufgabe. Der Kreislauf dient zur Orientierung und stellt zentrale Tätigkeiten dar.

Die Fähigkeit, zwischen Lebenswelt und Mathematik zu wechseln, ist eine zentrale Kompetenz, die Lernende erwerben sollten. Indem sie Sachsituationen nicht nur rechnerisch bearbeiten, sondern Lösungen und Wege überprüfen und anpassen (etwa bei der Einschätzung der in der Schule verbrachten Zeit), entwickeln sie ein tiefergehendes Verständnis für mathematische Zusammenhänge.



Warum überhaupt Modellieren im Mathematikunterricht?

Modellieren ermöglicht es den Lernenden, zu vertieften Einsichten in mathematische Zusammenhänge zu gelangen, indem reale Situationen strukturiert, vereinfacht und mathematisch bearbeitet werden. Daher sollten Modellierungsanlässe von Anfang an regelmäßig und gezielt im Unterricht aufgegriffen werden. Erst wenn reale Kontexte einbezogen, Annahmen getroffen und mathematische Lösungen auf die Ausgangssituation bezogen werden, kann ein fundiertes Verständnis entstehen (Franke & Ruwisch, 2013).

Dabei spielt nicht nur der Modellierungsprozess selbst eine Rolle, sondern auch der Austausch darüber. Wenn Lernende gemeinsam aushandeln, welche Annahmen sinnvoll sind, wie Situationen vereinfacht werden können und inwiefern mathematische Ergebnisse zur Realität passen, entwickeln sie ein reflektiertes und vernetztes Verständnis. In diesem Zusammenhang wird deutlich, wie wichtig das Gespräch über Modellierungsprozesse im Mathematikunterricht ist. Lernende sollten daher immer wieder dazu angeregt werden, eigene Modellierungen zu entwickeln, zu erläutern und für andere nachvollziehbar darzustellen (Kommunizieren, Argumentieren und Darstellen). Im Folgenden wird anhand eines Aufgabenbeispiels exemplarisch skizziert, wie der dargestellte Modellierungskreislauf durchlaufen und dessen Bearbeitung im Unterricht unterstützt werden kann.

UNTERRICHTSBEISPIEL: BECHERAUFGABE

Um das Verständnis für alltagsnahe mathematische Problemstellungen sowie den Wechsel zwischen Lebenswelt und Mathewelt herauszufordern, wird in einer dritten Klasse eine Modellierungsaufgabe gestellt. Zu Beginn der Unterrichtsstunde erhalten die Kinder die folgende Aufgabe:



Modellieren herausfordern und unterstützen

Mathematisches Modellieren ist ein komplexer Prozess und stellt eine große Herausforderung an die Kinder. Daher sollten bereits von Anfang an Gelegenheiten gegeben werden, in denen Realsituationen in die Mathewelt übersetzt, dort bearbeitet und wieder auf die Realsituation bezogen werden. Das befähigt die Kinder zunehmend auch komplizierte Realsituationen aufzunehmen und bearbeiten zu können (Franke & Ruwisch, 2013; Maaß, 2009). Da die Auseinandersetzung mit Realsituationen und deren mathematische Bearbeitung einen schwierigen Prozess ausmachen, werden im Folgenden Möglichkeiten der Unterstützung anhand des Unterrichtsbeispiels illustriert.

Modellieren unterstützen – Fragen an den Text stellen

Insbesondere der Zugang zu textlastigen oder sprachlich herausfordernden Aufgaben kann Kinder daran hindern, den Sachkontext zu verstehen. Gezielte Fragen an den Text können dabei helfen, diesen zu strukturieren und das Verstehen zu fördern. Zur Entlastung der Lernenden können gezielte Fragen das Textverständnis der Kinder adressieren. Dabei helfen Kategorisierungen der Fragen (z. B. „Kann ich (nicht) mit dem Text beantworten."; „Für die Antwort muss ich rechnen."). Dadurch wird zum einen verdeutlicht, welche Informationen für die Bearbeitung der Aufgabe relevant sind und welche nicht berücksichtigt werden müssen. Darüber hinaus kann hier bereits die Notwendigkeit des Rechnens zur Beantwortung mancher Fragen fokussiert werden. Das ermöglicht den Kindern einerseits den Inhalt des Sachkontextes tiefer zu durchdringen und andererseits über mögliche Übersetzungen in ein mathematisches Modell nachzudenken. Zudem können die Kinder durch die Thematisierung einzelner Fragen an den Text erkennen, dass nicht alle Informationen des Textes relevant für die Übersetzung in ein Modell sind (z. B. „Welche Farbe haben die Becher?") (Bongartz & Verboom, 2007; Rathgeb-Schnierer et al., 2023).

