Hintergrundinformationen zu AB 2, Modul 9.1: Die Bonbonaufgabe

Nicht nur für Schulanfänger, sondern auch für ältere Schüler gilt, dass sie von dem, was sie im Unterricht erwartet, schon einiges wissen und können: Bei jedem der zentralen Themen des Grundschulrechnens kann man davon ausgehen, dass die Kinder keine "tabulae rasae" sind, sondern dass sie ihr bis dahin erworbenes Wissen einsetzen, um Probleme zu lösen, für die – aus der Erwachsenenwarte aus betrachtet – eigentlich die Kenntnis einer neuen Rechenoperation erforderlich ist.

Normalerweise werden den Schülern z. B. keine Aufgaben gestellt, die Aufteil- oder Verteilstruktur aufweisen, bevor die Division im Unterricht behandelt worden ist. Wenn man dieses allerdings doch tut und sich die Mühe macht, genauer hinzuschauen, kann man über die Vielfalt der Methoden staunen, mit denen sich Kinder helfen, solange sie noch keinen automatisierten Zahlensatz oder ein standardisiertes Verfahren zur Verfügung haben.

Dieses wollen wir anhand eines Beispiel illustrieren: Wir berichten über die Ergebnisse einer Standortbestimmung zum multiplikativen Rechnen, im Rahmen derer 21 Zweitklässlern vor Beginn der entsprechenden Unterrichtsreihe in Einzelinterviews u. a. Textaufgaben mit multiplikativer Struktur gestellt wurden (vgl. Selter 1994, 114 ff.). Vergleichbare Standortbestimmungen sind im übrigen auch mit einem geringeren Aufwand im Rahmen des normalen Unterrichts durchführbar.

Es existieren ganz unterschiedliche Möglichkeiten, eine solche Standortbestimmung zu gestalten. Hier wurde folgendes Vorgehen gewählt:

Die Kinder bekamen insgesamt sechs Textaufgaben zur Multiplikation und zur Division gestellt. Sie lasen die jeweils schriftlich dargebotene Aufgabe zunächst leise für sich, dann einmal laut vor. Bei Verständnisschwierigkeiten umschrieb der Interviewer den Wortlaut, gab darüber hinaus jedoch keine weiteren Lösungshilfen.

Im Gegensatz zum sich anschließenden Unterricht wurde bewusst kein Materialgebrauch nahegelegt (, allerdings auch nicht verhindert), um die Kinder zur Produktion schriftlicher Dokumente anzuregen. Die Nutzung von Material hätte bei einigen Kindern leicht differierende Vorgehensweisen, nicht aber fundamental andere Denkstrategien hervorgerufen, wie sich in den weiteren Unterrichtswochen zeigte.

Im folgenden wollen wir uns auf die Denkwege der Kinder bei der Bearbeitung einer der insgesamt sechs Aufgaben, der sog. ‚Bonbonaufgabe', konzentrieren:

‚In einer Tüte sind 24 Bonbons. 3 Kinder teilen sich die Bonbons.'

Hierbei handelt es sich um eine Aufgabe mit Verteilstruktur. Wir betonen dieses, da Erwachsene den Unterschied zwischen Verteil- und Aufteilaufgaben in der Regel gar nicht bemerken. Für sie handelt es sich in beiden Fällen um dieselben Aufgaben (hier: 24:3), für die sie die Antwort (hier: 8) entweder schon automatisiert haben oder sich durch Rückgriff auf 8·3=24 oder 3·8=24 verschaffen. Für Kinder kann der Unterschied zwischen Aufteil- und Verteilaufgaben eine große Rolle spielen, auch wenn er ihnen nicht bewusst sein mag (vgl. Kap. 2.4).

Die Schülerlösungen werden im folgenden jeweils einem der drei Typen ‚Lösung durch *Wissen, Rechnen bzw. Schätzen*', ‚Lösung durch *Zählen mit Hilfe von Zeichnungen*' sowie ‚*fehlerhafte* Bearbeitung' zugeordnet. Diese Kategorisierung ist problemlos möglich. Denn zum einen waren die wenigen Bearbeitungen, die *zählend*, aber *ohne* Zuhilfenahme von Zeichnungen, erfolgten, *fehlerhaft* und sind somit dem dritten Typ zuzuschlagen. Und es zum anderen gab es *keine* korrekten Lösungen, bei denen die Schüler *rechneten* und *Zeichnungen* benutzten.

