

Informationen für Lehrkräfte

Schriftliche Rechenverfahren

Annica Baiker, Annabell Gutscher, Antonia Giesen, Katharina Knaudt,
Clara Schröter und Christoph Selter

August 2023

Flexibles Rechnen

Ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts der Primarstufe besteht darin, dass Lernende den flexiblen Umgang mit den unterschiedlichen Rechenmethoden *Kopfrechnen*, *halbschriftliches Rechnen* sowie *schriftliches Rechnen* lernen. Dabei sollen die Kinder nicht nur die verschiedenen Rechenmethoden sicher beherrschen, sondern auch je nach Aufgabe entscheiden können, welche dieser Methoden am sinnvollsten bzw. welcher Rechenweg für sie am geschicktesten ist. Dabei gibt es keine Methode, die grundsätzlich gegenüber den anderen Methoden bevorzugt werden sollte (auch nicht das schriftliche Rechnen). Diese Fähigkeit, aufgabenbezogen eine geeignete Rechenmethode (*Kopfrechnen*, *halbschriftliches Rechnen* oder *schriftliches Rechnen*) auszuwählen, wird flexibles Rechnen genannt.

Schriftliches Rechnen

Beim schriftlichen Rechnen werden die Ausgangszahlen systematisch nach einem vorgegebenen Algorithmus miteinander verrechnet. Das bedeutet, dass es festgelegte Rechenschritte gibt, die immer nach einem bestimmten Muster ausgeführt werden. Dabei wird ausgenutzt, dass Zahlen in ihre Stellenwerte zerlegt und diese jeweils separat miteinander verrechnet werden können. Hierbei rechnen die Kinder, im Vergleich zum halbschriftlichen Rechnen und Kopfrechnen, nicht mehr mit Zahlen, sondern mit Ziffern. Dadurch entstehen einfachere Teilrechnungen, die im kleineren Zahlraum ausgeführt werden können.

Die Verfahren des schriftlichen Rechnens basieren auf dem Stellenwert- und dem Bündelungsprinzip. Somit ist ein inhaltliches Verständnis dieser beiden Prinzipien die Grundlage für das Verständnis und die sichere Anwendung der schriftlichen Algorithmen (vgl. Radatz u. a. 1999, S. 120). Bei der verständnisbasierten Erarbeitung der schriftlichen Algorithmen sollte zudem auf die halbschriftlichen Rechenstrategien, aus denen sie abgeleitet werden können, zurückgegriffen werden. Dabei sollten sie diesen gegenübergestellt und zu ihnen in Beziehung gesetzt werden (vgl. Padberg, Benz 2011, S. 225). So kann das inhaltliche Verständnis der Verfahren gesichert und die zugrundeliegenden Funktionsweisen für die Kinder sichtbar gemacht werden.

Außerdem sollten auch die Vorzüge bzw. Nachteile des schriftlichen Rechnens gegenüber dem halbschriftlichen Rechnen thematisiert werden, um den sinnvollen Einsatz in Abhängigkeit von Merkmalen einzelner Aufgaben zu fördern. So ist von der jeweiligen Aufgabe abhängig, welches Verfahren sich anbietet. Beispielsweise bietet es sich bei der Aufgabe 701 – 698 an, die halbschriftliche Strategie des Ergänzens zu nutzen (von 698 bis zur 701 fehlen 3), anstatt das schriftliche Verfahren zu nutzen, das bei dieser Aufgabe durch den zweimal erforderlichen Übertrag vergleichsweise aufwendig und fehleranfällig ist. Auch nach der Einführung der schriftlichen Rechenverfahren im Unterricht sollten deshalb die halbschriftlichen Strategien im Sinne des flexiblen Rechnens weiterhin immer präsent und ihre Nutzung ausdrücklich erwünscht sein. Dafür spricht auch, dass die halbschriftlichen Strategien zudem die Basis für das Rechnen mit Termen und Formeln in der Sekundarstufe darstellen.

Im Folgenden werden die schriftlichen Verfahren für jede Grundrechenart ([Addition](#), [Subtraktion](#), [Multiplikation](#) und [Division](#)) erläutert und den passenden halbschriftlichen Strategien gegenübergestellt.

