kompakt

Subtraktion produktiv üben – Umkehrzahlen

MATHESCHWIERIGKEITEN ÜBERPRÜFEN UND BEGEGNEN

- **Zahlverständnis** im Zahlenraum bis 1000 ausbauen.
- **Stellenwertverständnis** und Umgang mit der Stellenwerttafel thematisieren.
- Sicherheit beim Lösen von **Subtraktionsaufgaben mit Übertrag im Zahlenraum bis 1000** entwickeln.
- **Gemeinsamkeiten und Unterschiede** von Zahl und Umkehrzahl sowie deren Differenz **beschreiben.**

AUSGANGSAUFGABE

$$\begin{array}{r} 682 \\ -\ 286 \\ {\scriptstyle 1\ 1} \\ \hline 396 \end{array}$$

Bilde eine dreistellige Zahl und ihre Umkehrzahl.
Subtrahiere die kleinere Zahl von der größeren Zahl.
Was fällt dir auf?

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN AUSBAUEN

Argumentationskompetenz fördern:

- **Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten beschreiben:** Subtrahend, Minuend und Differenz zueinander in Beziehung setzen, Unterschiede und Gemeinsamkeiten mit Mitteln zum Forschen beschreiben.
- **Vermutungen anstellen:** Vermutungen über den Zusammenhang zwischen der Veränderung von Minuend und/oder Subtrahend und der Differenz anstellen.
- **Lösungswege, Vorgehensweisen, Vermutungen begründen:** Zusammenhang zwischen den Veränderungen von Minuend, Subtrahend und Differenz begründen.
- **Vermutungen, Lösungen, Aussagen überprüfen:** Aufgestellte Vermutungen und allgemeine Aussagen überprüfen und ggf. widerlegen.

SPRACHBILDEND UNTERRICHTEN

- **Sprachmittel und Fachausdrücke** gezielt planen: Welche Sprachmittel sind relevant, um Entdeckungen und Zusammenhänge verbalisieren zu können? Welche Impulse können den Lernenden hierbei helfen?
- Sprachmittel und Fachausdrücke **gemeinsam festhalten, einsetzen und nutzen.**
- **Ausdrücke einsetzen und erweitern:** Die Lehrkraft fungiert als sprachliches Vorbild und regt die Lernenden zu **eigenen Sprachproduktionen** an.

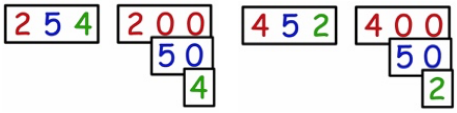
MATHESTÄRKEN FÖRDERN

- Umkehraufgaben mit gleichen Ergebnissen **finden** und Vorgehensweise und Entdeckungen **begründen.**
- Entdeckungen in **größeren Zahlenräumen** oder durch die **Variation der Rechenvorschrift.**

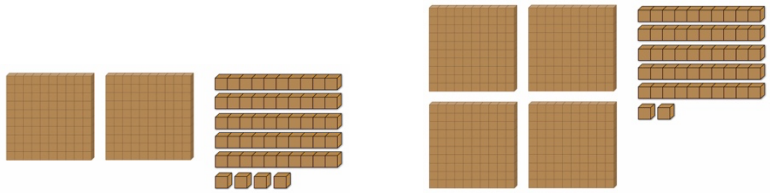
Das produktive Aufgabenformat „Umkehrzahl“ zur Subtraktion basiert auf der Veränderung der Stellenwerte, indem von einer Zahl ihre Umkehrzahl subtrahiert wird. Hinter der Schwierigkeit von Kindern Hunderter-, Zehner- und Einerzahlen in der richtigen Reihenfolge aufzuschreiben („Zahlendreher“), verbirgt sich häufig eine Unklarheit über Bezeichnungen und Wertigkeit der einzelnen Stellenwerte. Die Anforderung dieser Ausgangsaufgabe besteht daher vor allem in der Durchdringung des Stellenwertsystems sowie in der Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. Um die Ausgangsaufgabe erfolgreich bearbeiten zu können, benötigen Kinder gewisse arithmetische Basiskompetenzen, auch in niedrigeren Zahlräumen, die im Folgenden aufgezeigt werden.

Zahlverständnis im Zahlenraum bis 1000 ausbauen.

- Zahlbildung dreistelliger Zahlen (Einer, Zehner, Hunderter) thematisieren. Zahlenkärtchen nutzen, um Zahlen zu legen (umlegen von H, Z und E).



- Zahl und Umkehrzahl mit Würfelmaterial legen lassen, um die Wertigkeit der Ziffern der einzelnen Stellenwerte (z. B. 2 in 254 und 452) zu veranschaulichen: *„Lege die Zahl mit Material. Wie viele Einer, Zehner und Hunderter hat die Zahl?“*



- Anschließend Zahldarstellungen vergleichen und Größenvergleich durchführen *„Welche Zahl ist größer? Warum ist die Zahl größer? Zeige am Material.“*
- Schwierigkeit: Kinder subtrahieren die größere von der kleineren Zahl: 254–452. Unterstützungsmöglichkeiten:
    - Zunächst beide Zahlen aufschreiben lassen *„Welche Zahl ist größer?“* und dann zunächst die größere Zahl notieren lassen.
    - Die Kinder die Aufgabe 254-452 mit Material rechnen lassen, sodass sie merken, dass von 254 nicht 452 weggenommen werden können.

Stellenwertverständnis und Umgang mit der Stellenwerttafel thematisieren.

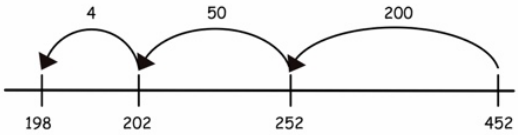
- Zahlen in die Stellenwerttafel eintragen (als Ziffern und mit Plättchen). *„Lege die Zahl 452 mit Plättchen in die Stellenwerttafel.“*
- Verschiedene Darstellungen einer Zahl sicher beherrschen. Den flexiblen Wechsel zwischen den Darstellungsformen z. B. durch ein Spiel wie „Stellenwertequartett“ üben.

Bild	Stellentafel	Aufgabe	Zahl
	T H Z E 3 1 2	300 + 10 + 2	312
	T H Z E		
	T H Z E	400 + 9	
	T H Z E		
	T H Z E 2 6 0		
	T H Z E		1001

Zahlen unterschiedlich darstellen (Mathe sicher können primar, Baustein N1 A)

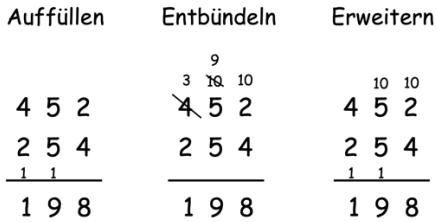
Sicherheit beim Lösen von **Subtraktionsaufgaben mit Übertrag im Zahlenraum bis 1000** entwickeln.