Lösungen durch Wissen, Rechnen bzw. Schätzen: Neun Schüler lösten die Aufgabe unter Rückgriff auf die Addition und drei mit Hilfe der Subtraktion. Fünf derjenigen Kinder, die addierten, bildeten – verteilnah vorgehend – jeweils Summen aus drei gleichgroßen Zahlen (Abb. 3). *Manuela* und *Sebastian* gaben jeweils spontan an, jedes Kind erhielte acht Bonbons, und notierten auf Nachfrage zwei (*Manuela*: 8+8=16; 16+8=24) bzw. eine Gleichung(en) (*Sebastian*: 24:3=8). *Sebastian* gab zwar anschließend noch an, das Resultat additiv erhalten zu haben, doch ist es sehr wahrscheinlich, dass er den entsprechenden multiplikativen Zahlensatz (3·8=24) bereits auswendig verfügbar hatte.

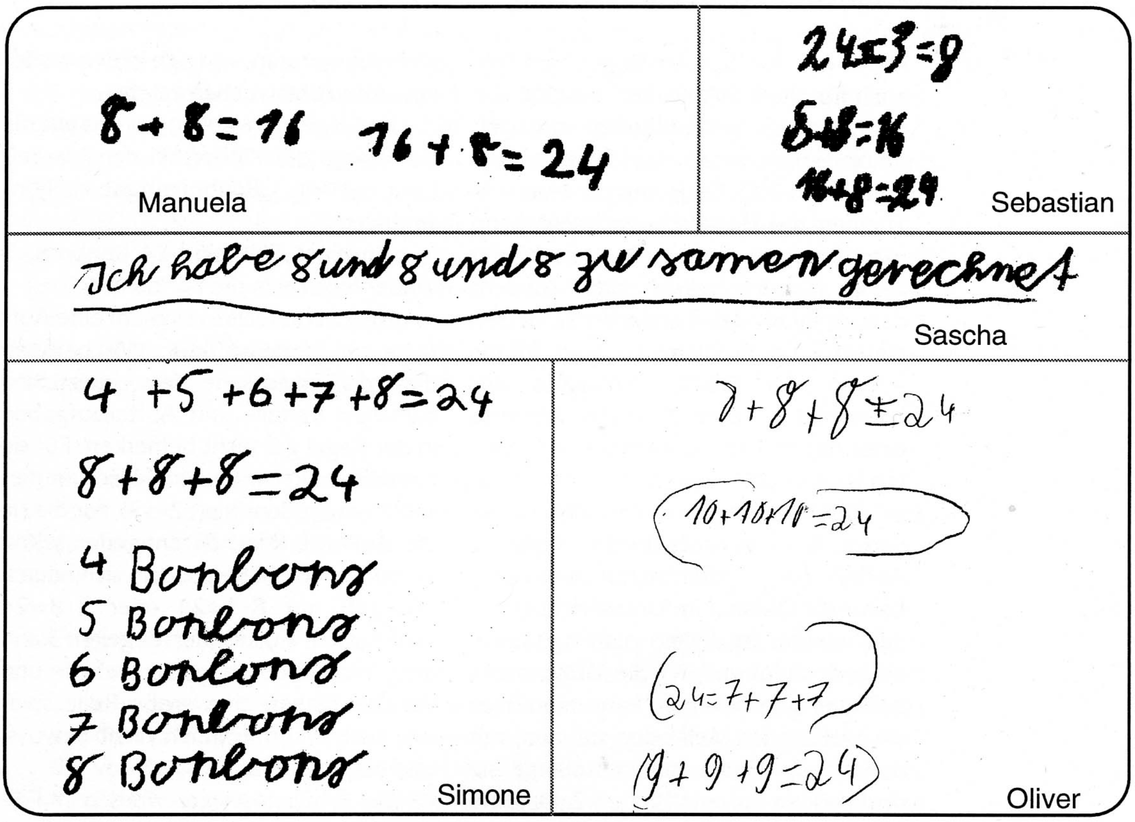

Abb. 1: Lösungen durch Addition dreier Summanden

Sascha nannte die Antwort ‚8' zwar nicht direkt, bildete die Summe ‚8+8+8' jedoch zielgerichtet und verschriftlichte anschließend sein Vorgehen: ‚Ich habe 8 und 8 und 8 zusammengerechnet.'