Subtraktion

Bei der **schriftlichen Subtraktion** werden beide Zahlen zunächst stellengerecht untereinander notiert. Beginnend bei der Einerstelle werden innerhalb der einzelnen Stellenwerte jeweils die Ziffern des Subtrahenden von denen des Minuenden subtrahiert. Die dabei entstandene Differenz wird jeweils in der entsprechenden Spalte des Ergebnisses unter dem Strich notiert. In diesem Beispiel wird das schriftliche Verfahren des **Entbündelns** genutzt. Wenn Werte in einem Stellenwert im Minuenden kleiner als im Subtrahenden sind, wird dabei ein Element des nächsthöheren Stellenwerts im Minuenden entbündelt und als 10 Elemente des entsprechend kleineren Stellenwerts notiert, sodass bei der betroffenen Stelle der Wert im Minuenden größer als der im Subtrahenden ist. Somit ergeben sich nur Teilergebnisse, die größer oder gleich 0 sind. Im nebenstehenden Beispiel ist dieser Schritt in der Zehnerstelle notwendig, da 2 kleiner als 7 ist. Aus dem nächsthöheren Stellenwert wird 1 Hunderter zu 10 Zehnern entbündelt. Die ursprüngliche Ziffer des nächstgrößeren Stellenwerts im Minuenden (hier die 3H) wird durchgestrichen und die 2 übrigbleibenden Hunderter werden darüber notiert. Die 10 Zehner werden in der Zehnerspalte über dem Minuenden notiert. Für die Subtraktion in diesem Stellenwert werden diese 10 Zehner zu den ursprünglichen 2 Zehnern addiert und als Minuend genutzt. Im nächsten Schritt stellen die 2 übrig gebliebenen Hunderter den Minuenden in der Hunderterspalte dar. Durch die stellengerechte Notation der Teilergebnisse kann das Gesamtergebnis direkt abgelesen werden.

	H	Z	E
	2	10	
	3	2	8
-	1	7	5
	1	5	3

	3	2	8	-	1	7	5	=	1	5	3
			8	-			5	=			3
	1	2	0	-		7	0	=		5	0
	2	0	0	-	1	0	0	=	1	0	0

Die schriftliche Subtraktion knüpft an die **halbschriftliche Strategie „Stellenweise“** an. Dabei werden Minuend und Subtrahend in ihre Stellenwerte zerlegt und die jeweiligen Werte voneinander subtrahiert ($E - E$, $Z - Z$, $H - H$). Die entstandenen Teilergebnisse werden schließlich zum Gesamtergebnis addiert (Ergebnis $E +$ Ergebnis $Z +$ Ergebnis H).

Ist der Minuend in einem Stellenwert kleiner als der Subtrahend, gibt es die Möglichkeit, negative Teilergebnisse zu notieren (im Beispiel wäre das $20 - 70 = -50$), die später bei der Verrechnung der Teilergebnisse subtrahiert statt addiert werden. Da bei der schriftlichen Subtraktion mit dem **Entbündelungsverfahren** jedoch *keine „negativen“ Teilergebnisse* entstehen, kann das Vorgehen nur einer angepassten halbschriftlichen Rechnung gegenübergestellt werden. Dafür müssen die Teilrechnungen so gewählt werden, dass keine negativen Teilergebnisse entstehen. Im Beispiel ist die 20 im Minuenden kleiner als die 70 im Subtrahenden. Deshalb müssen 100 von den 300 zu den 20 hinzugefügt werden und es wird bei den Zehnern mit 120 statt 20 und bei den Hundertern mit 200 statt 300 als Teilminuenden gerechnet. So entsprechen die Zahlenwerte in den Teilrechnungen der halbschriftlichen Rechnung den Werten an den entsprechenden Stellen des Minuenden der schriftlichen Rechnung, nachdem die Entbündelung an der Hundertersstelle durchgeführt wurde. In der Regel wird bei den Teilrechnungen des halbschriftlichen stellenweisen Rechnens meist mit dem größten Stellenwert begonnen. Zur besseren Gegenüberstellung mit der schriftlichen Rechnung kann im Unterricht jedoch die Reihenfolge der Teilrechnungen getauscht und wie in der obigen Abbildung angepasst werden.