- Wiederholung: Unterschied lässt sich berechnen durch Abziehen oder Ergänzen.
- Den Zahlenstrahl als Hilfsmittel zur Verdeutlichung der Subtraktionen nutzen. *„Am Zahlenstrahl gehen wir schrittweise zurück (nach links).“*



Subtraktion am Zahlenstrahl verdeutlichen.

- Voraussetzung ist die verstehensbasierte Anwendung des schriftlichen Subtraktionsverfahrens (Auffüllen, Entbündeln oder Erweitern – je nach eingeführtem schriftlichen Verfahren im Unterricht), damit korrekte Ergebnisse entstehen, die Entdeckungen ermöglichen.

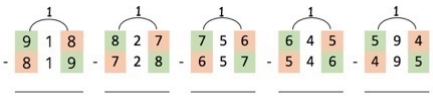


Die drei schriftlichen Verfahren der Subtraktion.

- Subtraktionsaufgaben mit Übertrag lösen können.
- Entsprechendes Fördermaterial unter Mathe sicher können Primarstufe, Baustein N7 B

Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Zahl und Umkehrzahl sowie deren Differenz **beschreiben.**

- Mehrere Aufgaben rechnen und gleiche Ergebnisse farbig markieren → Notieren der Aufgaben auf einzelnen Karten, um das Umsortieren der Aufgaben nach gleichen Ergebnissen zu erleichtern.
- Tipps zur Strukturierung der Aufgaben/Ergebnisse geben (z. B. nach Größe des Ergebnisses, nach dem Unterschied zwischen Hunderter- und Einerziffer, ... sortieren).
- Zur Verringerung der Komplexität können zunächst nur ausgewählte Aufgaben in den Blick genommen werden, beispielsweise zunächst nur Aufgaben mit dem Ergebnis 99, an denen Entdeckungen gemacht werden sollen. *„Was fällt dir an diesen Aufgaben auf?“ „Was haben die Zahlen gemeinsam? Wie unterscheiden sie sich?“ „Wie verändert sich das Ergebnis, wenn der Unterschied der Ziffern nicht 1, sondern 2 beträgt?“*



Zunächst Entdeckungen an ausgewählten Aufgaben machen

- Unterrichtsmaterial zu Umkehrzahlen (PIKAS: Unterricht - Gute Aufgaben - Zahlen und Operationen - Umkehrzahlen)

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN AUSBAUEN

Die Aufgabe, von einer dreistelligen Zahl die Umkehrzahl zu subtrahieren, bietet die Möglichkeit, Zusammenhänge zwischen dem Minuenden, dem Subtrahenden und der Differenz herzustellen sowie Aufgaben zu gleichen Differenzen genauer zu betrachten. Unterschiede und Gemeinsamkeiten können mit Mitteln zum Forschen verdeutlicht und Auffälligkeiten mündlich oder schriftlich und unter Verwendung verschiedener Fachbegriffe beschrieben werden. Neben dem Beschreiben sollten auch das Vermuten, das Begründen und das Überprüfen angeregt werden, um die Argumentationskompetenz zu fördern.

Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten beschreiben: Subtrahend, Minuend und Differenz zueinander in Beziehung setzen, Unterschiede und Gemeinsamkeiten mit Mitteln zum Forschen beschreiben.

- Gemeinsamkeiten/Unterschiede des Minuenden, Subtrahenden und der Differenz innerhalb einer Rechenaufgabe mit Mitteln zum Forschen markieren: *„Was fällt dir an deiner Startzahl, der Umkehrzahl und dem Ergebnis auf? Zeige mit Mitteln zum Forschen."* Die Kinder können entdecken, dass durch das Bilden der Umkehrzahl die Zehner im Minuenden und Subtrahenden immer gleich bleiben, der Minuend den größeren Hunderter und den kleineren Einer hat als der Subtrahend, der Zehner der Differenz immer eine Neun ist, da es an der Einerstelle stets zu einem Übertrag kommt.

$$\begin{array}{r} 716 \\ -\,617 \\ \hline 99 \end{array} \quad \begin{array}{r} 523 \\ -325 \\ \hline 198 \end{array} \quad \begin{array}{r} 754 \\ -457 \\ \hline 297 \end{array} \quad \begin{array}{r} 998 \\ -899 \\ \hline 99 \end{array}$$

- Gemeinsamkeiten/Unterschiede der Differenz verschiedener Aufgaben markieren. *„Ordne die einzelnen Aufgaben. Erkläre, wie du die Aufgaben geordnet hast."* Die Aufgaben könnten im Vorfeld auf einzelne Streifen geschrieben werden und dann von den Kindern geordnet werden. Geordnet werden könnte nach gleichen und verschiedenen Differenzen oder nach der Größe der Differenzen.

$$\begin{array}{r} 938 \\ -\,839 \\ \hline 99 \end{array} \quad \begin{array}{r} 142 \\ -\,241 \\ \hline 99 \end{array} \quad \begin{array}{r} 726 \\ -\,627 \\ \hline 99 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 725 \\ -\,527 \\ \hline 198 \end{array} \quad \begin{array}{r} 482 \\ -\,284 \\ \hline 198 \end{array} \quad \begin{array}{r} 725 \\ -\,527 \\ \hline 198 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 623 \\ -\,326 \\ \hline 297 \end{array} \quad \begin{array}{r} 754 \\ -\,457 \\ \hline 297 \end{array} \quad \begin{array}{r} 491 \\ -\,194 \\ \hline 297 \end{array}$$

Vermutungen anstellen: Vermutungen über den Zusammenhang zwischen der Veränderung von Minuend und/oder Subtrahend und der Differenz anstellen.

- Vermutung zu bestimmten Ergebnissen: *„Vermute: Welches ist die kleinste/größte Differenz, die du bei dreistelligen Minuenden finden kannst? Erkläre."* Die Kinder können herausfinden, dass die kleinste Differenz 99 und die größte Differenz 891 ist, wenn die Ziffer 0 ebenfalls zugelassen wird.

$$\begin{array}{r} 998 \\ -899 \\ \hline 99 \end{array}$$

„Die kleinste Differenz ist die 99, denn größere Ziffern als zweimal 9 und einmal 8 kann ich nicht wählen."