Simone benutzte ebenfalls aus *genau* drei Summanden bestehende Terme: Sowohl die ‚Gleichung' ‚4+5+6+7+8=24' als auch ihr Kommentar ‚4 Bonbons, 5 Bonbons, …, 8 Bonbons' sollten verdeutlichen, dass sie zunächst drei Teilmengen mit vier, dann mit fünf, dann mit sechs Bonbons usw. gebildet und die Gesamtzahl der so verteilten Bonbons jeweils additiv überprüft hatte.

Kaum anders gestaltete sich *Olivers* Herangehensweise: Er zerlegte zunächst die ‚24' in drei ‚Siebener' und errechnete, dass deren Gesamtsumme etwas kleiner war als 24. Dann klammerte er diese Gleichung ein und startete mit ‚9+9+9=24' einen neuen Versuch. Dass die Gesamtsumme nun zu groß wurde, veranlasste ihn jedoch nicht dazu, die drei Summanden jeweils zu vermindern. Statt dessen notierte er die Zerlegung ‚10+10+10=24', erkannte jedoch, dass die linke Seite der ‚Gleichung' nun erst recht zu groß war, und erhielt im nächsten Schritt die gleichmäßige Verteilung (‚8+8+8=24').

Eine andere Vorgehensweise bestand darin, Summen zu bilden, die nicht unbedingt aus *genau drei* Summanden bestehen mussten, um dann durch *Variationen* der Zahlenwerte zur Lösung zu kommen (vgl. Abb. 4): *René* und Benni beispielsweise berechneten zunächst, jedes Kind erhielte sechs Bonbons, wenn es vier Kinder wären. Dann verteilten sie die sechs Bonbons, die dem vierten Kind zukamen, gerecht auf die drei anderen und erhielten auf diesem Wege das korrekte Resultat.

Auch *Markus* benutzte Zerlegungen mit nicht konstanter Summandenzahl, die er allerdings ohne Pluszeichen notierte: Er verteilte die 24 Bonbons zunächst an zwei Kinder, so dass jedes zwölf erhielt. Sodann vermutete er, dass das *Hinzukommen* einer dritten Person die Konsequenz habe, dass jede *ein Bonbon mehr* bekomme. Das deutete er durch die Notation einer 13 rechts neben der 12 an. Diese Überlegung verwarf er jedoch ziemlich schnell und nahm an, die Konsequenz wäre, dass jedes Kind ein Bonbon weniger erhielte. Somit schrieb er die Zerlegung ‚11+11+11' hin, bemerkte jedoch, dass die Summe zu groß war.

Er versuchte daher weiterhin, drei gleichgroße Summanden zu finden, die sich zu ‚24' ergänzten (‚9+9+9'; ‚4+4+4'). Da diese Strategie jedoch nicht den gewünschten Erfolg hatte, wechselte er die Denkweise und ging nun von der Gesamtzahl ‚24' aus, die er auf verschiedene Arten in nicht notwendigerweise gleichgroße Summanden (‚10+10+4'; ‚5+5+5+5+4') aufspaltete. Anschließend änderte er wiederum sein Vorgehen und überprüfte jeweils additiv, ob die Summe zweier bzw. dreier gleichgroßer Summanden ‚24' ergab (‚12+12'; ‚11+11+11' (abgebrochen); ‚9+9+9'; ‚4+4+4'). Zu guter Letzt wechselte er nochmals das Denkmodell, zerlegte die ‚24' in vier nicht gleichgroße Summanden (‚4+8+4+8'), stutzte einen Moment und erhielt schließlich die Lösung, als er zwei Vierer zu einem Achter zusammenfasste.