Halbschriftlich – Stellenweise

- Minuend und Subtrahend nebeneinander
- Teilrechnungen untereinander
- Rechnen mit Zahlganzeheiten
- Reihenfolge: beliebig, von klein nach groß bietet sich an
- Teilergebnisse als Zahlganzeheiten
- Gesamtergebnis durch Addition der Teilergebnisse

Schriftlich

- Minuend und Subtrahend stellengerecht untereinander
- keine notierten Teilrechnungen
- Rechnen mit Ziffern
- Reihenfolge: von klein nach groß
- Teilergebnisse als Ziffern
- Gesamtergebnis direkt

Multiplikation

Bei der **schriftlichen Multiplikation** werden die Faktoren in einer Zeile nebeneinander notiert. Anschließend muss *jede Ziffer des zweiten Faktors mit jeder Ziffer des ersten Faktors multipliziert werden*. Dabei wird mit der Multiplikation des größten Stellenwerts des zweiten Faktors mit der Einerstelle des ersten Faktors begonnen. Die Teilprodukte werden entsprechend ihrer Stellenwerte unter dem zweiten Faktor angeordnet. So muss lediglich im kleinen Einmaleins gerechnet werden. Bei der Beispielaufgabe $14 \cdot 13$ wird somit bei der Zehnerstelle des zweiten Faktors begonnen. Dieser wird mit der Einerstelle des ersten Faktors multipliziert: $1 \cdot 4$ ist gleich 4. Das Teilprodukt 4 wird stellengerecht als Ziffer an der Zehnerstelle notiert. Nun wird die 1 (Zehnerziffer des zweiten Faktors) mit der nächstgrößeren Stelle des ersten Faktors multipliziert: $1 \cdot 1$ ist gleich 1. Das Teilprodukt 1 wird stellengerecht an der Hunderterstelle notiert. An den leerbleibenden Stellen kann sich eine 0 gedacht werden, die in der Regel jedoch nicht notiert wird. Danach wird mit dem nächstkleineren Stellenwert des zweiten Faktors fortgefahren (im Beispiel 3 Einer), der mit jeder Stelle des ersten Faktors multipliziert wird. Die Ergebnisse werden entsprechend in der nächsten Zeile notiert. Hierbei entsteht im Beispiel jedoch bei der Teilrechnung $3 \cdot 4$ das zweistellige Ergebnis 12. Die 2 wird an der Einerstelle notiert und die 1 wird als Übertrag für die Zehnerstelle im Sinn behalten, sodass sie im nächsten Schritt mit verrechnet werden kann. Dort ergibt sich die Teilrechnung $3 \cdot 1$. Zu dem Teilprodukt 3 muss noch die 1 aus dem Übertrag addiert werden, sodass eine 4 stellengerecht im Teilergebnis notiert wird. Zuletzt müssen die Teilergebnisse schriftlich untereinander addiert werden.

	Z	E		Z	E	
	1	4	.	1	3	
				H	Z	E
				1	4	0
					4	2
				1	8	2

	Z	E		
	.	10	3	
Z	10	100	30	
E	4	40	12	
		140	42	182

Das schriftliche Rechenverfahren der Multiplikation knüpft an die **halbschriftliche Strategie „Stellenweise“** an. Um die Anknüpfung an einzelne Teilrechnungen zu erleichtern, bietet sich eine Gegenüberstellung mit der Notationsweise im Malkreuz an. Dabei erfolgt ebenfalls eine stellenweise Verrechnung der Faktoren. Allerdings werden die Teilaufgaben und -ergebnisse beim halbschriftlichen Rechnen im Malkreuz jeweils als Zahlganzzheit notiert, während die Notation beim

schriftlichen Rechnen ziffernweise erfolgt. Die Reihenfolge, in der die Teilrechnungen erfolgen, ist im Gegensatz zum schriftlichen Verfahren beliebig. Das Malkreuz eignet sich zur Gegenüberstellung beider Rechenmethoden, da daran verdeutlicht werden kann, dass jede Ziffer des ersten Faktors mit jeder Ziffer des zweiten Faktors multipliziert werden muss. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass im Malkreuz alle einzelnen Teilprodukte notiert und später addiert werden, wohingegen bei der schriftlichen Multiplikation die Teilprodukte direkt miteinander verrechnet werden und nur die Zwischenergebnisse abschließend schriftlich addiert werden. Entsteht bei der schriftlichen Multiplikation ein zweistelliges Teilprodukt, wie bei der Teilrechnung $3 \cdot 4$, wird nur der kleinste Stellenwert des Teilergebnisses notiert, der Rest direkt gebündelt und im nächsten Schritt mitverrechnet. Das Teilprodukt 12 ist beim schriftlichen Rechnen somit z. B. nicht direkt ersichtlich, da nur die 2 notiert und die 1 direkt gebündelt und mit der 3 (den Zehnern) verrechnet wird.