- Vermutung zu allen möglichen Ergebnissen: *„Vermute: Welche Differenzen können bei dreistelligen Minuenden erreicht werden? Erkläre.“* Die Kinder können durch das Ordnen von Ergebnissen darauf stoßen, dass alle Differenzen Vielfache von 99 sind. *„Ich vermute, dass alle Ergebnisse zu der 99er-Reihe gehören: 99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891.“* Diese Vermutungen sollten festgehalten und zu einem späteren Zeitpunkt mit weiteren Beispielen und allgemeinen Begründungen überprüft werden.

$$\begin{array}{r} 998 \\ -\ 899 \\ \hline 99 \end{array} \quad \begin{array}{r} 987 \\ -\ 789 \\ \hline 198 \end{array} \quad \begin{array}{r} 996 \\ -\ 699 \\ \hline 297 \end{array} \quad \begin{array}{r} 995 \\ -\ 599 \\ \hline 396 \end{array}$$

$1 \cdot 99 \quad 2 \cdot 99 \quad 3 \cdot 99 \quad 4 \cdot 99$

$$\begin{array}{r} 994 \\ -\ 499 \\ \hline 495 \end{array} \quad \begin{array}{r} 993 \\ -\ 399 \\ \hline 594 \end{array} \quad \begin{array}{r} 992 \\ -\ 299 \\ \hline 693 \end{array} \quad \begin{array}{r} 991 \\ -\ 199 \\ \hline 792 \end{array} \quad \begin{array}{r} 990 \\ -\ 99 \\ \hline 891 \end{array}$$

$5 \cdot 99 \quad 6 \cdot 99 \quad 7 \cdot 99 \quad 8 \cdot 99 \quad 9 \cdot 99$

„Wenn ich bei der Startzahl die Einerziffer immer um 1 verkleinere, dann wird die Differenz von Aufgabe zu Aufgabe um 99 größer. Das bedeutet, dass alle Ergebnisse zur 99er-Reihe gehören.“

- Vermutung zu der Anzahl der Aufgaben mit gleichen Differenzen: *„Vermute: Wie viele verschiedene Aufgaben mit der Differenz 891 gibt es? Erkläre.“* Die Kinder können durch das Sortieren der Aufgaben herausfinden, dass es zu der Differenz 891 genau 10 verschiedene Aufgaben gibt, wenn die Ziffer 0 an der Hunderter- und Zehnerstelle erlaubt wird (990-099, 980-089, 970-079, … 900-009). Die Ziffern an Hunderter- und Einerstelle sind immer 0 und 9 und die Ziffer an der Zehnerstelle kann eine 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 sein, ohne dass sich das Ergebnis verändert.

SPRACHBILDEND UNTERRICHTEN

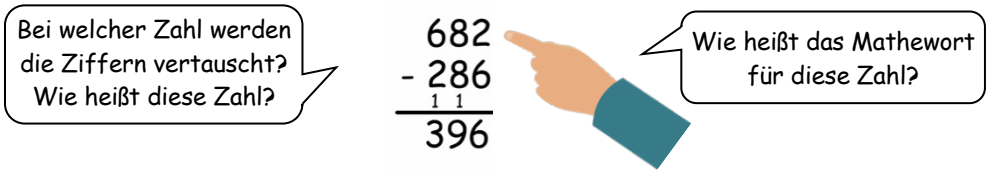
Um die Struktur zur Bildung der Umkehrzahlen selbst, aber vor allem auch die Entdeckungen bei der Subtraktion zweier Umkehrzahlen verbalisieren zu können, benötigen die Lernenden relevante Sprachmittel. Diese müssen vorab von der Lehrkraft gezielt geplant werden. Dabei muss überlegt werden, wie diese für die Lernenden nutzbar gemacht werden können, durch aktive Arbeit mit den entsprechenden Ausdrücken und den Einsatz weiterer sprachbildender Übungen.
Da das Aufgabenformat auch über die Schuljahre hinweg einsetzbar ist, sollten diese relevanten Sprachmittel immer weiter ausgeschärft und erweitert werden, um beispielsweise auch komplexere Entdeckungen von ANNA- oder IRI-Zahlen oder auch Minus-Türmen beschreiben und erklären zu können.

Lehrkraftsprache – Sprachmittel und Fachausdrücke gezielt planen: Die Lehrkraft sollte im Vorfeld überlegen, **welche Sprachmittel relevant sind**, um zum einen über den Aufbau der Umkehrzahlen selbst, aber auch über die Zusammenhänge zwischen den Umkehrzahlen, den gebildeten Subtraktionsaufgaben und deren Ergebnisse sprechen zu können. Hierzu ist es wichtig vorab zu überlegen, welche Mittel zum Forschen die Lernenden bei der Verbalisierung ihrer Entdeckungen unterstützen können und wie diese zur Unterstützung der Sprachrezeption und -produktion von den Kindern gezielt eingesetzt werden können. Durch die Verknüpfung von Sprache und Zeigegeste können die Lernenden die Begriffe zunehmend verinnerlichen und sehen, wie sie die Begriffe in den eigenen Wortschatz integrieren können. Des Weiteren sollten Überlegungen angestellt werden, welche **Herausforderungen bei den Lernenden erwartet** werden können und wie diesen begegnet werden kann. Hierbei kann es hilfreich sein, sich vorab **Gedanken über konkrete Impulse** zu machen. Diese Impulse sind vor allem dann von großer Bedeutung, wenn Kinder mit Hilfe von Alltagssprache mathematische Entdeckungen beschreiben. Diese

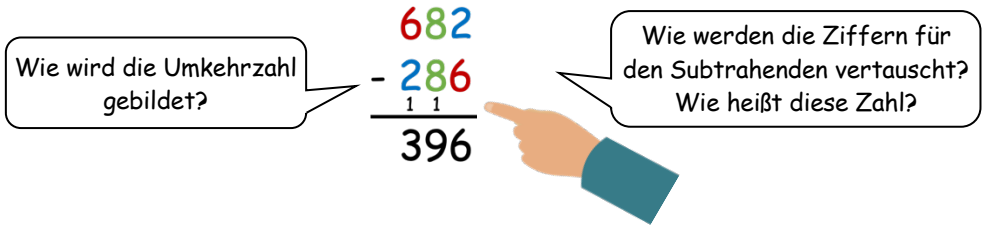
Aussagen der Kinder sind häufig nicht falsch, sondern einfach noch nicht in Unterrichtssprache ausgedrückt. An dieser Stelle ist es die Aufgabe der Lehrkraft, die Äußerungen der Kinder aufzugreifen, ihnen dann durch eine fachsprachlich korrekte Einordnung eine alternative Formulierung anzubieten (sprachliches Korrektiv) und diese Ausdrücke auch zu verschriftlichen. Dabei ist wiederum die **parallele Einbindung des Materials** bzw. der Darstellung zentral, da nur so alle Kinder die Möglichkeit haben, der Formulierung der Lehrkraft zu folgen.