Insbesondere die Reduktion der einzelnen Fragen auf die bereits beantwortbaren Fragen, kann dazu beitragen, dass die Kinder ein mathematisches Modell erstellen und dieses im Weiteren bearbei-

ten können. Dabei ist es ggf. notwendig, weitere Fragen an den Text zu formulieren.

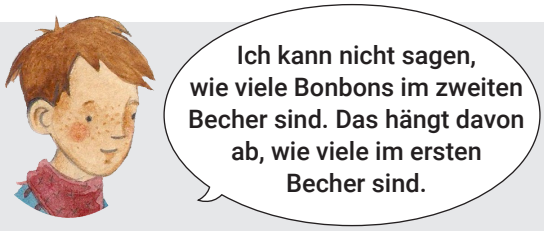
UNTERRICHTSBEISPIEL: BECHERAUFGABE

Fragen an den Text zu stellen kann ein erster Zugang sein, um ein Sachproblem zu strukturieren. Kai erkennt z. B., dass nicht alle Informationen aus dem Text wichtig für das mathematische Modell sind.



Welche Farbe haben die Becher?		X	
Wie viele Bonbons gibt es insgesamt?			
Wie viele Bonbons hat der zweite Becher mehr als der erste?			
Wie viele Bonbons sind im zweiten Becher?			
...			

Frage kann ich mit dem Text beantworten
Frage kann ich nicht mit dem Text beantworten
für die Antwort muss ich rechnen



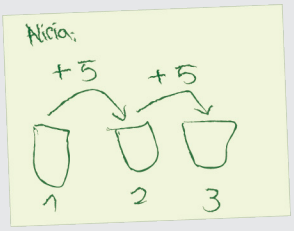
Sören erkennt, dass er zunächst andere Fragen beantworten muss, um die Aufgabe insgesamt zu lösen.
Das kann ihn unterstützen, darüber nachzudenken, welche Beziehungen zwischen den einzelnen Aufgabenteilen bestehen und wie sich diese auswirken. Das kann dazu führen, dass er die Aufgabe strukturieren und in ein mathematisches Modell übersetzen kann.

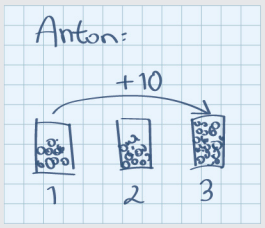
Modellieren unterstützen – Skizzen zeichnen

Skizzen können bereits dabei helfen, einen Sachkontext zu verstehen und zu strukturieren, indem sie die Situation anschaulich machen und beim Ordnen wichtiger Informationen unterstützen (Franke & Ruwisch, 2013). Im Folgenden werden sie jedoch insbesondere mit Blick auf das Mathematisieren betrachtet. Wenn ein Sachkontext von den Kindern bspw. durch Fragen an den Text oder das Nachspielen der Situation strukturiert und verstanden worden ist, kann das Mathematisieren und anschließende Bearbeiten der Sachsituation herausfordernd sein.
Hierbei können Skizzen unterstützend eingesetzt werden, die die Realsituation mathematisch handhabbar darstellen. Dabei können verschiedene Skizzen Anlass bieten, unterschiedliche Bereiche der Aufgabe hervorzuheben (Bräuer et al., 2021; Rathgeb-Schnierer et al., 2023).

UNTERRICHTSBEISPIEL: BECHERAUFGABE

Das Erstellen einer Skizze kann eine Unterstützung sein, um einen Sachverhalt weiter zu mathematisieren. Alicia verdeutlicht in ihrer Skizze, dass in jedem Becher 5 Steine mehr als im vorherigen Becher sind. Anton stellt den Unterschied zwischen dem ersten und dem dritten Becher dar.





Beide Skizzen können genutzt werden, um über die Beziehungen zwischen den einzelnen Bechern zu sprechen und diese zu thematisieren. So können die Kinder zunehmend ein mathematisches Modell erstellen, was sie zur Lösung der Aufgabe nutzen können (Rathgeb-Schnierer et al., 2023).

