Kinder rechnen anders

Anfang der 80er-Jahre wurde französischen Kindern im Grundschulalter folgende Textaufgabe gestellt: *Auf einem Schiff befinden sich 16 Schafe und 12 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?* Mehr als 75% von ihnen errechneten ein Ergebnis. Die meisten gaben tatsächlich *28* als Alter des Kapitäns an.

1 Das Kapitänsaufgaben-Phänomen

In Anlehnung an diese Untersuchung haben wir vor einigen Jahren deutschen Grundschülerinnen und Grundschülern vergleichbare Aufgaben vorgelegt. Die Resultate fielen ähnlich desillusionierend aus. Selbst bei unserer Aufgabe *Ein 27 Jahre alter Hirte hat 25 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Hirte?* hatten die Kinder addiert oder subtrahiert. Viele von ihnen hatten die Summe 27+25+10 berechnet. Als Begründung gaben sie an, man müsse die drei Zahlen addieren, dann wisse man, wie alt der Hirte sei.

Einige Kinder hatten aber auch die ersten beiden Zahlen zusammengerechnet und die dritte davon abgezogen (27+25–10). Diese begründeten ihr Vorgehen damit, dass zehn Ziegen weglaufen seien und man deshalb 10 subtrahieren müsse. Die Schülerinnen und Schüler hatten ihren Verstand bei der Bearbeitung dieser Aufgaben offenkundig ausgeschaltet.

Dieser Eindruck wird durch weitere Forschungsergebnisse zum Kapitänsaufgaben-Phänomen gestützt. So nahmen an einer anderen Erhebung mehr als 300 Vorschulkinder bzw. Grundschüler teil. Während von den Kindergartenkindern bzw. den Erstklässlern nur etwa 10% der Kapitänsaufgaben ‚gelöst' wurden, lagen die entsprechenden Prozentsätze bei den Schülern des zweiten Schuljahres (etwa 30%) sowie der dritten bzw. vierten Klasse (zwischen 54 und 71%) ungleich höher.

Die Vermutung liegt daher nahe, dass Mathematik von vielen Schülerinnen und Schülern mit zunehmender Schulerfahrung immer mehr als eine Art Spiel mit künstlichen Regeln, zu dem man nichts beizutragen hat, angesehen wird. Dass bestimmte Lösungen mit der Realität oder den Bedingungen einer Aufgabe nicht vereinbar sind, wird offenbar nicht erkannt.

Eine andere Sichtweise: Aber wird diese Interpretation den Kindern wirklich gerecht? Verhalten sie sich wirklich irrational? Oder deuten wir vielleicht ihr Verhalten nur so? Es könnte im Gegenteil doch auch sein, dass sie vernünftig agieren. Denn in der Schule hat jede Aufgabe normaler Weise genau eine Lösung. Ist sie nicht lösbar, so lernen Schülerinnen und Schüler oftmals, liegt das an fehlenden Kompetenzen ihrerseits, nicht an den Bedingungen der Aufgabe. Also muss man die gegebenen Daten irgendwie zu einer Rechnung verbinden. Kapitänsaufgaben werden möglicher Weise also nicht zuletzt deshalb gelöst, weil es dem Verhalten entspricht, das der Unterricht (aus der Sicht der Kinder) von Kindern erwartet.

Um diese Vermutung zu überprüfen, haben wir unsere Untersuchung einige Wochen später wiederholt, allerdings unter veränderten Bedingungen. Den Kindern wurde vorab gesagt, dass einige der Aufgaben lösbar sein würden, andere nicht. Außerdem haben wir bewusst danach geschaut, was Schülerinnen und Schüler dazu veranlasste, die Kapitänsaufgaben auszurechnen, und wie sie ihr Vorgehen rechtfertigten.

Tatsächlich gaben nun deutlich mehr Schüler an, die Aufgaben seien nicht zu berechnen. Vielen Kindern war zudem klar, dass sie die Zahlenangaben eigentlich nicht miteinander verknüpfen durften. Andererseits, so ihre Überlegung, musste die Lösung irgendwo versteckt sein: "*Eigentlich kann das nicht stimmen. Aber sonst kann man ja nichts rechnen!*"

Nicht wenige Kinder versuchten, die Aufgaben in einen anderen Zusammenhang zu stellen. Dabei entwickelten sie zum Teil originelle Erklärungen dafür, dass sie ein Ergebnis errechneten, wie etwa "*Der Hirte hat in jedem Jahr, das er gelebt hat, ein Schaf oder eine Ziege zum Geburtstag geschenkt bekommen.*" oder "*In der Aufgabe ist es halt so, dass der Hirte genauso viele Tiere hat, wie er alt ist. Kann doch sein!*"

Es erweist sich also als ein ganz entscheidender Gesichtspunkt, aus welchem Blickwinkel man das mathematische Denken der Kinder betrachtet. Entweder man sieht hauptsächlich *Fehlerhaf-*

tigkeit und Korrekturbedürftigkeit. Oder man schaut primär nach ihren *Fähigkeiten* und nimmt ihr *Entwicklungspotenzial* wahr (vgl. Spiegel & Selter 2003).

