



## Mit Fehlern muss gerechnet werden

Gerade in Mathematik ist die Auffassung weit verbreitet, dass Fehler etwas Bedrohliches, Störendes und daher möglichst zu Verhinderndes bzw. bei Auftreten umgehend zu Beseitigendes seien. Das Zitat des Mathematikers de Morgan (1833, zitiert in Wittmann & Müller 1994, S. 25-26) deutet eine sehr bedenkenswerte Gegenposition an:

*Die Erwachsenen müßten dieselbe Nachsicht und dieselbe Bewunderung, mit der sie die Sprachentwicklung von Kindern gewöhnlich begleiten, auch für die Entwicklung des mathematischen Denkens aufbringen. ... Die ersten unbeholfenen Versuche des Kleinkindes, ‚Papa‘ und ‚Mama‘ auszusprechen, werden jubelnd begrüßt, als wenn sich darin eine vielversprechende Rednerbegabung ausdrückte. Die ersten Versuche des kleinen Zahlenrechners dagegen, der überlegt, ob ‚6 plus 5‘ das Ergebnis 13, 8, 7 oder 10 haben könnte und nicht zielgerichtet auf die 11 zusteuert, wecken bei Erwachsenen oft ganz und gar nicht die Vision auf einen späteren Nobelpreisträger und werden keineswegs mit Sympathie verfolgt. Im Gegenteil, das Kind erntet mehr oder weniger leisen Tadel, weil es angeblich unaufmerksam ist oder sich dumm anstellt.*

In dem von de Morgan ausgedrückten Sinne geht es uns darum, auch oder gerade für Mathematik eine andere Sichtweise auf Fehler zu fordern: Fehler sind natürliche Bestandteile jeden Lernprozesses. Mit Fehlern muss gerechnet werden! Weitere Ausführungen hierzu in Spiegel & Selter (2003).

### 1 Fehler sind normal

Im Alltag gilt es als normal, Fehler zu begehen, insbesondere wenn man den altbekannten, wohl vertrauten Weg verläßt. Denn Kreativität und ‚Fehler‘ sind voneinander kaum zu trennen (Kahl 1995, 21).

*In der deutschen Industrie haben die Durchbruchinnovationen erschreckend abgenommen ... Die meisten Führungsteams sind von erschreckender Einseitigkeit ... Das schlimmste Übel aber ist der Mangel an guten Ideen.“ (aus der Studie einer Unternehmensberatung). ... Kreative Leute ... machen ständig neue Fehler. Dumme wiederholen dauernd die gleichen. Und die Mehrheit der Braven versucht, Fehler zu vermeiden, aus lauter Angst, daß nicht nur der Fehler falsch ist, sondern daß sie selber minderwertig seien ... Das Glaubensbekenntnis aller Schulweisheit heißt: es gibt nur eine Lösung.*

In der Schule hingegen dominieren häufig die Prinzipien der Isolierung der Schwierigkeiten und der kleinen und kleinsten Schritte. Durch die Verpflichtung auf einen vorgegebenen und scheinbar so sicheren Weg will man Schülern Fehler ersparen. Unterricht – gerade in Mathematik – wird oft deshalb so aufgebaut, dass Fehler möglichst vermieden werden. Begehen die Kinder – aus der Erwachsenenperspektive geurteilt – einen Fehler, so glaubt man, diesen sofort korrigieren oder dessen Auftreten in Zukunft weniger wahrscheinlich machen zu müssen. Das ist jedoch häufig ein Fehler, wie die Geschichte von Lennart zeigt.

Der Erstklässler Lennart spielt mit seiner Tante ein Spiel. Er denkt sich ein Wort aus, das diese erraten muss. Dabei malt er als Platzhalter für die Buchstaben kleine Striche nebeneinander. Die Tante muss nun die Buchstaben erraten. Wenn Sie einen Buchstaben nennt, der nicht in dem Wort enthalten ist, darf Lennart sich einen Punkt gut schreiben. Hat er 10 Punkte erreicht, hat er gewonnen, errät die Tante das Wort vorher, ist sie die Gewinnerin.

Einige Minuten vergehen. Die Tante hat drei von vier Buchstaben erraten. Auf Lennarts Blatt steht E N    E. Die Tante denkt zunächst, das D sei der fehlende Buchstabe, dann entscheidet sie sich für das T, schließlich das G. Jeder Buchstabe bringt Lennart einen Punkt mehr.