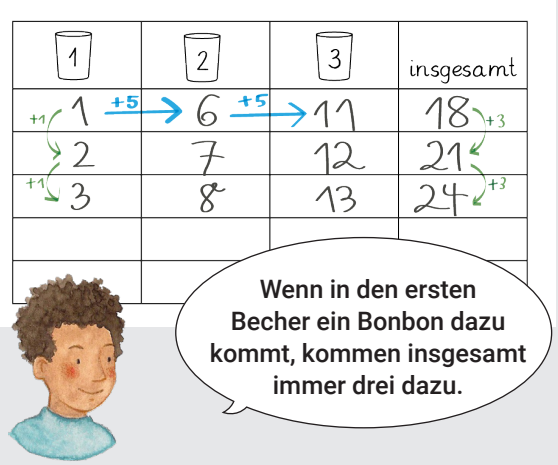
Modellieren unterstützen – Tabellen erstellen

Nachdem ein Sachkontext von den Kindern bspw. durch Fragen an den Text oder Skizzen *verstanden* und *mathematisiert* wurde, können bei passenden Sachkontexten Tabellen Kinder dabei unterstützen, die Aufgabe mathematisch zu lösen, also zu *bearbeiten.*
Dabei bieten Tabellen insbesondere die Möglichkeit ein strukturiert-strategisches Vorgehen der Kinder zu fördern. Das ermöglicht den Kindern einen Zugang zur Lösung, der von einer ggf. zunächst probierenden zu einer zunehmend strategischen, erkannten Struktur berücksichtigenden Vorgehensweise führt, da in Tabellen Versuche

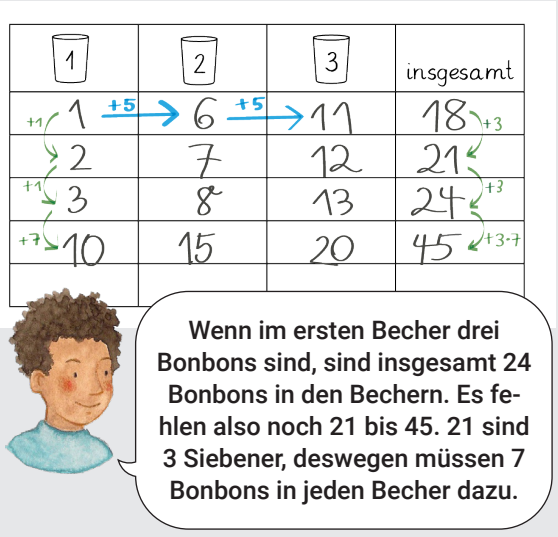
dokumentiert und für die (strategische) Weiterarbeit genutzt werden können (Selter & Zannetin, 2018).

UNTERRICHTSBEISPIEL: BECHERAUFGABE

Die Übertragung des mathematischen Modells in eine Tabelle ermöglicht den Kindern einen Lösungszugang. So können sie in dieser Aufgabe zunächst damit beginnen, erste Möglichkeiten auszuprobieren und in einer Tabelle strukturiert darzustellen.
Die Anregung, diese Lösungen durch bspw. Mittel zum Forschen zu strukturieren, bietet den Kindern die Möglichkeit, daraus Erkenntnisse für die weitere Bearbeitung der Aufgabe zu erhalten. So erkennt Amet hier den Einfluss auf den dritten Becher, wenn die Anzahl der Bonbons im ersten Becher um eins erhöht wird.



Von dieser Erkenntnis ausgehend kann er die Aufgabe lösen.

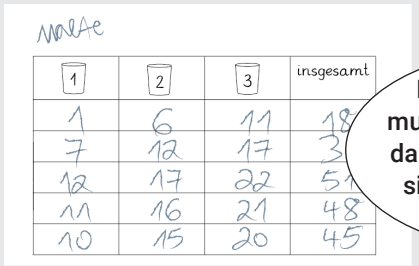


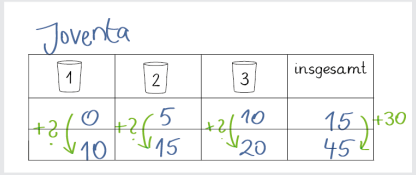
Modellieren unterstützen – Tabellen deuten
Wenn Kinder auf unterschiedliche Weise zu einer Lösung gelangt sind, kann der Austausch darüber dazu beitragen, dass sie unterschiedliche Lösungswege *interpretieren* und *validieren* (Rathgeb-Schnierer et al., 2023). Hierbei kann unter anderem die Darstellung in Tabellen hilfreich sein, da diese den Lösungsweg gut illustrieren.

