



Haus 8: Guter Unterricht

Forschendes Lernen im Mathematikunterricht

- Erkundungen und Entdeckungen am Mal-Plus-Haus -

Forschendes Lernen ist eine natürliche Lernweise auch bereits - oder gerade auch! – bei kleinen Kindern. „Kinder beobachten und vergleichen andauernd Dinge. Aus ihren Beobachtungen, Vergleichen und Zuordnungen entwickeln sie Muster des Verstehens.“ (Ollenshaw u.a., S.9). Beim forschenden Lernen in der Schule geht es darum, die eher zufallsbedingten Erkundungen in ein systematisch-probierendes Untersuchen zu überführen. Neben der Förderung einer durch Neugier und Interesse gekennzeichneten Forscher- und Entdeckerhaltung müssen von daher Lernarrangements geschaffen werden, die den Aufbau von Vorgehens-, Arbeits- und Darstellungsweisen (systematisch probieren, analysieren, sortieren, ordnen, vergleichen, verallgemeinern, übertragen, dokumentieren, beschreiben, ...) zielgerichtet unterstützen. Den Kindern müssen „Forschermittel“ an die Hand gegeben werden, die ihnen helfen, Forschertätigkeiten zu strukturieren und zu systematisieren.

Die forschende Auseinandersetzung mit Phänomenen aus der Umwelt, das Untersuchen, Erkunden, Beobachten, das Dokumentieren in Forscherheften etc. scheint vorrangig eine Domäne des Sachunterrichts zu sein und ist als eine zentrale Methode für dieses Fach unmittelbar einleuchtend. Doch forschendes Lernen im Mathematikunterricht? Wie soll eine solche Herangehensweise insbesondere im Bereich Arithmetik, wo es nicht um konkrete Objekte sondern um abstrakte Zahlen und Gesetzmäßigkeiten geht, realisiert werden?

Bereits 1975 hat Heinrich Winter das Explorieren als zu entwickelnde allgemeine Fähigkeit postuliert. Beim probierenden Erforschen sollen die Kinder Beziehungen und Strukturen entdecken, Muster erfinden und kreative Ideen entwickeln. Die inhaltliche Nähe des forschenden Lernens zum entdeckenden, problemlösenden und individuellen Lernen ist evident. Forschend-entdeckendes Lernen erfordert eine Öffnung von Unterricht, die es den Schülerinnen und Schülern ermöglicht, selbstgesteuert und eigenständig aktiv zu werden.

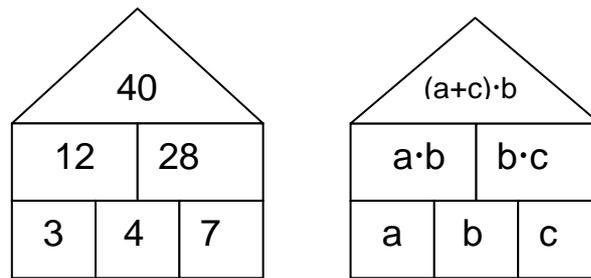
Der Zielvorstellung des forschenden Lernens trägt ein zentrales Prinzip des Mathematikunterrichts Rechnung, das operative Prinzip, das besagt, dass mathematische Sachverhalte und Strukturen dann mit Einsicht erfasst werden können, wenn erforscht wird, „wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen ausgeübt werden.“ (Wittmann, Erich, Ch. S.7). Die operative Aufgabenvariation mit der zentralen Fragestellung: „Was passiert, wenn ...?“ ist ein zentrales methodisches Mittel zur Initiierung eines forschenden Mathematiktreibens. Dabei werden einzelne Zahlen in einem Aufgabenkomplex (wie Zahlenmauern, Zauberdreiecke, Mal-Plus-Häuser) systematisch verändert und es wird untersucht, wie sich diese Veränderungen auf andere Zahlen in diesem Komplex auswirken. Auf diese Weise wird die mathematische Struktur innerhalb des Zahlengeflechts sichtbar. Durch das operative Durcharbeiten dringen die Schülerinnen und Schüler immer tiefer in die mathematischen Zusammenhänge ein.

Wie derartige Aufgabenvariationen dazu verhelfen, Verständnis für Zahlbeziehungen und Gesetzmäßigkeiten aufzubauen, soll am Beispiel des Mal-Plus-Hauses aufgezeigt werden.