Mittlerweile steht die gesamte Verwandtschaft um den Tisch herum und rät fieberhaft mit. Lennart ist kein besonders guter Schüler. Man spürt, dass er vor Stolz förmlich



platzt, weil die versammelten Erwachsenen es nicht schaffen, sein Wort zu erraten. Schließlich bittet ihn die Tante, seine Lösung zu verraten.

Er schreibt ein I an die freie Stelle: E N I E. Ratlosigkeit ringsherum. Lennart ruft belustigt in die Runde: „Ernie, dass Ihr das nicht ‘rausgekriegt‘ habt! Ernie aus der Sesamstrasse!“ Vor Freunde klatscht er in die Hände. „So schreibt sich das aber nicht,“ schaltet sich der Vater ein, den es offensichtlich ärgert, dass sein Sohn aufgrund einer ‚Regelverletzung‘ (falsche Schreibweise) das Spiel gewonnen hat. „Ernie schreibt man mit fünf Buchstaben – E, R, N, I, E! Du musst auch Wörter nehmen, die du auch schon schreiben kannst, wie MAMA oder LILA.“

Lennarts Freude und Stolz sind wie weggeblasen. Er hat keine Lust mehr, weiter zu spielen, und setzt sich auf einen Stuhl in der anderen Ecke des Raumes. Dabei hatte er schon so viel richtig gemacht!

Für die Schule – oder generell für das Lernen – sollte gelten, was auch für den Alltag gilt: dass wir nicht lernen können, wenn wir keine Fehler machen dürfen. Fehler sind normale Begleiterscheinungen eines entdeckenden Lernprozesses. Allerdings greift das Sprichwort ‚Aus Fehlern wird man klug‘ zu kurz. Es kommt schon auf den intelligenten Umgang mit Fehlern an.

## 2 Fehler sind fast immer vernünftig

Fehler sind selten zufälliger Natur, sondern machen in der Regel durchaus Sinn (Radatz 1980). Es gibt für Schüler häufig einen ‚guten Grund‘, Fehler zu machen, wie auch die folgende Geschichte vom ‚Phantom der Oper‘ zeigt.

### *Phantom der Oper*

„Das ist aber ein komischer Name“, sagt der fünfjährige Dominic zu seinem Vater. „Was ist ein komischer Name?“ fragt dieser zurück. „Phantom. Hast du das gerade nicht im Radio in der Werbung gehört?“ „Wie? Phantom?“ „Ja, Phantom, der Opa. Hießen die Leute eigentlich früher oft so?“

Natürlich schmunzelt man darüber, wie Dominic den Namen des Musicals versteht. Bewusst haben wir nicht ‚missversteht‘ geschrieben, da wir zum Ausdruck bringen wollten, dass er ausgehend von dem, was er weiß, durchaus vernünftig denkt, nur eben nicht so, wie wir Erwachsenen es tun. Es lohnt also, zunächst einmal verstehen zu wollen, wie ein Kind gedacht hat, anstatt das Denken sofort zu bewerten und eindeutig nach richtig oder falsch zu klassifizieren.

Drei weitere Beispiele sollen zeigen, dass hinter Fehlern häufig vernünftiger Überlegungen stecken, als man mit flüchtigem Blick vermuten würde. Leonie sagt: „Weil  $7+5=14$  ist, ist  $8+3=13$ “. Sie erhöht also den ersten Summanden um 1 und vermindert den zweiten um 2, was sich – wie sie ganz richtig erkannte – in einer Verminderung des Ergebnisses um 1 bemerkbar macht. Leider geht sie dabei von einem falschen Resultat für die erste Aufgabe aus.

Eine ebenfalls nicht so offensichtliche, aber durchaus interessante Erscheinungsform ‚vernünftiger‘ Fehler ist dadurch gekennzeichnet, dass Prozeduren oder Beziehungen auf Bereiche übertragen werden, in denen sie nicht anwendbar sind. Saskia beispielsweise meint: ‚Ich teile eine Zahl durch 24, indem ich sie erst durch 20 und durch 4 teile und die Ergebnisse dann zusammenzähle.‘ Sie dehnt dabei also vermutlich die Strategie, eine Malaufgabe durch die Berechnung von Teilprodukten mit anschließender Addition zu lösen ( $24 \cdot x = 20 \cdot x + 4 \cdot x$ ), auf die Division aus, bei der sie aus verständlichen Gründen nicht greift.