Auch *Patricia* ging zunächst nicht von drei gleichgroßen Summanden aus, sondern zerlegte die ‚24' in vierzehn Summanden – drei Fünfen und neun Einsen. Dann strich sie die ersten drei Einsen durch und notierte jeweils eine von ihnen unterhalb jeder der drei Fünfen. Die restlichen Einsen verteilte sie schrittweise analog und fasste zum Schluss eine ‚5' sowie drei Einsen jeweils zu einer ‚8' zusammen.

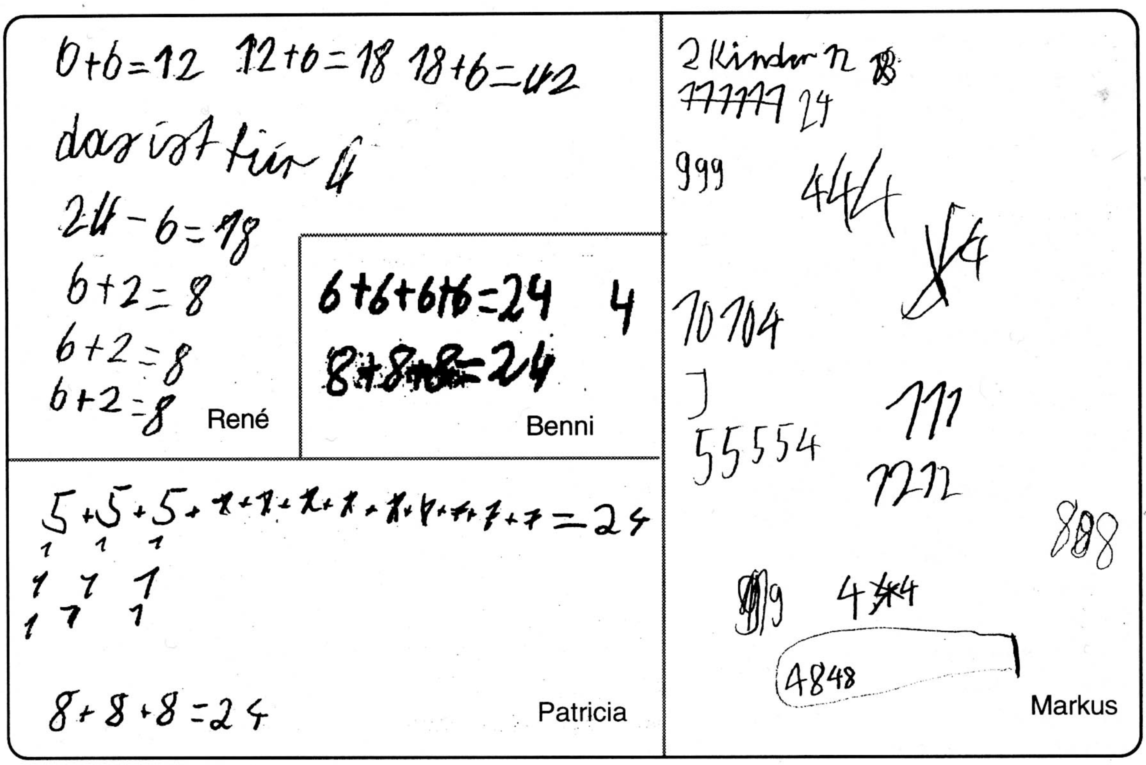

Abb. 2: Lösungen durch Addition mehrerer Summanden

Drei Kinder lösten die ‚Bonbonaufgabe' durch die Subtraktion nicht gleichgroßer Zahlen (vgl. Abb. 5). So zog *Nina* relativ zielsicher sechsmal die ‚4' ab.

Angela hingegen gab nach kurzem Überlegen die Antwort, dass sie neun Bonbons übrig behielte. Auf Rückfrage erklärte sie, sie habe von 20 dreimal die ‚5' subtrahiert, so dass zusammen mit den vier Bonbons, die sie noch nicht berücksichtigt habe, ein Rest von insgesamt neun Bonbons bliebe. Nachdem sie gefragt wurde, ob man diese nicht auch noch verteilen könne, rechnete sie die drei rechts stehenden Aufgaben aus (‚9–3=6'; ‚6–3=3' sowie ‚3–3=0'), so dass letztendlich jedem Kind acht Bonbons zukamen (‚Drei Kinder acht Stück.').