2 Kompetenzorientierung und Defizitorientierung

Die beiden unterschiedlichen Sichtweisen werden auch anhand der folgenden Episode deutlich. Die fünfjährige Sarah kann schon recht gut zählen. Stolz sagt sie die Zahlwörter bis 95 auf und fährt fort: *„96, 97, 98, 99, hundert, einhundert, zweihundert, dreihundert.*“ *„Nein, nein, das stimmt nicht. So weit kannst du noch nicht zählen. Es heißt hunderteins, hundertzwei, hundertdrei*“, wird sie unterbrochen.

So wie Sarah zählen viele Kinder irgendwann einmal. Das heißt in der Regel jedoch nicht, dass sie in Hunderterschritten (100, 200, 300, …) vorgehen. Vielmehr vollbringen sie eine kreative Leistung. Sie übertragen die Regeln, die für die Zahlen von 13 bis 99 gelten, auf größere Zahlen. Zuerst werden die Einer gesprochen: acht-und-neunzig, neun-und-neunzig, hundert, ein-und-hundert, zwei-und-hundert, drei-und-hundert usw. Das 'und' lassen die Kinder vermutlich weg, weil sie Wörter wie einhundert, zweihundert usw. schon gehört haben, ein-und-hundert dagegen nicht. Außerdem gibt es bei dreizehn oder vierzehn auch kein ‚und‘.

Wie das Verhalten der Kinder bei den Kapitänsaufgaben kann also auch Sarahs Zählweise unterschiedlich wahrgenommen, interpretiert und bewertet werden. Man kann ihr Denken und Lernen vorwiegend *defizitorientiert* sehen. Dabei orientiert man sich hauptsächlich an dem, was richtig ist, und daran, was die Kinder noch lernen müssen. Abweichungen von dieser Norm bewertet man als Defizite. Solche Fehler müssen verbessert oder – noch besser – verhindert werden.

Im Gegensatz dazu kann man das Denken und Lernen aber auch bewusst *kompetenzorientiert* wahrnehmen. Dann interessiert man sich für das, was die Kinder schon können. Man bemüht sich, ihre Denkweisen grundsätzlich als sinnvolles Vorgehen zu verstehen, den Kindern dieses wohlwollende Interesse zu signalisieren und weitere Lernprozesse darauf zu gründen.

3 Kinder denken anders

Beherzigt man Letzteres, so wird deutlich, dass Überlegungen von Kindern oft vernünftiger, organisierter und intelligenter sind, als es auf den ersten Blick den Anschein hat. In Selter & Spiegel (1997) und in Spiegel & Selter (2003) wurde an vielen Beispielen dokumentiert, dass Kinder bisweilen anders denken, …

- als Erwachsene denken
- als Erwachsene es vermuten
- als Erwachsene es möchten
- als andere Kinder und
- als sie selbst.

Da der dritte und der fünfte Punkt vermutlich am wenigsten aus sich selbst heraus sprechen, sollen sie kurz erläutert werden, während bezüglich der anderen Aspekte auf die o. a. Bücher verwiesen werden kann.

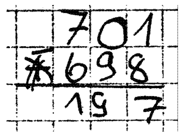
Kinder denken bisweilen anders als Erwachsene es möchten, als sie es für sie als gut empfinden und von ihnen verlangen. So berechnete die Erstklässlerin Alina einmal die Aufgabe 6+7. Sie nannte ihr Ergebnis 13 und wurde gefragt, wie sie vorgegangen sei. Die Lehrerin hatte in den Stunden zuvor das sog. Teilschrittverfahren (6+4=10; 10+3=13) behandelt. Alina hingegen erklärte ihren Rechenweg wie folgt …

> *6 und 6 ist 12, noch 1 dazu ist 13.*
> Ja, stimmt. Aber so rechnen wir das nicht. Wir rechnen doch immer zuerst bis zur 10. Wie viel musst du dann zur 6 dazutun?
> *4.*
> Prima, und wie viel musst du dann zur 10 noch dazu tun?
> *3.*
> Und warum 3?
> *Weil doch 13 als Ergebnis rauskommt.*

Die Lehrerin möchte, dass die Kinder die von ihr favorisierte Vorgehensweise als Standardmethode für das 'Rechnen über den Zehner' verwenden. Zwar ist unbestritten, dass dieses schrittweise

Vorgehen mit 'glatten Zwischenresultaten' bei der Addition *größerer* Zahlen eine wichtige Methode darstellt. Sie allerdings bereits im Zahlenraum bis 20 zum Normalverfahren machen zu wollen, kann zu Konflikten mit den Rechenwegen der Kinder führen.