UNTERRICHTSBEISPIEL: BECHERAUFGABE

Der Vergleich unterschiedlicher Lösungswege in der Tabelle kann Kinder dabei unterstützen, Lösungen anderer zu interpretieren und zu validieren.
Im Vergleich von Irmas und Maltes Lösung können die Kinder feststellen, dass Malte weniger Schritte brauchte, um zur Lösung zu gelangen. Zugleich ermöglicht Irmas Vorgehen keinen Schritt auszulassen.









Im Unterschied dazu können die Kinder bei Joventas Lösungsweg erkennen, dass nur wenige Schritte notwendig waren. Diese mussten jedoch gut durchdacht sein und auf vorherige Erkenntnisse zurückgeführt werden.

Die Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Lösungswegen ermöglicht es den Kindern, ihr eigenes Vorgehen bewusst zu reflektieren und gewinnbringend auf weitere Aufgaben zu übertragen (Rathgeb-Schnierer, 2023).



Die Entwicklung von Strategien wie dem Anfertigen von Skizzen oder Tabellen gelingt besonders gut, wenn diese wiederholt an unterschiedlichen Aufgaben erprobt werden. Eine umfangreiche Aufgabensammlung zum gezielten Üben dieser Darstellungsformen finden Sie hier: pikas-digi.dzlm.de/node/122

TIPPS FÜR DEN UNTERRICHT

- Modellierungsprozesse schrittweise aufbauen und einzelne Tätigkeiten des Modellierens zunächst gezielt in den Blick nehmen.
- Hilfsmittel wie Skizzen oder Tabellen nicht voraussetzen, sondern als Werkzeuge zum Verstehen, Strukturieren und Kommunizieren gemeinsam einführen und reflektieren.
- Nicht jede Modellierungstätigkeit muss bei jeder Aufgabe gleich intensiv bearbeitet werden. Je nach Aufgabenstellung können einzelne Tätigkeiten gezielt fokussiert werden.
- Den Wechsel zwischen Realsituation und Mathematik explizit thematisieren und die getroffenen Annahmen sowie Entscheidungen gemeinsam reflektieren.

Fazit & Ausblick

Mathematisches Modellieren eröffnet Lernenden Gelegenheiten, reale Situationen zu strukturieren, zu vereinfachen und in mathematische Zusammenhänge zu überführen. Den damit verbundenen Herausforderungen kann durch gezielte Unterstützungsmaßnahmen – wie Fragen an den Text, Skizzen oder Tabellen – begegnet werden, die zunächst separat erlernt werden müssen (Rathgeb-Schnierer, 2023). So unterstützen sie einen bewussteren Umgang mit Modellierungsprozessen und helfen, deren Phasen im Unterricht sichtbar zu machen und gemeinsam zu reflektieren.
Perspektivisch gilt es, Modellierungsanlässe kontinuierlich in den Unterricht zu integrieren und den Austausch über unterschiedliche Vorgehensweisen zu fördern. So können Kinder ein flexibles und reflektiertes Verständnis dafür entwickeln, wie Mathematik zur Erschließung ihrer Lebenswelt genutzt werden kann. Wichtig ist dabei ein niedrigschwelliger Einstieg, da der Zugang zu Modellierungsprozessen für Lernende und Lehrkräfte herausfordernd sein kann und eine angemessene Einschätzung des Anforderungsniveaus nicht trivial ist.

BLICK AUF MEINEN UNTERRICHT

- Welche Gelegenheiten in meinem Unterricht bieten den Lernenden Möglichkeiten, reale Situationen zu modellieren, also zu strukturieren, zu vereinfachen oder in mathematische Zusammenhänge zu überführen sowie ihre Lösungen zu interpretieren und zu validieren?
- Wie unterstütze ich die Lernenden durch geeignete Impulse entlang der Modellierungsprozesse (beim Verstehen, Mathematisieren, Bearbeiten, Interpretieren und Validieren)?
- Inwiefern fordere ich den Austausch über Annahmen, Darstellungen und Lösungswege gezielt ein, sodass Modellierungsentscheidungen transparent und reflektierbar werden?
- An welchen Stellen bietet mein Schulbuch passende Modellierungsanlässe oder müssen diese gezielt ergänzt bzw. angepasst werden?
- Wie kann ich die Lernenden beim Wechsel zwischen Lebenswelt und Mathematik sowie beim Aufbau tragfähiger Modelle gezielt unterstützen?
- Inwiefern nutze ich geeignete Darstellungsformen (z. B. Skizzen, Tabellen), um Modellierungsprozesse zu entlasten und strukturiertes Arbeiten zu fördern?