Marc-André schließlich subtrahierte dreimal die ‚4' sowie sechsmal die ‚2'. Um die Lösung anzugeben, addierte er dann die 4 und die 4 (2+2) Bonbons, die jedem Kind gehörten.

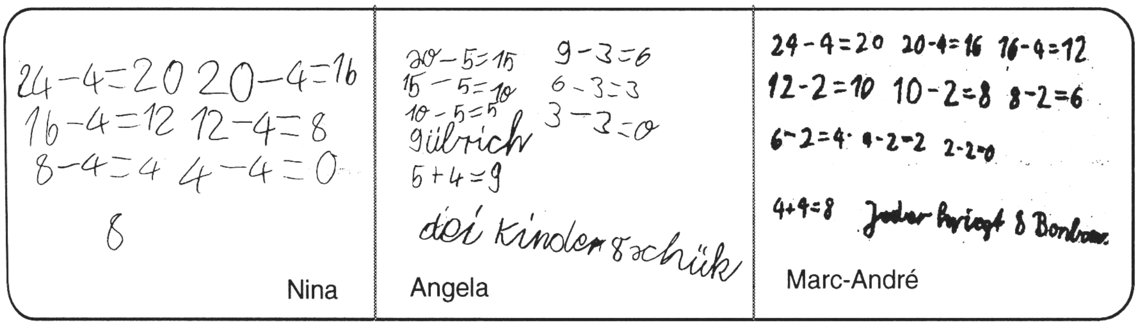

Abb. 3: Lösungen durch Subtraktion

Lösungen durch Zählen mit Hilfe von Zeichnungen: Vier Kinder erhielten das richtige Resultat zählend, entweder während sie zeichneten oder im Anschluss daran (vgl. Abb. 6). *Nadine* malte für das erste (rechts), das zweite (unten) und das dritte Kind (oben) jeweils ein Bonbon hin. Dabei zählte sie von ‚1' bis ‚3'. Dann zeichnete analog für jedes Kind ein weiteres oberhalb des zuerst gemalten und zählte von ‚4' bis ‚6'. Dieses Verfahren setzte sie bis ‚24' fort und ermittelte zum Abschluss die gesuchte Anzahl (‚Jedes Kind hat 8').

Sven stellte zuerst 24 Kreise im ‚Rechtecksmuster' dar, strich jeweils ein Bonbon durch, malte es abwechselnd in die linke, die mittlere sowie die rechte Säule und zählte sodann die jeweilige Anzahl ab.

Jennifer malte – jeweils in Dreierschritten zählend – 24 Bonbons und merkte sich parallel dazu, wie viele Dreiergruppen sie aufgezeichnet hatte.

Martin schließlich malte drei Kreise und markierte durch einen kleinen Strich auf jeder der Kreislinien, dass er jedem Kind ein Bonbon geben würde. Dann zählte er rückwärts von ‚24' bis ‚21' und merkte sich durch die Notation der ‚21', wie viele Bonbons verblieben waren. Dieses Verfahren wiederholte er mehrfach, wobei er jeweils die alte Merkzahl durchstrich, bevor er die neue daneben schrieb. So gelangte er auf der Kreislinie einmal ‚rundherum' sowie in der ‚Merkzeile' in Dreierschritten rückwärts von der ‚21' bis zur ‚3'. Beim letzten Schritt verzählte er sich zwar, bemerkte dieses jedoch umgehend und ersetzte die bereits vermerkte ‚1' durch eine ‚0'. Abschließend zählte er die Anzahl der Striche auf jeder Kreislinie ab und schrieb als Lösung eine ‚8' zwischen Zeichnung und Merkzeile. Unterhalb der ursprünglichen ist eine identisch angelegte Zeichnung zu erkennen, weil Martin abschließend gebeten wurde, sein Verfahren noch einmal kurz zu erklären, was er allerdings zum Anlass nahm, es noch einmal ausführlich darzulegen.