Ein drittes Beispiel verdeutlicht, dass nicht selten auch aus der Sicht des Kindes vernünftige Regelbildungsprozesse Fehler verursachen können (vgl. auch das Beispiel von Sarah in der Einleitung). Der sechsjährige Erwin zählt von 83 an weiter: „83, 84, 85, 87, ... 89, ... elfzig, ... einundelfzig, dreiundelfzig, sechsundelfzig.“ Seine Wortschöpfung ‚Elfzig, einundelfzig, ...‘ ist ein Beispiel für eine der Konvention nicht entsprechende, aber unsere Regeln einbeziehende Konstruktion.

Natürlich wird man nicht alle Fehler erklären und als intelligente Leistungen würdigen können. Der Fehler darf nicht wichtiger werden als die korrekte Lösung. Aber man wird erstaunt sein, wieviel Rationalität häufig im scheinbar irrationalen Vorgehen und Denken von Schülern zu erkennen ist.



### 3 Fehler sind häufig systematisch

Bei schriftlichen Rechenverfahren sind in fast 80% der Fälle Fehler nicht auf Zufall oder zurückzuführen, sondern unterliegen Regelhaftigkeiten, sog. Fehlermustern, die immer wieder auftauchen und auf 'falschen' Regelbildungsprozessen beruhen. (vgl. Abb. aus Radatz 1980, 76 & 80). Jeweils zwei nebeneinander stehende Aufgaben sind nach dem gleichen Lösungsprinzip berechnet worden. Finden Sie es heraus? Auch in anderen Bereichen des Mathematikunterrichts ist im Übrigen ein hoher Anteil von Fehlern auf nicht regelgemäße, aber systematische Überlegungen zurückzuführen.

Beispiele	Wie heißt die Fehllösung?
A 1: $\begin{array}{r} 618 \\ + 782 \\ \hline 1112 \end{array}$	$\begin{array}{r} 612 \\ + 395 \\ \hline \end{array}$
A 2: $\begin{array}{r} 854 \\ + 432 \\ \hline 286 \end{array}$	$\begin{array}{r} 609 \\ + 892 \\ \hline \end{array}$
A 3: $\begin{array}{r} 854 \\ + 432 \\ \hline 422 \end{array}$	$\begin{array}{r} 598 \\ + 209 \\ \hline \end{array}$
A 4: $\begin{array}{r} 308 \\ + 291 \\ \hline 509 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7045 \\ + 2938 \\ \hline \end{array}$
A 5: $\begin{array}{r} 618 \\ + 782 \\ \hline 1390 \end{array}$	$\begin{array}{r} 662 \\ + 789 \\ \hline \end{array}$
A 6: $\begin{array}{r} 476 \\ + 17 \\ \hline 583 \end{array}$	$\begin{array}{r} 758 \\ + 129 \\ \hline \end{array}$
A 7: $\begin{array}{r} 746 \\ + 563 \\ \hline 2119 \end{array}$	$\begin{array}{r} 628 \\ + 690 \\ \hline \end{array}$
A 8: $\begin{array}{r} 563 \\ + 645 \\ \hline 11108 \end{array}$	$\begin{array}{r} 675 \\ + 494 \\ \hline \end{array}$

Fehler sind also häufig *sinnvoll* in dessen doppelter Wortbedeutung. Erstens sind sie *voller Sinn*, weil es sich um Versuche handelt, die Wirklichkeit zu strukturieren und zu verstehen. Kinder machen sich häufig einen 'anderen Reim auf die Dinge'.

Zweitens macht das Auftreten von Fehlern *Sinn*, weil man daraus lernen kann: Lernfortschritte ereignen sich häufig dann, wenn das vorhandene Denk- und Verhaltensrepertoire nicht ausreicht, um eine Situation, eine Aufgabe für sich selbst oder für andere zufriedenstellend zu bewältigen.

Wir sind der Auffassung, daß man das Denken der Kinder empfindlich stören kann, wenn man sie bei Fehlern *sofort* zu korrigieren versucht. Dies bedeutet aber nicht, darauf zu verzichten, sie zu einer in unserem Sinne korrekten Sprech- und Schreibweise hinzuführen.