Halbschriftlich – Stellenweise im Malkreuz

- Faktoren in Stellenwerte zerlegt
- Rechnen mit Zahlganzzheiten
- jeder Stellenwert des 1. Faktors mit jedem Stellenwert des 2. Faktors
- Teilergebnisse als Zahlganzzheiten
- Reihenfolge beliebig
- Gesamtergebnis durch Addition der Teilergebnisse

Schriftlich

- Faktoren nebeneinander
- Rechnen mit Ziffern
- jede Ziffer des 2. Faktors mit jeder Ziffer des 1. Faktors
- Teilergebnisse als Ziffern stellengerecht

Division

Bei der **schriftlichen Division** wird die Divisionsaufgabe zunächst wie beim halbschriftlichen Rechnen notiert. Die Rechenrichtung verläuft anders als bei den anderen Operationen, da bei der Rechnung mit dem größten Stellenwert des Dividenden begonnen wird. Ausgehend vom höchsten Stellenwert des Dividenden wird *jeweils geprüft, welches größtmögliche Vielfache des Divisors in die einzelnen Stellenwerte passt*.

Als Erstes werden in dem Beispiel somit die 6 Hunderter betrachtet. Die 4 passt einmal in die 6. Das größtmögliche Vielfache von 4, das kleiner als 6 ist, ist somit 4 und wird stellengerecht unter der 6 notiert. Die 1 (da $1 \cdot 4 = 4$) wird ziffernweise und stellengerecht als Hunderter im Ergebnis notiert. Da die 6 Hunderter nicht komplett verrechnet wurden, muss die 2 als Differenz von 6 und 4 in der nächsten Teilrechnung berücksichtigt werden. Hierfür werden diese 2 Hunderter als 20 Zehner betrachtet und mit den 2 Zehnern des Dividenden zu 22 Zehnern zusammengefasst. $5 \cdot 4$ ist gleich 20. Die 20 wird als größtes Vielfaches der 4 unter der 22 vermerkt, die 5 wird als Teilergebnis in der Zehnerstelle des Ergebnisses notiert. Die Teilrechnung in der Einerstelle erfolgt analog, sodass sich kein Rest und ein Teilergebnis von 6 ergibt.

	H	Z	E	:		=		H	Z	E
	6	2	4	:	4	=	1	5	6	
	4									
	2	2								
	2	0								
		2	4							
		2	4							
			0							

	6	2	4	:	4	=	1	5	6
	4	0	0	:	4	=	1	0	0
	2	0	0	:	4	=	5	0	
		2	4	:	4	=			6

Der schriftliche Algorithmus der Division knüpft an die **halbschriftliche Strategie „Schrittweise“** an, bei der der Dividend in geeignete Teildividenden zerlegt wird, die jeweils durch den Divisor geteilt werden. Beim halbschriftlichen Rechnen werden Teildividenden und Teilergebnisse jeweils als Zahlgantheit notiert, während die Notation beim schriftlichen Rechnen ziffernweise erfolgt. In diesem Beispiel wird bei der ersten halbschriftlichen Teilrechnung 400 als Teildividend notiert,

im schriftlichen Verfahren steht hingegen nur eine 4, welche die Anzahl an Hundertern angibt und somit die 400 repräsentiert. Die Zerlegung des Dividenden sowie die Reihenfolge der Teilrechnungen ist beim halbschriftlichen Rechnen im Gegensatz zum schriftlichen Verfahren nicht vorgegeben. Bei der Gegenüberstellung beider Vorgehensweisen sollten die Teilaufgaben jedoch so gewählt werden, dass sie den Rechnungen bei schriftlichen Algorithmus entsprechen. Abschließend müssen die Teilrechnungen beim halbschriftlichen stellenweisen Rechnens am Ende noch zum Gesamtergebnis addiert werden, während sich das Ergebnis beim schriftlichen Verfahren direkt durch die stellengerechte Notation der Teilergebnisse ablesen lässt.

Halbschriftlich – Schrittweise

- Notation von Zahlgantheiten
- Gesamtergebnis: Addition der Teilergebnisse
- Zerlegung des Dividenden flexibel
- Reihenfolge: beliebig

Schriftlich

- Notation von Ziffern (stellengerecht)
- Gesamtergebnis: direkt ersichtlich
- Zerlegung des Dividenden festgelegt
- Reihenfolge: von groß nach klein

Literatur

Padberg, F.; Benz, Ch. (2011): Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). München: Spektrum Akademischer Verlag.

Radatz, H.; Schipper, W.; Dröge, R.; Ebeling, A. (1999): Handbuch für den Mathematikunterricht 3. Schuljahr. Hannover: Schroedel.