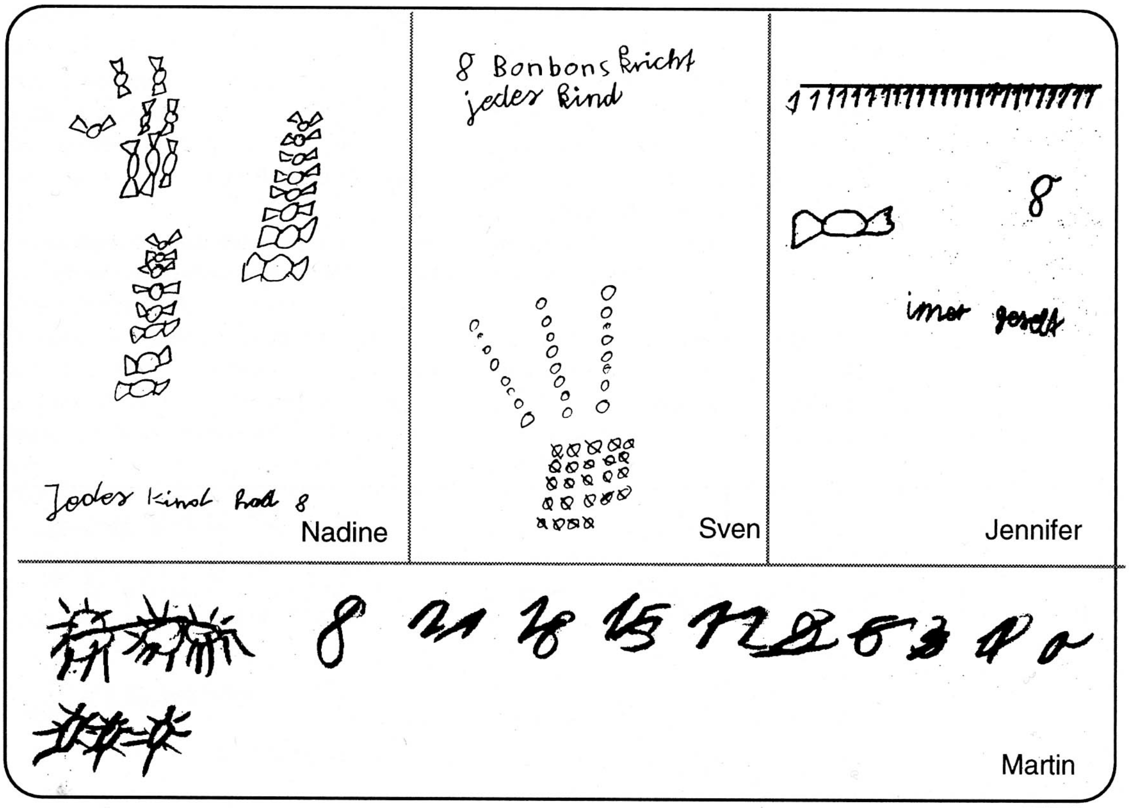

Abb. 4: Lösungen mit Hilfe von Zeichnungen

Fehlerhafte Bearbeitungen: Fünf Bearbeitungen wiesen Fehler beim Rechnen, beim Abzählen oder beim Aufgabenverständnis auf (vgl. Abb. 7): *Daniela* malte zunächst 24 Kreise, kringelte dann jeweils Sechsergruppen ein und sagte, jedes der vier Kinder bekäme sechs Bonbons. Auf Nachfrage erklärte sie, dass sie jedoch nicht wisse, wie sie die Verteilung für drei Kinder durchführen solle. Das Ergebnis des abschließend notierten Zahlensatzes ‚3+5' lautete zwar ‚8', doch konnte *Daniela* keinen *erkennbaren* Bezug zur ursprünglichen Aufgabenstellung angeben.

Achim begann, indem er jedem Kind drei Bonbons gab, was er durch den Zahlensatz ‚3–3–3' ausdrückte, den er jedoch als unpassend verwarf und einklammerte. Daraufhin teilte er jedem Kind fünf Bonbons zu, beging dabei jedoch den Fehler, eine ‚5' zu vergessen: Er zählte nämlich von ‚24' ausgehend um ‚5' rückwärts und notierte den Zahlensatz ‚24–5'. Dann zählte weiter rückwärts bis zur ‚14' und ‚protokollierte' dieses, indem er seine schriftlichen Aufzeichnungen fortführte (‚24–5–*5*'). Dabei hatte er die ‚14' durch die vier abgespreizten Finger der linken Hand repräsentiert. Allerdings vergaß er beim Niederschrieben, dass er bei ‚14' angelangt war, und nahm die genauso zu merkende ‚9' als Ausgangspunkt des nächsten Zählprozesses. Folgerichtig vollendete er den Zahlensatz ‚24–5–5–*5*=4'. Die restlichen vier Bonbons verteilte er – so gerecht wie möglich – an die drei Personen und gab die zugehörige Differenz mit ‚4–2–1–1=0' an. Ein Kind, so *Achim*, bekäme somit sieben, die anderen beiden jeweils sechs Bonbons.