Mögliche Sprachmittel, Materialhandlungen und Impulse:

- *Der Minuend, der Subtrahend, das Ergebnis, die Differenz, die Einerziffer, die Zehnerziffer, die Hunderterziffer*
  Die Lehrkraft zeigt bei der Nennung der Ausdrücke immer wieder auf die jeweilige Zahl.



- *Bei der Umkehrzahl werden die Ziffern vertauscht. Die Hunderterziffer wird an die Einerstelle geschoben. Die Zehnerziffer bleibt gleich, weil es nur drei Ziffern gibt. Die Einerziffer wird an die Hunderterstelle geschoben.*
  Die Lehrkraft stellt den Lernenden die für diese Aufgaben geeigneten Mittel zum Forschen (Farben und Pfeile) vor. Indem gleiche Ziffern in derselben Farbe notiert oder mit gleichen Farben markiert werden, kann veranschaulicht werden, wie die Ziffern zur Bildung der Umkehrzahl vertauscht werden.



- *Das Ergebnis ist immer ein Vielfaches von 99.* Bzw. *Die Ergebnisse sind alle aus der 99er-Reihe.*
  Die berechneten Aufgaben werden von den Lernenden sortiert, sodass beispielsweise Aufgaben mit denselben Ergebnissen nebeneinander liegen. Zudem werden die Aufgaben von oben nach unten so von den Lernenden sortiert, dass die Ergebnisse immer größer werden.
  Mit Pfeilen kann markiert werden, dass die Ergebnisse von oben nach unten immer um 99 größer werden. Den Einsatz von Pfeilen zur Visualisierung üben die Lernenden zur Veranschaulichung ihrer eigenen Entdeckungen, aber auch bei der Besprechung der Entdeckungen und zum Festhalten von Ergebnissen und Erkenntnissen im Plenum. Vor allem, wenn Lernende noch Schwierigkeiten haben zu erkennen, dass die Ergebnisse alle ein Vielfaches von 99 sind, können die Sortierungen der Aufgaben und die Pfeile zur Markierung der Veränderungen helfen, diese gezielter in den Blick zu nehmen. Hierzu kann es hilfreich sein, die Ergebnisse jeweils als Vielfaches von 99 zu notieren. Je nach Leistungsniveau müssen jedoch nicht alle Lernende entdecken, dass die Ergebnisse alle ein Vielfaches von 99 sind. Zu entdecken, dass es Ergebnisse gibt, die immer wiederholt vorkommen, ist bereits eine wichtige Erkenntnis im Zusammenhang mit dem Aufgabenformat Umkehrzahlen.

Wie kannst du die Aufgaben sortieren? Was fällt dir auf, wenn du die Aufgaben sortierst?

584 − 485 = 99	938 − 839 = 99	142 − 241 = 99	726 − 627 = 99
+99			
351 − 153 = 198	725 − 527 = 198	482 − 284 = 198	725 − 527 = 198
+99			
875 − 578 = 297	623 − 326 = 297	754 − 457 = 297	491 − 194 = 297

Um wie viel wird das Ergebnis immer größer, wenn du die Ergebnisse von oben nach unten vergleichst?

Wie kannst du diese Entdeckung, dass das Ergebnis immer ein Vielfaches von 99 ist, so notieren, dass du dies schnell erkennen kannst?

- *Je größer/kleiner der Unterschied zwischen dem Hunderter des Minuenden und dem Hunderter des Subtrahenden ist, desto größer/kleiner ist das Ergebnis.*
  Es werden immer die Aufgaben miteinander verglichen, die dasselbe Ergebnis haben. Fällt den Lernenden auf, dass der Unterschied zwischen der Hunderter- und Einerziffer des Minuenden immer gleich ist, kann dies mit Mitteln zum Forschen markiert werden, indem der Unterschied mit Pfeilen veranschaulicht wird. Sollten die Lernenden hierbei noch Schwierigkeiten haben, können erste Markierungen auch von der Lehrkraft vorgenommen werden, um den Blick der Lernenden gezielt auf die Betrachtung des Unterschieds der Hunderter- und Einerziffer des Minuenden zu lenken, ohne die Entdeckung bereits vorzugeben.

Was fällt dir auf, wenn du die Ziffern des Minuenden und Subtrahenden bei allen Aufgaben mit dem Ergebnis 99 miteinander vergleichst?

584 − 485 = 99	938 − 839 = 99	142 − 241 = 99	726 − 627 = 99	1 · 99
+99				
351 − 153 = 198	[illegible] − [illegible] = 198	482 − 284 = 198	725 − 527 = 198	2 · 99

Wie groß ist der Unterschied der Ziffern bei diesen Aufgaben? *(zeigt z. B. auf die Aufgaben mit dem Ergebnis 99)* Und wie groß ist der Unterschied der Ziffern bei diesen Aufgaben? *(zeigt z. B. auf die Aufgaben mit dem Ergebnis 198)*

- *Das Ergebnis ist … mal 99, weil der Unterschied zwischen dem Hunderter des Minuenden und dem Hunderter des Subtrahenden … ist.*

918 − 819 =	827 − 728 =	756 − 657 =

Wie hängen der Unterschied der Hunderter-/Einerziffern mit der Größe des Ergebnisses zusammen?

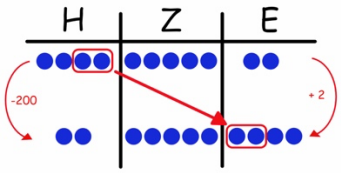
Sprachmittel und Fachausdrücke festhalten, einsetzen und nutzen: Da bei der Beschreibung und Erklärung von Entdeckungen beim Aufgabenformat Umkehrzahlen Sprachmittel benötigt werden, die teilweise sehr spezifisch für dieses Aufgabenformat und weniger aufgabenformatübergreifend eingesetzt werden können, ist der Einsatz eines klassischen Sprachspeichers, im Sinne eines (digitalen) Plakats, unter Umständen weniger sinnvoll. Vielmehr sollten bei der gemeinsamen Besprechung der Beschreibungen und Begründungen die Aussagen der Lernenden von der Lehrkraft durch das sprachliche Korrektiv ausgeschärft und gegebenenfalls an der Tafel verschriftlicht werden. Hierbei kann es sinnvoll sein, die Ausdrücke sehr beispielgebunden, entsprechend der konkreten Entdeckungen der Lernenden, zu verschriftlichen. Der Einsatz von Mitteln zum Forschen kann die Sprachrezeption und -produktion unterstützen.