6 Prozessbezogene Kompetenzen vernetzen

Wie die Ausführungen der vorangehenden Kapitel aufzeigen, spielen prozessbezogene Kompetenzen in vielfältigen Unterrichtssituationen eine bedeutende Rolle und sollten demnach nicht nur in Lernumgebungen z. B. zu substantiellen Aufgaben wie Zahlenmauern angesprochen werden, sondern haben auch in der Auseinandersetzung mit Alltagsaufgaben eine wichtige Bedeutung. Die Beispiele haben gezeigt, dass prozessbezogene Kompetenzen dabei zum einen nicht losgelöst von inhaltsbezogenen Kompetenzen gefördert werden, sondern mit diesen eng verwoben sind.
Überdies werden prozessbezogene Kompetenzen in Lernumgebungen selten isoliert gefördert, da zwischen ihnen zahlreiche Querverbindungen bestehen. Ziel ist es somit, dass Kinder in vielfältigen Lernsituationen prozessbezogene Kompetenzen (weiter)entwickeln und gleichzeitig Inhalte verständnisbasiert erarbeiten und tiefer durchdringen können.
Dabei muss keineswegs in jeder Mathematikstunde jede prozessbezogene Kompetenz gleichermaßen angesprochen werden. Je nach Unterrichts- und Lernziel stehen einzelne prozessbezogene Kompetenzen auch mal weniger oder gar nicht im Fokus (z. B. wenn es um das automatisierte Abrufen der Aufgaben des kleinen Einmaleins geht). Werden prozessbezogene Kompetenzen durch den Einsatz von entsprechenden Aufgabenstellungen aber herausgefordert, müssen sie zum zentralen Lern- und Gesprächsgegenstand werden. Denn Fähigkeiten wie das Entdecken, das Beschreiben und das Begründen, die den prozessbezogenen Kompetenzen zugeschrieben werden, entwickeln sich häufig nicht von selbst und müssen von der Lehrperson durch unterrichtliche Anregungen sowie durch entsprechende Aufgabenstellungen und Hilfestellungen aktiv unterstützt werden.
Im Folgenden möchten wir zum Abschluss dieser Handreichung noch einmal die *Vernetzung* der prozessbezognenen Kompetenzen mit Bezug auf die einzelnen Kapitel in den Blick nehmen und dabei die wesentlichen Kernbotschaften an einem Unterrichtsbeispiel verdeutlichen.
So wurden bereits im Einstieg in die Handreichung in der Gegenüberstellung von zwei Aufgabenvarianten zum Thema „Halbschriftliche Subtraktion“ auch die Bedeutung der Aufgabenauswahl bzw. die Adaption von Aufgabenstellungen aufgezeigt, um prozessbezogene Kompetenzen überhaupt herauszufordern (und die Entwicklung der damit verbundenen Fähigkeiten zu unterstützen).

AUFGABENSTELLUNG 1:

Rechne aus.

45 – 23 = ____ 71 – 38 = ____

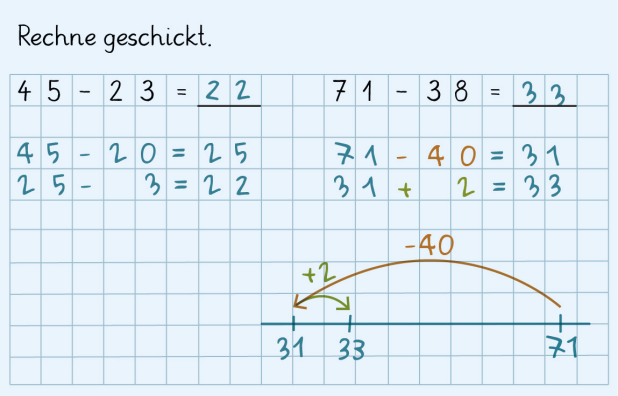
AUFGABENSTELLUNG 2:

Rechne geschickt.
Stelle deinen Rechenweg dar.