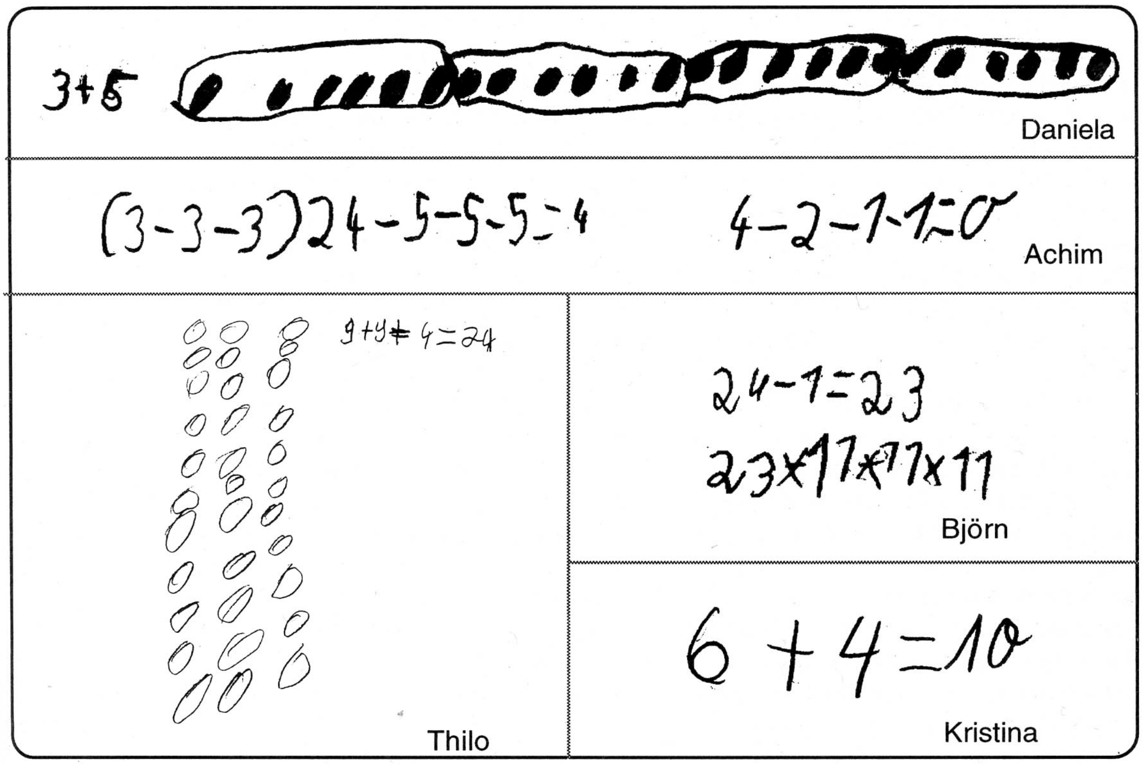

Abb 5: Fehlerhafte Bearbeitungen

Thilo malte zunächst elf Dreierreihen; jede Spalte sollte dabei ein Kind repräsentieren. Durch Abzählen ermittelte er, dass er ausreichend viele Objekte gezeichnet hatte. Im weiteren verlor er jedoch – wahrscheinlich – den Bezug zu seiner Zeichnung und teilte dem ersten Kind neun Bonbons zu. Für das zweite Kind sah er ebenfalls neun Bonbons vor, verzählte sich jedoch und gelangte zum Zwischenergebnis ‚19‘, das er eigentlich notieren wollte – man erkennt ein Gleichheitszeichen hinter dem Ausdruck ‚9+9‘. Für das dritte Kind würden dann noch – erneuter Zählfehler – vier Bonbons übrig bleiben, was *Thilo* durch die Vervollständigung des Zahlensatzes kenntlich machte. Die Frage, ob es sich hierbei um eine gerechte Verteilung handelte, verneinte er, gab aber andererseits zu verstehen, dass er die Aufgabe nicht besser zu lösen vermochte. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass *Thilo* bei der Verwendung von Zählobjekten eine korrekte Lösung erhalten hätte. Aus den eingangs genannten Gründen wurde allerdings im Rahmen *dieser* Standortbestimmung – natürlich nicht im Unterricht – auf deren Einsatz verzichtet.

Björn gab eingangs an, jede Person erhielte zwölf Bonbons, wenn es zwei Kinder wären. Bei drei Kindern hingegen sei es dann jeweils ein Bonbon weniger. Er notierte die Gleichung ‚24–1=23‘ und sagte, jedes Kind bekomme elf Bonbons, was er durch den Zahlensatz ‚23x11x11x11‘ ausdrückte. Er meinte damit allerdings die Gleichung ‚23=11+11+11‘.

Bei *Kristina*, die allerdings aufgrund von Sprachproblemen den Kontext nicht verstanden zu haben schien, konnte auch durch detailliertes Nachfragen nicht geklärt werden, was sie zur Notation des Zahlensatzes ‚6+4=10‘ veranlasst hatte.