Hinweis: Da die Entdeckungen der Lernenden sehr individuell sein können, verzichten wir bewusst auf die Abbildung eines möglichen Tafelbildes. Dieses sollte sich nämlich an den Entdeckungen und Vorgehensweisen der Lernenden orientieren und sie bei der Versprächlichung dieser unterstützen. Relevante Sprachmittel und deren Visualisierungen können dem vorangegangenen Abschnitt entnommen werden.

Tipps zur Visualisierung und Nutzbarkeit relevanter Sprachmittel:
Der zusätzliche Einsatz einer visuell gestützten Wörterliste, vor allem für Kinder, die noch nicht über ausreichende Deutschkenntnisse verfügen, kann im Sinne der Sprachförderung sinnvoll sein.

Darstellungen vernetzen:

- Mittel zum Forschen können den Lernenden helfen, ihre Entdeckungen über die Veränderungen und Zusammenhänge der Egebnisse und Zahlen zunächst zu veranschaulichen. Die Veranschaulichungen können die Verbalisierung der Entdeckungen, insbesondere auch im Plenum, unterstützen. Deshalb sollten diese auch zur Visualisierung der Ausdrücke genutzt werden.
- Sprachliche Mittel zur Beschreibung und zum handlungsbegleitenden Sprechen nutzen: *„Wenn ich zwei Plättchen aus der Hundertertafel verschiebe, dann…“, „Wenn zwei Plättchen in der Einerspalte dazukommen, dann …“ „Es werden 200 abgezogen und es kommen 2 dazu. Die Differenz beträgt daher 198.“*



Das Verschieben von Plättchen in der Stellenwerttafel sprachlich begleiten.

- Pfeile in verschiedenen Farben eignen sich, um die Veränderung der Ergebnisse oder die Unterschiede zwischen den Hunderter-/Einerziffern zu veranschaulichen.

Ausdrücke einsetzen und erweitern: Die Ausdrücke sollten immer wieder gezielt und beispielgebunden im Unterricht eingesetzt und ggf. um weitere relevante Ausdrücke erweitert werden. So sollen die Lernenden zu eigenen Sprachproduktionen angeregt werden und zunehmend auch verallgemeinernde Erklärungen für Veränderungen und Zusammenhänge beim Aufgabenformat Umkehrzahlen selbst formulieren können.

Ausdrücke gezielt einsetzen:

- Die Ausdrücke können von den Lernenden erst dann sinnvoll für die Verbalisierung eigener Entdeckungen genutzt werden, wenn sie regelmäßig im Unterricht wieder aufgegriffen werden: Die Ausdrücke müssen nicht nur gemeinsam entwickelt, sondern auch anschließend immer wieder im Unterrichtsgespräch genutzt werden.
- Hierzu sollte die Lehrkraft als sprachliches Vorbild fungieren und die Ausdrücke auch selbst in ihren sprachlichen Äußerungen aufgreifen.

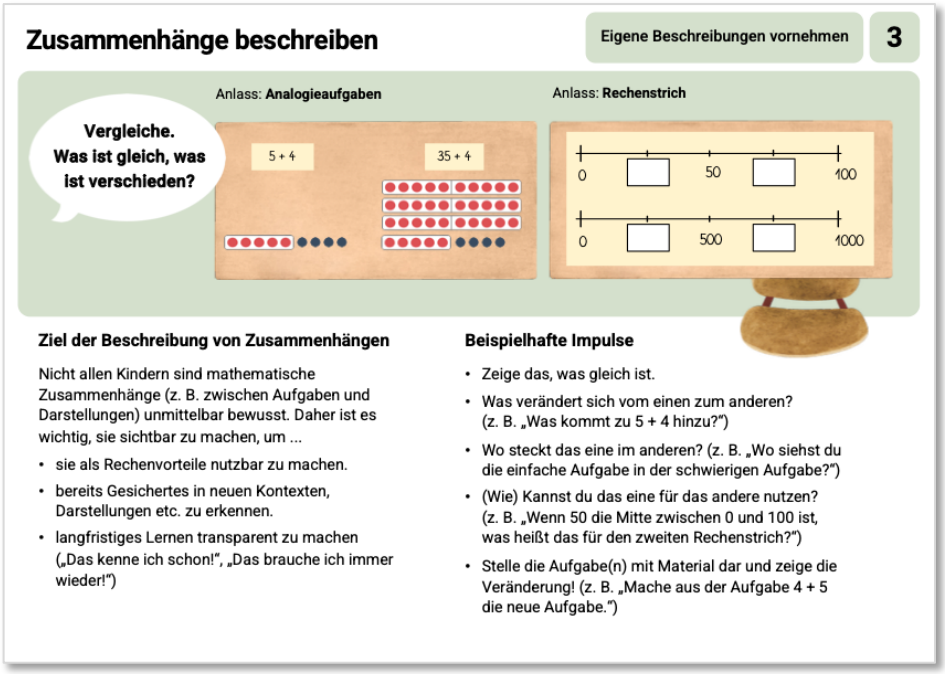
Relevante Ausdrücke erweitern:

- Im weiteren Verlauf des Unterrichts können und sollten die Ausdrücke weiter differenziert werden und sollten, wenn analoge Aufgabenformate, wie beispielsweise IRI- oder ANNA-Zahlen, bearbeitet werden, übertragen werden.

Lernende zu eigenen Sprachproduktionen anregen:

- Die Lernenden verändern die Ziffern zur Bildung der Umkehrzahlen systematisch und ziehen so Rückschlüsse auf die Gesamtanzahl möglicher Aufgaben.

- Die Lernenden wählen eine Zahl, bilden ihre Umkehrzahl und schließen nur aus den gewählten Ziffern das Ergebnis, ohne es schriftlich zu berechnen.
- Die Lernenden finden gezielt Aufgaben mit einem vorgegebenen Ergebnis.
- Kartei „Was? Wie? Warum?“: Karteikarte 3 „Zusammenhänge beschreiben“ enthält weitere Impulse, wie Lernende bei der Beschreibung entdeckter Zusammenhänge unterstützt werden können.
    - Die Lernenden beschreiben die Unterschiede zwischen den gewählten Ziffern.
    - Die Lernenden beschreiben die Zusammenhänge zwischen den gewählten Ziffern und den Ergebnissen.Hierbei werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den einzelnen Aufgaben durch die Markierung mit Farben und Pfeilen in den Fokus gerückt.
    - Die Beschreibung der Zusammenhänge kann einen Ausgangspunkt für die Begründung dieser Entdeckungen bilden. Es können z. B. Plättchenbeweise zum Einsatz kommen, um die Auswirkungen des Unterschieds zwischen der Hunderter- und Einerziffer auf das Vielfache von 99 zu 0begründen.