45 – 23 = ____ 71 – 38 = ____

Deutlich wurde: Der Arbeitsauftrag in Variante 1 „Rechne aus!“ fokussiert nur auf der Ausführung der (bereits erarbeiteten) Rechenwege der halbschriftlichen Subtraktion und erfordert keine tiefergehende Auseinandersetzung. Durch die (nur leichte) Adaption der Aufgabenstellung in Aufgabenvariante 2 „Rechne geschickt. Stelle deinen Rechenweg dar.“ können sich Kinder in der Auseinandersetzung mit dieser Aufgabenstellung durch die angesprochenen prozessbezogenen Kompetenzen verständnisbasiert und tiefer mit der inhaltsbezogenen Thematik des halbschriftlichen Subtrahierens auseinandersetzen. Somit ist schon in der Vorbereitung die Aufgabenauswahl ganz zentral, um prozessbezogene Kompetenzen herauszufordern und sich Gedanken zu machen, wie Kinder dabei unterstützt werden können.
Skizziert man nun einen möglichen Lernweg, dann würde diese Aufgabe zu Beginn der Thematisierung der halbschriftlichen Subtraktion stehen. Da kein konkreter Rechenweg vorgegeben ist, sollen die Lernenden zunächst eigenständige Lösungswege entwickeln, was die Kompetenz des Problemlösens anspricht. Da es nicht den einen richtigen Rechenweg gibt und Kinder Aufgabenmerkmale wahrnehmen und nutzen sollen, entwickeln nicht

nur verschiedene Kinder unterschiedliche Wege, auch ein Kind kann zwei verschiedene Aufgaben mit unterschiedlichen Rechenwegen lösen:

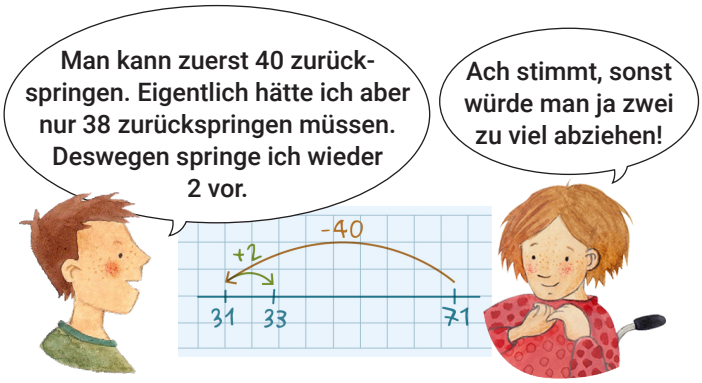


So nutzt Paul zur Lösung der 1. Aufgabe ein schrittweises Vorgehen und bei der 2. Aufgabe eine sogenannte „Hilfsaufgabe".

Ebenso werden die Kinder aufgefordert, ihre Rechenwege zu visualisieren. Die direkt angesprochene Kompetenz des *Darstellens* erfüllt dabei zwei zentrale Funktionen, die im Verlauf des Lernprozesses deutlich werden. Denn haben die Kinder erste eigene Lösungswege gefunden und diese dargestellt, sollten die Kinder – z. B. durch die Initiierung einer Mathekonferenz – zum Austausch angeregt werden. Die prozessbezogene Kompetenz des *Kommunizierens* hat nun Bedeutung, da die Kinder sich ihre Lösungswege gegenseitig vorstellen und dabei auch beschreiben müssen. So erklärt z. B. Paul Marie, die anders als er beide Aufgaben schrittweise gelöst hat, wie er die zweite Aufgabe mit einer Hilfsaufgabe gelöst hat:



Dabei wird deutlich: Paul versprachlicht sein Vorgehen zwar, jedoch hat Marie noch Schwierigkeiten, dieses nachzuvollziehen. In einer erneuten Erklärung bezieht Paul die Darstellung am Rechenstrich mit ein. Er kann Marie so seinen Rechenweg und die von ihm genutzten Aufgabenstrukturen verständlicher machen und erklären, wie und warum sein Weg funktioniert. Somit wird sowohl Marie unterstützt, das Vorgehen inhaltlich nachzuvollziehen (und kann evtl. in ihr Repertoire an möglichen Rechenwegen aufgenommen werden) und gleichzeitig reflektiert und festigt Paul beim Erklären noch einmal seinen eigenen Erkenntnisprozess.