Fazit: Analysiert man die insgesamt 21 Bearbeitungen, so bleibt *erstens* festzuhalten, dass insgesamt 16 Schüler – also etwa drei Viertel – die Bonbonaufgabe ‚korrekt‘ lösten. Dieser Prozentsatz war im übrigen bei den anderen Aufgaben der Standortbestimmung ähnlich hoch. Dieses Ergebnis sollte jedoch auch immer vor dem Hintergrund gesehen werden, dass die Schüler in der Regel eben nicht multiplizierten oder dividierten, so wie wir es verstehen, sondern eigene Strategien zur Anwendung brachten, die häufig die Keime für effizienteres multiplikatives Rechnen in sich trugen.

Es ließen sich *zweitens* nicht weniger als 19 verschiedene Rechenwege feststellen – lediglich die Bearbeitungen von René und Benni sowie von Manuela und Sascha erscheinen uns als gleich. Dabei sind Aussagen über die Denkwege der Schüler stets mit einer gewissen Vorsicht zu treffen, da man nie – auch mit der ausgefeiltesten Methodik nicht – mit letzter Sicherheit wissen kann, ob die Auskünfte der Kinder über ihr eigenes Denken deren Gedankenwelt authentisch abbilden oder vielleicht nicht auch im Nachhinein konstruierte Aussagen sind, um die (vermuteten) Erwartungen des Interviewers zu erfüllen.

Außerdem möchten wir *drittens* konstatieren, dass auch bei ‚falschen' Lösungen – etwa bei Achim oder Daniela – durchaus ein rationaler Kern sowie ein Grundverständnis der Division festzustellen waren.

Es wurde schließlich *viertens* deutlich, dass keineswegs alle Schüler bei der Bonbonaufgabe verteilnah rechneten – also drei gleichmächtige Teilmengen bildeten und überprüften, ob deren ‚Summe' 24 ergab: In Reinform gingen beispielsweise Simone oder Oliver so vor. Daneben konnte beobachtet werden, dass einige Schüler nicht direkt die Gesamtmenge in drei Teilmengen aufsplitteten, sondern Teilmengen davon, etwa Nina oder Angela. Das aufteilnahe Rechnen – also das Bilden von Teilmengen der Mächtigkeit 3 und die Ermittlung von deren Anzahl – nutzte beispielsweise Jennifer. Wir wollen die Denkwege der Schüler im einzelnen nicht weiter klassifizieren, sondern lediglich festhalten, dass das Denken dieser 21 Schüler sich zwar in oberflächlicher Weise strukturieren lässt, jedoch viel zu komplex ist, um solche Zuordnungen jeweils eindeutig vorzunehmen zu können.

(Quelle: Selter & Spiegel: Wie Kinder rechnen. Leipzig: Klett 2001, S. 25-30).