Zusammenhänge beschreiben

Eigene Beschreibungen vornehmen **3**

Anlass: **Analogieaufgaben**

Vergleiche. Was ist gleich, was ist verschieden?

5 + 4

35 + 4

Anlass: **Rechenstrich**

0 50 100

0 500 1000

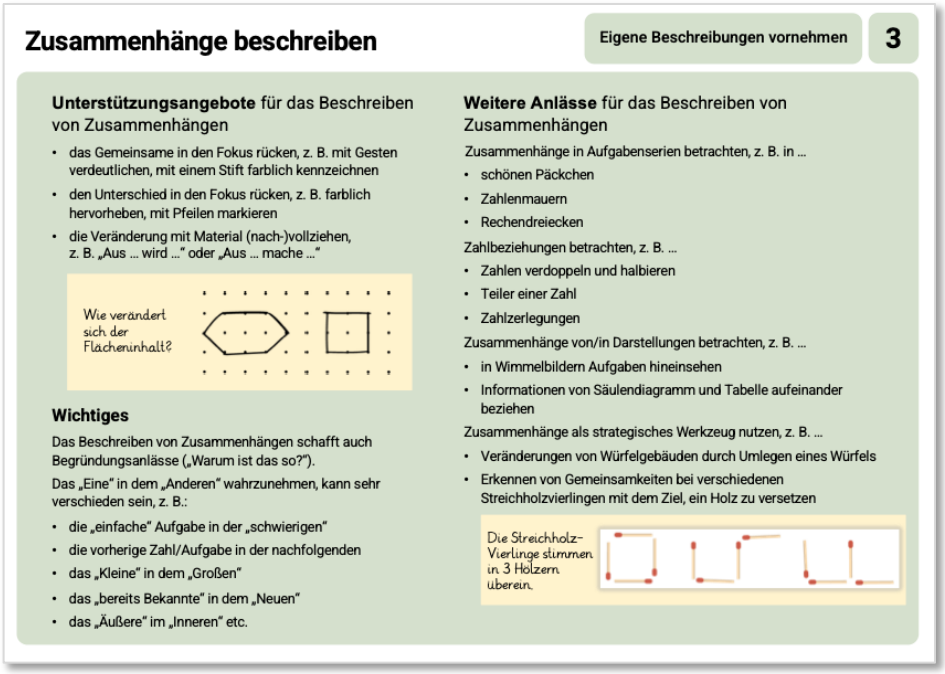
Ziel der Beschreibung von Zusammenhängen

Nicht allen Kindern sind mathematische Zusammenhänge (z. B. zwischen Aufgaben und Darstellungen) unmittelbar bewusst. Daher ist es wichtig, sie sichtbar zu machen, um ...

- sie als Rechenvorteile nutzbar zu machen.
- bereits Gesichertes in neuen Kontexten, Darstellungen etc. zu erkennen.
- langfristiges Lernen transparent zu machen („Das kenne ich schon!“, „Das brauche ich immer wieder!“)

Beispielhafte Impulse

- Zeige das, was gleich ist.
- Was verändert sich vom einen zum anderen? (z. B. „Was kommt zu 5 + 4 hinzu?“)
- Wo steckt das eine im anderen? (z. B. „Wo siehst du die einfache Aufgabe in der schwierigen Aufgabe?“)
- (Wie) Kannst du das eine für das andere nutzen? (z. B. „Wenn 50 die Mitte zwischen 0 und 100 ist, was heißt das für den zweiten Rechenstrich?“)
- Stelle die Aufgabe(n) mit Material dar und zeige die Veränderung! (z. B. „Mache aus der Aufgabe 4 + 5 die neue Aufgabe.“)



Zusammenhänge beschreiben

Eigene Beschreibungen vornehmen **3**

Unterstützungsangebote für das Beschreiben von Zusammenhängen

- das Gemeinsame in den Fokus rücken, z. B. mit Gesten verdeutlichen, mit einem Stift farblich kennzeichnen
- den Unterschied in den Fokus rücken, z. B. farblich hervorheben, mit Pfeilen markieren
- die Veränderung mit Material (nach-)vollziehen, z. B. „Aus ... wird ...“ oder „Aus ... mache ...“

Wie verändert sich der Flächeninhalt?

Wichtiges

Das Beschreiben von Zusammenhängen schafft auch Begründungsanlässe („Warum ist das so?“).

Das „Eine“ in dem „Anderen“ wahrzunehmen, kann sehr verschieden sein, z. B.:

- die „einfache“ Aufgabe in der „schwierigen“
- die vorherige Zahl/Aufgabe in der nachfolgenden
- das „Kleine“ in dem „Großen“
- das „bereits Bekannte“ in dem „Neuen“
- das „Äußere“ im „Inneren“ etc.

Weitere Anlässe für das Beschreiben von Zusammenhängen

Zusammenhänge in Aufgabenserien betrachten, z. B. in ...

- schönen Päckchen
- Zahlenmauern
- Rechendreiecken

Zahlbeziehungen betrachten, z. B. ...

- Zahlen verdoppeln und halbieren
- Teiler einer Zahl
- Zahlzerlegungen

Zusammenhänge von/in Darstellungen betrachten, z. B. ...

- in Wimmelbildern Aufgaben hineinsehen
- Informationen von Säulendiagramm und Tabelle aufeinander beziehen

Zusammenhänge als strategisches Werkzeug nutzen, z. B. ...

- Veränderungen von Würfelgebäuden durch Umlegen eines Würfels
- Erkennen von Gemeinsamkeiten bei verschiedenen Streichholzvierlingen mit dem Ziel, ein Holz zu versetzen

Die Streichholz-Vierlinge stimmen in 3 Hölzern überein.

MATHESTÄRKEN FÖRDERN

Die angebotene offene Ausgangsaufgabe fordert die Kinder auf, Umkehraufgaben zu bilden, zu berechnen, Entdeckungen zu notieren und im Sinne der prozessbezogenen Kompetenzen materialgestützt zu begründen. So zeigt sich, welche Zusammenhänge die Kinder zwischen Ausgangszahlen und Ergebnissen bereits erkennen, ob sie Mittel zum Forschen nutzen, ihre Entdeckungen darstellen und/oder versprachlichen können und inwiefern sie in der Lage sind, ihre Entdeckungen materialgestützt (Plättchen, Stellenwerttafel, etc.) begründen können. Im Folgenden wird die Aufgabe „Umkehrzahlen" auf verschiedene Art und Weisen für Kinder, die bereits weiterführende Übungen bearbeiten, angepasst.
Die Kinder werden dazu aufgefordert, Entdeckungen zu gleichen Differenzen zu verallgemeinern und allgemeine Aussagen zu Aufgabenanzahlen zu begründen. Eine weitere Aufgabenvariation ist die Übertragung des Aufgabenformats auf einen anderen Zahlenraum oder weitere Zahlenmuster, wie beispielsweise IRI-Zahlen (vgl. pikas.dzlm.de/node/712).