Im Moment des Auftretens handelt es sich allerdings um authentische Ausdrucksformen der Kinder, die das Richtige meinen können und die wir – genauso wie die ‚fehlerhaften‘ Schreibprodukte



im Sprachunterricht des ersten Schuljahres oder die 'nicht korrekten' Äußerungen beim Sprechenlernen – in ihrer Vorläufigkeit wahrnehmen und würdigen sollten.

Insofern sollte es nicht zu einem systematischen Fehler von Lehrpersonen werden, fehlerhaft erscheinenden Denkweisen von Kindern prinzipiell zu misstrauen, wie aus der folgenden Geschichte von John Holt (1969, 110-111) deutlich wird, mit der wir schließen wollen:

*Neulich erkannte ich beim Hospitieren im Unterricht einer Lehrerin blitzartig, was an unserm gesamten Lehrbetrieb falsch ist. Während der letzten Ferien besuchte ich eine Schule, in der noch unterrichtet wurde. Sie steht im Ruf, sehr "gut" und "streng" zu sein. Die recht nette Direktorin fragte mich, wo ich unterrichtet hätte. Als ich es ihr mitteilte, bemerkte sie mit gespielter Bescheidenheit: "Ich fürchte, Sie werden uns sehr altmodisch finden." Aber sie war sehr entgegenkommend und drängte mich besonders, den Rechenunterricht einer Lehrerin der vierten Klasse zu besuchen. Sie unterrichtete schon viele Jahre, gelte als ein Juwel von Lehrerin und sei der Stolz der Schule. Ich ging hin. Die Stunde begann gleich, nachdem ich gekommen war. Die Kinder hatten einige Multiplikationsaufgaben ausgerechnet und lasen aus ihren Heften die Ergebnisse vor. Alles ging glatt, bis ein Kind, sofort nachdem ein anderes seine Lösung gesagt hatte, sich meldete. "Was ist, Jimmy?" fragte die Lehrerin mit jenem leichten Unterton in der Stimme, der besagte, daß diese Unterbrechung eigentlich nicht nötig sei. "Ich hab' eine andere Lösung," sagte Jimmy, "ich hab'..." -, aber ehe er noch ausreden konnte, sagte die Lehrerin: "Nun, Jimmy, niemand möchte falsche Lösungen hören." Jimmy sagte dann kein Wort mehr.*

*Diese Frau ist den meisten Lehrern an Intelligenz, Bildung und Erfahrung weit voraus. Sie ist ausgeglichen, kultiviert, hat eine gute Ausbildung genossen und ist mit einem Universitätsprofessor verheiratet. Aber in den zwanzig oder mehr Jahren, in denen sie unterrichtet, ist ihr offenbar nie der Gedanke gekommen, es könne sich lohnen, sich dann und wann einen Augenblick Zeit zu nehmen und die erfolglosen Jimmys mit ihren falschen Antworten anzuhören, die Chance zu nutzen, etwas über deren Denkweise zu erfahren, und wie ihre falschen Antworten zustande kommen. Wie ist es möglich, daß jeder sie als eine gute Lehrerin bezeichnet? Ich vermute, es liegt daran, daß sie mühelos mit Kindern fertig wird. Wahrscheinlich meinen sogar die Jimmys, sie sei eine gute Lehrerin. Es wird ihnen nie einfallen, es für den Fehler dieser netten Dame zu halten, daß sie das Rechnen nicht verstehen; nein, es muß ihr eigener Fehler sein, weil sie eben so dumm sind.*

## Literatur

- Holt, John (1969): Chancen für unsere Schulversager. (engl.: How Children Fail) Freiburg i.Br.: Lambertus.
- Kahl, Reinhard (1995): Lob des Fehlers. In: Hans Brügelmann, Heiko Balhorn & Iris Füssenich (Hg.): Am Rande der Schrift. Lengwil: Libelle, S. 14-24.
- Radatz, Hendrik (1980): Fehleranalysen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg.
- Selter, Christoph & Hartmut Spiegel (1997): Wie Kinder rechnen. Leipzig: Klett.
- Spiegel, Hartmut & Christoph Selter (2003): Kinder und Mathematik – Was Eltern wissen sollten. Seelze: Kallmeyer.
- Wittmann, Erich Ch. & Gerhard N. Müller (1994): Das Zahlenbuch, 1. Schuljahr. Lehrerhandbuch. Leipzig: Klett.