Die Darstellungen müssen dann in gemeinsamen Phasen zum Gesprächsgegenstand mit allen Kindern werden, damit die symbolischen Rechenwege und bildlichen Darstellungen vernetzt werden können. Zusätzlich können Lernvideos helfen, um die Rechenwege für die Kinder noch einmal dynamisch darzustellen *(mahiko.dzlm.de/node/303).*

Im Austausch über ihre Rechenwege fangen Kinder auch implizit an zu begründen, warum sie so gerechnet haben und ihren Rechenweg für geschickt halten. Aufgabe der Lehrkraft ist es, die Kinder in diesem Prozess zum *Argumentieren* anzuregen:



Denn so werden die Lernenden aufgefordert, ihre Einsichten zu hinterfragen und bewusst hinzuzuziehen, um zu erläutern, warum ein Rechenweg geschickt und in welchem Zusammenhang dieser zu (erkannten) Aufgabenmerkmalen steht.

Dabei sollte das Sprechen über Zahl- und Aufgabenbeziehungen zum zentralen Gegenstand werden und dies auch in anschließenden gemeinsamen Reflexionsphasen aufgegriffen werden. Das *Problemlösen* bekommt nämlich dann in dieser Phase nochmal eine Bedeutung, wie die Fortführung des Unterrichtsbeispiels verdeutlich:

Bei welchen Aufgaben würdest du eine Hilfsaufgabe nutzen? Kreise ein.

6	6	–	4	3		5	4	–	1	9		3	2	–	2	9
4	7	–	2	8												

Durch diese Aufgabenstellung sollen Kinder Rechenwege (hier exemplarisch die Hilfsaufgabe) in Abhängigkeit von erkannten Zahl- und Aufgabebeziehungen bewerten, um sie langfristig bewusst einzusetzen.

Das Unterrichtsbeispiel verdeutlicht abschließend die Bedeutung und Verzahnung der einzelnen prozessbezogenen Kompetenzen für einen verständnisbasierten Mathematikunterricht. Die damit verbundenen Fähigkeiten können durch den Einsatz entsprechender Aufgaben herausgefordert werden und bedürfen der vorgestellten Unterstützungsmaßnahmen, um die Kinder zu fördern.

Hinweis: Um auch das Modellieren anzusprechen, bedarf es eines konkreten Alltagsbezugs. Diesen auf das Unterrichtsbeispiel zu konstruieren, erscheint uns wenig sinnvoll, so dass diese Kompetenz hier keine weitere Ausführung bekommt. Im Kapitel 5 (zum Modellieren) wurde aber bereits konkret die Vernetzung zu den weiteren prozessbezogenen Kompetenzen dargestellt.

7 Literatur

Bongartz, T. & Verboom, L. (2007): *Fundgrube Sachrechnen. Unterrichtsideen, Beispiele und methodische Anregungen für das 1. bis 4. Schuljahr.* Cornelsen Scriptor.

Bräuer, V., Leiß, D., & Schukajlow, S. (2021). Skizzen zeichnen zu Modellierungsaufgaben – Eine Analyse themenspezifischer Differenzen einer Visualisierungsstrategie beim mathematischen Modellieren. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 42(2), 491–523. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00182-7

Brunner, E. (2019). Wie lassen sich schriftliche Begründungen von Schülerinnen und Schülern des 5. und 6. Schuljahrs beschreiben? In S. Krauss, K. Binder & A. Frank (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 1131–1134). WTM.

Dörner, D. (1976). *Problemlösen als Informationsverarbeitung.* Kohlhammer.

Fetzer, M. (2015): Argumentieren – Prozesse verstehen und Fähigkeiten fördern. In: A. S. Steinweg (Hg.), *Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2015,* S. 9–24. Bamberg.

Franke, M., & Ruwisch, S. (2013). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule* (2. [überarb.] Auflage, Nachdruck). Spektrum Akad. Verl. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2695-6

Gaidoschik, M. (2015). *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern: 9. Auflage.* Persen.

Gaidoschik, M. (2022). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken Strategien gegen Lernschwierigkeiten* (6. Auflage). Klett, Kallmeyer.

Götze, D. (2015). *Sprachförderung im Mathematikunterricht.* Cornelsen.

Götze, D., Selter, C., Prediger, S., Holzäpfel, L., Rösken-Winter, B., Eichholz, L., & Wilhelm, N. (2025). *Fünf Prinzipien guten Mathematikunterrichts.* https://pikas.dzlm.de/node/2285

Herold-Blasius, R., Holzäpfel, L. & Rott, B. (2019). Problemlösestrategien lehren lernen – Wo die Praxis Probleme beim Problemlösen sieht. In Büchter, A. et al. (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht* (S. 295–310). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-24292-3_21

Kuhnke, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel.* Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01509-1

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (pp. 89–122). Albany: State University of New York Press.