Umkehraufgaben mit gleichen Ergebnissen **finden** und Vorgehensweise und Entdeckungen **begründen**

- Begründen, warum alle möglichen Ergebnisse gefunden wurden: *„Ich habe alle möglichen Ergebnisse gefunden, weil 1 der kleinstmögliche Unterschied zwischen den Hunderterziffern ist und 9 der größtmögliche, wenn man mit dreistelligen Umkehrzahlen rechnet."*
  Die Aufgaben werden entsprechend der Ergebnisse sortiert und die Ergebnisse werden zusätzlich jeweils als Vielfaches von 99 notiert. Markierungen der Unterschiede zwischen der Einer- und Hunderterziffer des Minuenden können helfen, zu ermitteln, ob alle möglichen Unterschiede zwischen diesen Zahlen und damit auch alle möglichen Ergebnisse gefunden sind.

Sind das alle Ergebnisse?

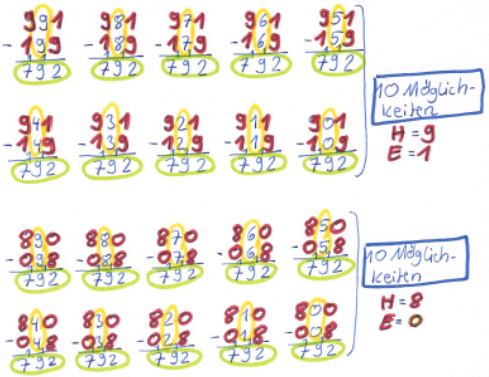
998 − 899 = 99 (1·99)	987 − 789 = 198 (2·99)	996 − 699 = 297 (3·99)	995 − 599 = 396 (4·99)
994 − 499 = 495 (5·99)	993 − 399 = 594 (6·99)	992 − 299 = 693 (7·99)	991 − 199 = 792 (8·99)
990 − 99 = 891 (9·99)			

Sollte noch ein Ergebnis fehlen:

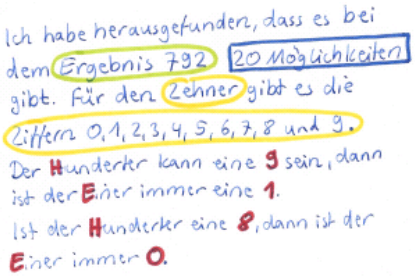
Wie konntest du herausfinden, dass ein weiteres mögliches Ergebnis … sein muss?

Wie kannst du ganz schnell eine weitere Aufgabe mit dem Ergebnis … finden?

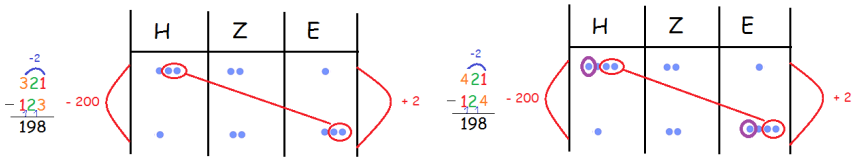
- Aufgaben mit gleichen Differenzen finden: *„Finde möglichst viele Aufgaben mit der Differenz… Hast du alle Aufgaben mit diesem Ergebnis gefunden? Erkläre."* Die Kinder können durch das Sortieren der Aufgaben herausfinden, dass es zu verschiedenen Differenzen eine unterschiedliche Anzahl an Aufgaben gibt. Mit dem Ergebnis 792 gibt es beispielsweise 10 verschiedene Aufgaben und 20 Aufgaben, wenn auch die Ziffer 0 an der Hunderter- und Einerstelle zugelassen werden.



- Vermutungen überprüfen und begründen: *„Begründe folgende Vermutung. Nutze eine Skizze oder Plättchen.“ Vermutung: „Ich vermute, dass es zu jedem Ergebnis 10 verschiedene Aufgaben gibt.“* Um die Vermutung zu begründen, können die Kinder Skizzen (z. B. Punktebilder) oder Legematerial (z. B. Plättchen) nutzen. Dabei ist es wichtig, den Kindern die Möglichkeit zu geben, ihre Begründung mündlich und materialgestützt zu erklären. Die oben genannte Vermutung ist falsch und muss widerlegt werden. (Alle Ziffernkombinationen an der Hunderter- und Einerstelle der Ausgangszahl, die einen Unterschied von 2 haben, haben das Ergebnis 198. Da für die Zehnerziffer alle Ziffern von 0 bis 9 gewählt werden können, gibt es 80 verschiedene Aufgaben mit dem Ergebnis 198.)



- Mit Hilfe von Plättchen in der Stellenwerttafel begründen, warum das Ergebnis abhängig vom Unterschied der Einer- und Hunderterziffer ist und immer ein Vielfaches von 99 ist.
- Durch die Verschiebung der Plättchen in der Stellenwerttafel die Subtraktion verdeutlichen und die Veränderung in den Blick nehmen: *„Lege die Zahl mit Plättchen in der Stellenwerttafel. Zeige die Subtraktion der Umkehrzahl durch das Verschieben der Plättchen in der Stellenwerttafel. Betrachte nun das Ergebnis. Was hat sich verändert? Um wie viel ist die Zahl größer/kleiner geworden?“*



Differenz 198 und Z=2:
Insgesamt 8 verschiedene mögliche Aufgaben, da die Differenz des H und E 2 ergeben muss (siehe Plättchenverschiebungen). In der Aufgabe entsteht eine Differenz von 2•99 = 198.

Entdeckungen in **größeren Zahlenräumen** oder durch die **Variation der Rechenvorschrift.**

- Variation der Rechenoperation – Addition dreistelliger Umkehrzahlen mit aufeinanderfolgenden Ziffern (z. B. 123+321, 234+432, ...) untersuchen: *„Bilde eine dreistellige Zahl aus drei aufeinanderfolgenden Ziffern und ihre Umkehrzahl. Addiere die beiden Zahlen. Was fällt dir auf?“ „Welche Ergebnisse kannst du erreichen? Erkläre mit der Stellenwerttafel und Plättchen.“*
- Variation der Anzahl der Stellen – Subtraktion vierstelliger Umkehrzahlen: *„Bilde eine vierstellige Zahl und ihre Umkehrzahl. Subtrahiere die beiden Zahlen. Was fällt dir auf?“*
- Entdeckungen zu dreistelligen Zahlen durch die Veränderung des Zahlenmusters: Vorgaben zur Zahlbildung verändern
    - Beispiel: IRI-Zahlen: *„Wähle zwei unterschiedliche Ziffern und bilde daraus eine Zahl nach dem IRI-Muster. Zum Beispiel werden aus den Ziffern 4 und 5 die Zahlen 545 und 454 gebildet und voneinander subtrahiert. Was fällt dir auf?“*
    - Es gibt insgesamt 45 Aufgaben zu IRI-Zahlen. Die Differenz ist immer ein Vielfaches von 91. Das Ergebnis ist, wie auch bei den Umkehrzahlen, abhängig von der Differenz der gewählten Ziffern.