Zum 5. Punkt: Kinder denken bisweilen in verschiedenen Situationen, durchaus auch in kurzer zeitlicher Abfolge, unterschiedlich. So wurde Malte im Rahmen eines Interviews die Aufgabe 701–698 gestellt.



> Wie viel ist 701–698?
> *8 minus 1 gleich 7, 9 minus 0 gleich 9, 7 minus 6 gleich 1. 197!*
> Kannst du es auch anders rechnen?
> *Ja.*
> Wie denn?
> *Von 698 bis 700 sind es 2 und von 701 bis 700 ist es 1, also sind´s 3.*
> Mhm. Die selbe Aufgabe, aber zwei verschiedene Ergebnisse?
> *Mhm, weiß auch nicht.*
> Kann denn Beides richtig sein?

Einige Kinder sehen darin keinen Widerspruch. Einmal haben sie es halt so gerechnet und einmal anders. Malte hingegen antwortet …

> *Ne.*
> Was denkst du denn, was stimmt?
> *Das da!* (zeigt auf die schriftliche Lösung mit dem Ergebnis 197)
> Warum glaubst du, dass das stimmt und das andere nicht?
> *Ja, weil das hier* (zeigt auf das schriftlich Gerechnete) *habe ich richtig ausgerechnet und das andere habe ich nur so hopp-di-hopp im Kopf überlegt.*

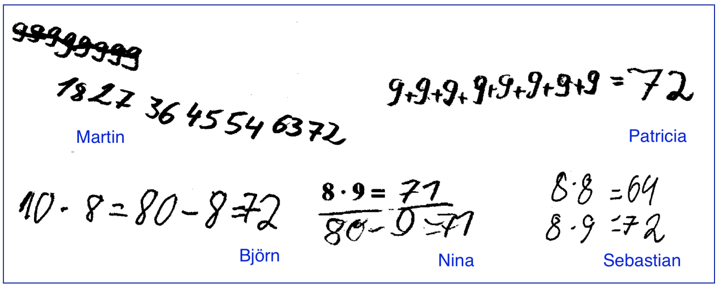
Die beiden Rechenwege mit den unterschiedlichen Ergebnissen werden von Malte also sehr wohl differenziert. Ihm ist klar, dass er sich irgendwie verrechnet haben muss. Da er sich für eine von beiden Lösungen entscheiden muss, macht er etwas für den Mathematikunterricht keineswegs Unübliches: Er vertraut dem Algorithmus mehr als dem gesunden Menschenverstand.

4 Vermitteln *zwischen* statt Vermitteln *von*

In einem Unterricht, der im beschriebenen Sinne den Kindern ein Recht auf eigenes Denken zugesteht, ist die Lehrperson keineswegs überflüssig. Ihre Hauptaufgabe besteht jedoch nicht darin, vermeintlich sichere Lösungswege vorzuführen und an Hand von Anwendungsbeispielen einüben zu lassen, sondern den Schülerinnen und Schülern *aktives Lernen* auf eigenen Wegen zu ermöglichen (vgl. Spiegel & Selter 2003). Das bedeutet unter anderem, anhand guter Aufgaben in einem anregenden Lernumfeld …

- die Kinder dazu zu ermutigen, ihr Vorwissen zu aktivieren (das ‚*Individuelle*'oder: Wie mache ich es?),
- sie dazu anzuregen, über ihre eigenen Vorgehensweisen nachzudenken und diese mit denen anderer zu vergleichen (das ‚*Soziale*' oder: Wie macht ihr es?) und
- sie schließlich dazu anzuregen und dabei zu unterstützen, zunehmend elegantere, effizientere und weniger fehleranfällige Vorgehensweisen zu entwickeln (das ‚*Reguläre*' oder: Wie macht man es?).