Das Mal-Plus-Haus: Ein Übungsformat zum multiplikativen Rechnen

Das Mal-Plus-Haus erinnert in seinem Aufbau an dreistöckige Zahlenmauern. Es werden jedoch neben den additiven vor allem auch multiplikative Operationen durchgeführt. Je nachdem, welche Zahlen vorgegeben sind, werden für die Ermittlung der fehlenden Werte auch die beiden Umkehroperationen Subtraktion (Abziehen und Ergänzen) und Division verlangt. Das Mal-Plus-

Haus ist eines der wenigen Übungsformate, mit denen das Einmaleins flexibel und beziehungshaltig geübt und durchgearbeitet werden kann.



Die allgemeine Form macht deutlich, dass die Zahl im Dach das Produkt ist aus der Summe der beiden Außenzahlen in der unteren Reihe und der Mittelzahl.

Beziehungen im Mal-Plus-Haus erforschen

Die vorliegende Unterrichtsreihe wurde in einem dritten Schuljahr durchgeführt. Sie erstreckte sich über mehrere Einheiten:

1. Einheit: „Wo können die Zahlen in diesem Haus wohnen?“ – Entdeckung des Bildungsgesetzes und automatisierende Übungen zur Sicherung des Bildungsgesetzes
2. Einheit: „Ein Mal-Plus-Haus zum Knobeln“ – Ermittlung der Lernausgangslage und Ableitung einer Forscherfrage
3. – 5. Einheit: Erforschung des Mal-Plus-Hauses im Forscherheft (mit einer gemeinsamen Forscherstunde)
6. Einheit: „Ein Mal-Plus-Haus zum Knobeln“ – abschließende Lernstandsbestimmung zur Reflexion des Lernzuwachses

Einführung des Mal-Plus-Hauses und Sicherung des Bildungsgesetzes

Bereits bei der Einführung des Aufgabenformats kann das Prinzip des forschend-entdeckenden Lernens umgesetzt werden: An die Tafel wurde ein leeres Mal-Plus-Haus gezeichnet. Die einzelnen Stockwerke wurden wie folgt benannt: Keller, Wohnung, Dach. Der Name des Hauses wurde noch nicht verraten. Daneben wurden Zahlenkarten mit den Zahlen 3, 5, 7, 15, 21, 36 durcheinander angeheftet. Schnell erkannten die Kinder, dass die Zahlen in das Haus einsortiert werden sollten. Erste Vermutungen wurden geäußert. Falls notwendig sollte die Lehrkraft die Kinder darüber informieren, dass sich mit den Zahlen Rechenaufgaben bilden lassen. Der genaue Auftrag für die folgende Partnerarbeit lautete: „Wie passen die Zahlen zusammen? Ordnet die Zahlenkarten so in das Mal-Plus-Haus ein, dass man Rechnungen finden kann.“ Zusätzlich sollten die Kinder überlegen, welcher Name das Haus haben könnte. Die Kinder erhielten zu zweit ein Leerformat des Mal-Plus-Hauses und Zahlenkarten. Kinder, die sich schon eine schwierigere Aufgabe zutrauten, bekamen folgende Zahlenkarten: 2, 3, 6, 7, 21, 27. Hier ist die Beziehung zwischen den einzelnen Zahlen nicht so einfach zu erkennen, insbesondere weil die drei kleinsten Zahlen nicht alle in der unteren Reihe positioniert sind.

Die Kinder setzten sich motiviert mit der handlungsorientierten Aufgabenstellung auseinander. In der Arbeitsphase waren unterschiedliche Vorgehensweisen zu beobachten:

- Manche Kinder fingen gezielt von oben an. Sie legten die größte Zahl ins Dach und in die Wohnung die beiden Zerlegungszahlen. Es dauerte dann in der Regel eine Weile, bis sie erkannten, dass die drei kleinen Zahlen keine weiteren Zerlegungszahlen sondern Faktoren darstellen.

- Andere Kinder fingen von unten an und ordneten die drei kleinsten Zahlen in den Keller ein. Manche suchten dann zunächst nach passenden Summen, bis sie bemerkten, dass diese Überlegungen nicht weiterführten und sie nach anderen rechnerischen Verknüpfungen Ausschau halten mussten.

- Wieder andere Kinder „sahen“ direkt die Zusammengehörigkeit von drei Zahlen, z.B. von 3, 7 und 21 ($7 \cdot 3 = 21$; Abb.1). Manchmal kamen sie dann nicht weiter. Erst das Tauschen der beiden Zahlen 3 und 7 ermöglichte es, zur Zahlenkarte 6 die passende Malaufgabe (nämlich $2 \cdot 3$) zu bilden.