    - Weitere Variationsmöglichkeiten sind AAL-Zahlen (z. B. 554-445) oder die Subtraktion von Treppenzahlen (z. B. 987-654).
    - Außerdem können vierstellige Zahlen mit verschiedenen Zahlmustern, wie beispielsweise ANNA-Zahlen (z. B. 5445-4554) oder MIMI-Zahlen (z. B. 5454-4545) gebildet und untersucht werden.
  - Ein weiteres verwandtes Aufgabenformat sind Minustürme: *„Wähle drei unterschiedliche Ziffern und bilde aus ihnen die größt- und die kleinstmögliche Zahl. Subtrahiere die kleinere von der größeren Zahl. Aus dem Ergebnis bildest du wieder die größt- und die kleinstmögliche Zahl. Rechen so weiter, bis du aus den Ziffern keine neue Zahl mehr bilden kannst."*
    - Lösungshinweis: Die Rechnung endet bei der Differenz 495. Es entstehen Minustürme mit unterschiedlicher Anzahl von Stockwerken. Der höchste Turm hat fünf Stockwerke.

5	7	9
	975 -579 396	
	963 -369 594	
	954 -459 495	

Beispiel Minusturm

LITERATUR

- Käpnick, F. (2019): *Mathe für kleine Asse 3/4*, S. 124 – 133. Berlin: Cornelsen.
- Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (2014). *Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Natürliche Zahlen.* Berlin: Cornelsen.
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2019): *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band I: Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Seelze: Klett Kallmeyer.
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2018): *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band II: Halbschriftliches und schriftliches Rechnen*. Seelze: Klett Kallmeyer

LINKS

- PIKAS: Unterricht - Gute Aufgaben - Umkehrzahlen, ANNA-Zahlen, IRI-Zahlen
- Mathe sicher können Primarstufe: Fördermaterial Schriftliche Subtraktion
- Mathe sicher können Primarstufe: Handreichung Schriftliche Subtraktion

Ausgangsaufgabe:
Bilde eine dreistellige Zahl und ihre Umkehrzahl.
Subtrahiere die kleinere Zahl von der größeren Zahl.
Was fällt dir auf?

$$\begin{array}{r} 682 \\ -\ 286 \\ \hline 396 \end{array}$$

Alle Bereiche sind eng miteinander verzahnt und bedingen sich gegenseitig.

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN AUSBAUEN

- „Was fällt dir an deiner Startzahl, der Umkehrzahl und dem Ergebnis auf? Zeige mit Mittlen zum Forschen."
- „Ordne die einzelnen Aufgaben. Erkläre, wie du geordnet hast."
- „Vermute: Welches ist die kleinste/größte Differenz, die du bei dreistelligen Minuenden finden kannst? Erkläre."
- „Vermute: Welche Differenzen können bei dreistelligen Minuenden erreicht werden? Erkläre."
- „Begründe deine Vermutung. Nutze eine Skizze oder Plättchen und die Stellenwerttafel."
- „Die Aussage: Mit diesen Aufgaben können alle Ergebnisse der Neunerreihe von 99-990 erreicht werden. Stimmt / stimmt nicht, weil …".

MATHESCHWIERIGKEITEN ÜBERPRÜFEN UND BEGEGNEN

- „Lege die Zahl. Wie viele Einer, Zehner und Hunderter hat die Zahl?"
- „Welche Zahl ist größer? Warum ist die Zahl größer? Zeige mit Material."
- „Lege die Zahl mit Plättchen in der Stellenwerttafel. Zeige die Subtraktion der Umkehrzahl durch das Verschieben der Plättchen in der Stellenwerttafel. Betrachte nun das Ergebnis. Was hat sich verändert? Wie viel ist es mehr/weniger geworden?"
- „Wenn ich zwei Plättchen aus der Hundertertafel verschiebe, dann…", „Wenn zwei Plättchen in der Einerspalte dazukommen, dann …" „Es werden 200 abgezogen und es kommen 2 dazu. Die Differenz beträgt …"
- „Was fällt dir an diesen Aufgaben auf?" „Was haben die Zahlen gemeinsam? Wie unterscheiden sie sich?" „Wie verändert sich das Ergebnis, wenn der Unterschied der Ziffern nicht 1, sondern 2 beträgt?"

MATHESTÄRKEN FÖRDERN

- Begründen, warum alle möglichen Ergebnisse gefunden wurden.
- „Finde möglichst viele Aufgaben mit der Differenz … (891, 792, …). Hast du alle Aufgaben gefunden? Erkläre."
- „Begründe folgende Vermutung. Nutze eine Skizze oder Plättchen. Vermutung: Ich vermute, dass es zu jedem Ergebnis 10 verschiedene Aufgaben gibt."
- „Lege die Zahl mit Plättchen in der Stellenwerttafel. Zeige die Subtraktion der Umkehrzahl durch das Verschieben der Plättchen in der Stellenwerttafel. Betrachte nun das Ergebnis. Was hat sich verändert? Um wie viel ist die Zahl größer/kleiner geworden?"
- „Bilde eine dreistellige Zahl aus drei aufeinanderfolgenden Ziffern und ihre Umkehrzahl. Addiere die beiden Zahlen. Was fällt dir auf?" „Welche Ergebnisse kannst du erreichen? Erkläre mit der Stellenwerttafel und Plättchen."
- Adaption der Ausgangsaufgabe durch Subtraktion von IRI-, AAL-, MIMI- oder ANNA-Zahlen
- Aufgabenformat Minustürme als Adaption

SPRACHBILDEND UNTERRICHTEN

- Relevante Sprachmittel
- Impulse zu relevanten Sprachmitteln
- Hinweise zum Festhalten, Nutzen und Erweitern relevanter Sprachmittel
- Gemeinsame Entwicklung relevanter Sprachmittel im Unterricht
- Lehrkraft als sprachliches Vorbild
- Zusammenhänge zwischen den Aufgaben und Ergebnissen beschreiben und mit Mitteln zum Forschen darstellen