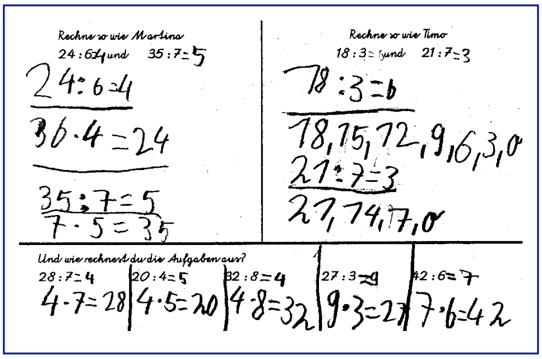
So rechne ich!



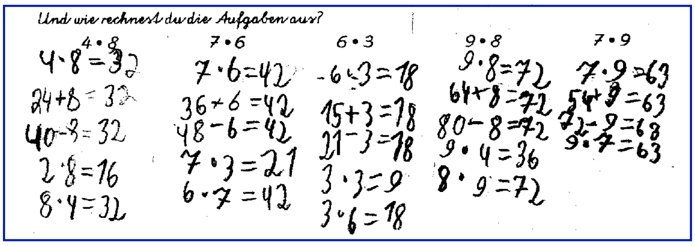
Wie kann man nun die Schülerinnen und Schüler dazu anregen, *eigene Vorgehensweisen* zu aktivieren und zu zeigen? Beispielsweise, indem man ihnen Aufgaben stellt und sie bittet, ihren Lösungsweg aufzuschreiben. Martin zählt, Patricia addiert jeweils 9, und die anderen drei Kinder leiten das Resultat von anderen Aufgaben ab, die sie bereits kennen.

Wie kann man die Schülerinnen und Schüler dazu anregen, *andere Vorgehensweisen* kennen zu lernen? Beispielsweise, indem sie Aufgaben so zu rechnen, wie andere Schüler es getan haben. Im Beispiel rechnen Martina und Timo – zwei fiktive Kinder – Geteiltaufgaben immer durch Anbindung an die Multiplikation bzw. durch schrittweise Subtraktion mit Notation der jeweiligen Zwischenergebnisse. Die Schülerinnen und Schüler sollen zunächst so rechnen wie Martina und Timo, bevor sie dann bei fünf weiteren Aufgaben selbst ihren Rechenweg bestimmen.

Rechne wie …



Rechne geschickt



Wie kann man die Schülerinnen und Schüler dazu anregen, *effizientere Vorgehensweisen* kennen zu lernen? Beispielsweise, indem sie eine Aufgabe auf verschiedene Weisen lösen und dann über die Vor- und Nachteile des einen oder anderen Wegs nachdenken.

4 Und die Unterrichtsqualität?

Niederländische Untersuchungen, die die Konzeption des aktiven Lernens mit der Methode des Vormach-Nachmach-Unterrichts verglichen haben, ergaben übrigens vergleichbare Leistungen in Bezug auf Kenntnisse (wie das Einmaleins) und auf Rechenfertigkeiten (wie die schriftliche Addition). Festzustellen waren jedoch beim aktiven Lernen zum Teil deutlich bessere Resultate bei komplexen und bei realitätsnahen Aufgaben.

Um nicht missverstanden zu werden: Mit den Augen der Kinder zu schauen und ihnen Möglichkeiten zur Mitgestaltung ihrer Lernprozesse zu geben, sollte nicht mit Kindzentrierung gleichgesetzt werden. Unterricht vorrangig vom Kinde aus – das hat uns das 'Scheitern' großer Teile der reformpädagogischen Bewegung bereits in den 20er-Jahren gelehrt – wäre ebenso verfehlt, wie den Stoff als Maß aller Dinge zu nehmen, ihn aus der Erwachsenenperspektive vorzuportionieren und den Schülern teelöffelweise einzuflößen.

Nötig sind daher Strukturen in einem offenen Unterricht. Guter Mathematikunterricht profitiert vom produktiven Spannungsverhältnis von *Offenheit* und *Konzept*. Er baut auf vorhandenen Kompetenzen auf. Gleichzeitig ist er zielgerichtet und konzeptionell fundiert. Aber das Konzept ist *bottom up* angelegt, nicht *top down*.

Die Lehrperson fungiert nach wie vor als Vermittler, wenn auch nicht im herkömmlichen Sinn. Es geht nicht um die Vermittlung *von* Mathematik an Kinder. Statt dessen gilt es, *zwischen* Mathematik und Kindern zu vermitteln.

Literatur

Selter, Christoph & Hartmut Spiegel (1997): *Wie Kinder rechnen*. Leipzig: Klett.

Spiegel, Hartmut & Christoph Selter (2003): *Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten*. Seelze: Kallmeyer.