Maaß, K. (2009). *Mathematikunterricht weiterentwickeln.* Cornelsen Scriptor.

Maier, H., & Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht.* ÖBV & hpt Verlag.

Mayer, C. (2019). Zum algebraischen Gleichheitsverständnis von Grundschulkindern: Konstruktive und rekonstruktive Erforschung von Lernchancen. Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-23662-5

Nührenbörger, M.; Schwarzkopf, R. (2019). Argumentierendes Rechnen: Algebraische Lernchancen im Arithmetikunterricht der Grundschule. In Brandt, B.; Tiedemann, K. (Hrsg.), *Interpretative Unterrichtsforschung* (S. 15–35). Waxmann.

Pólya, G. (1973). *How to solve it. A new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.

Prediger, S. (2019). Mathematische und sprachliche Lernschwierigkeiten: Empirische Befunde und Förderansätze am Beispiel des Multiplikationskonzepts. *Lernen und Lernstörungen*, 8(4), 247–260. https://doi.org/10.1024/2235-0977/a000268

Prediger, S., & Vogel, A. (2024). Sprachbildung für Verständnisaufbau in allen Fächern: Bedeutungsbezogene Denksprache zum Beschreiben fachlicher Strukturen. *MNU Journal,* 77(4), 314–321.

Rathgeb-Schnierer, E., Schuler, S., & Schütte, S. (2023). *Mathematikunterricht in der Grundschule: Lernangebote fachorientiert, kindorientiert und differenziert gestalten.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-65856-7

Schwarzkopf, R. (2019). Produktive Kommunikationsanlässe im Mathematikunterricht der Grundschule. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Darstellen und Kommunizieren* (S. 39–54). University of Bamberg Press.

Selter, C., & Zannetin, E. (2018). *Mathematik unterrichten in der Grundschule.* Kallmeyer.

Söhling, A.-C. (2017a). Lernen von Mathematik beim Problemlösen. *mathematica didactica, Themenheft Problemlösen,* 40, 1–16.

Söhling, A.-C. (2017b). *Problemlösen und Mathematiklernen.* Springer Fachmedien. *https://doi.org/10.1007/978-3-658-17590-0*

Sundermann, B., & Selter, Ch. (1995). Halbschriftliches Rechnen auf eigenen Wegen. In G. N. Müller & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen.* (S. 165–178). Arbeitskreis Grundschule.

Wartha, S., & Schulz, A. (2013). *Rechenproblemen vorbeugen: 2. Auflage.* Cornelsen.

Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. *Journal für Mathematikdidaktik 1,* 59-95.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung, *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61,* 37-46.

Herausgeber

PIKAS
pikas.dzlm.de

TU Dortmund / Fakultät für Mathematik / IEEM
Vogelpothsweg 87
44227 Dortmund

Autorinnen und Autoren:

Joscha Bertram
Elena Glettenberg
Daniel Walter
Dominik Zorn

Abbildung & Gestaltung: Projekt PIKAS; Karoline Mosen
Stand: August 2026

Diese Handreichung wurde durch das PIKAS-Team erstellt und kann, soweit nicht anderweitig gekennzeichnet, unter der Creative Commons Lizenz BY-NC-SA: Namensnennung - Nicht-kommerziell - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International weiterverwendet werden. Das bedeutet: Alle Folien und Materialien können, soweit nicht anders gekennzeichnet, genutzt und verändert werden, wenn die Urheber genannt, die Quellenhinweise aufgeführt bleiben, eine nicht-kommerzielle Nutzung erfolgt sowie das bearbeitete Material unter der gleichen Lizenz weitergegeben wird *(https://creativecommons.org/licenses)*.

Bitte zitieren Sie die Handreichung wie folgt (und ggf. mit Seitenzahl(en)):
Bertram et al. (2026). Prozessbezogene Kompetenzen herausfordern und unterstützen – Anregungen zur Umsetzung in der Grundschule. Verfügbar unter *https://pikas.dzlm.de/node/2285*.

Manche Abbildungen wurden unter Nutzung der Grundschrift erstellt.
© 2011 beim Grundschulverband e.V. und bei der Wissenschaftlichen Einrichtung der Laborschule Bielefeld
Alle Rechte vorbehalten.

Ministerium für Schule und Bildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

Völklinger Straße 49
40221 Düsseldorf
Tel.: 0211 5867-40
Fax: 0211 5867-3220
E-Mail: poststelle@msb.nrw.de
www.schulministerium.nrw.de