Abb. 1

Indem die Kinder anschließend nach passenden Namen für das Haus suchten, setzten sie sich noch einmal bewusst mit den Besonderheiten und den Rechenoperationen des Hauses auseinander. „Rechenhaus“, „Zahlenhaus“, „Fast-alles-Häuschen“, „Mal-Plus-Haus“, „Mal-Haus“ sind einige der Bezeichnungen, die sie sich ausdachten.

Zur Sicherung der Struktur wurden auf Arbeitsblättern verschiedene Aufgabenstellungen mit Lücken bearbeitet (Abb.2). Diese Übung ist notwendig, da einige Kinder – obwohl sie den Aufbau des Mal-Plus-Hauses verstanden haben – zwischendurch in Anlehnung an das bekannte Aufgabenformat „Zahlenmauern“ immer wieder einmal dazu übergehen, die Zahlen im Keller zu addieren.

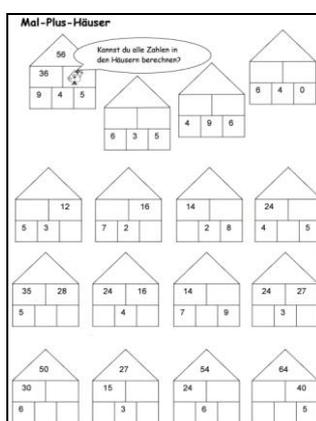


Abb. 2

Sinnstiftung für das Forschen

Forschung dient der Beantwortung gezielter Fragen, die sich zumeist aus Problemen ergeben. Auch mathematische Forschungen sollten von einer Forscherfrage ausgehen, die sich wie ein roter Faden durch die verschiedenen Erkundungsaktivitäten zieht. Mit einer solchen übergreifenden Forscherfrage erhalten die mathematischen Erkundungen einen Sinn. Sie bietet den Kindern Transparenz, strukturiert den gesamten Lernprozess und regt eine bewusste, zielorientierte Auseinandersetzung an.

Vom Sachunterricht her sind solche Forscherfragen bekannt, z.B.: „Warum schwimmt ein Schiff?“ oder „Ist Luft nichts?“ Welche übergreifende Forscherfrage könnte eine zielweisende Rahmung für die Erforschung des Mal-Plus-Hauses darstellen? Welches Problem könnte ein Ausgangspunkt sein?

In der nächsten Unterrichtsstunde wurde den Kindern an der Tafel ein Mal-Plus-Haus präsentiert, in das nur die Dachzahl 56 (Abb.3) eingetragen war. Der Auftrag lautete: „Finde passende Zahlen für das Mal-Plus-Haus. Wie viele Möglichkeiten findest du? Es wurde den Kindern erläutert, dass sie mit dieser Aufgabe eine richtige Nuss zu knacken hätten und dass sie die Lösung mit Sicherheit nicht auf Anhieb finden würden. Zum Ausprobieren wurde den Kindern ein Blatt mit leeren Häusern ausgehändigt.



Abb. 3

Die Aufgabe stellte in der Tat für die meisten Kinder eine große Herausforderung dar, insbesondere wenn sie versuchten, direkt passende Zahlen im Keller zu finden. Erfolgreicher war die Strategie, die 56 in zwei Zahlen zu zerlegen, die sich durch eine gemeinsame Zahl teilen ließen, z.B. durch die 2. Manche Kinder benötigten bis zu 10 Versuche, bis sie eine richtige Lösung gefunden hatten. Die Suche nach weiteren Lösungen erfolgte im Allgemeinen eher unsystematisch. Kein Kind schien den Zusammenhang zwischen Dachzahl und Mittelzahl zu diesem Zeitpunkt erkannt und genutzt zu haben. Es war erstaunlich, mit welchem Ehrgeiz und welcher Ausdauer dennoch alle Kinder versuchten, eine bzw. mehrere Lösungen zu finden. Auf einem Selbsteinschätzungsbogen sollten sie sodann ihre Vorgehensweise beschreiben und eintragen, wie viele Versuche sie gebraucht hatten, wie viele richtige Lösungen sie gefunden hatten und wie sie die Aufgabe einschätzten: sehr schwer, ein bisschen schwer oder total leicht (Abb.4). Letztere Einschätzung fiel sehr unterschiedlich aus.

Ein Mal-Plus-Haus zum Knobeln Name: _____ AB 3

So bin ich vorgegangen.
Das habe ich ausprobiert.
Das habe ich mir überlegt.
Das habe ich herausgefunden.

1. Ich habe ___ Versuche benötigt.

2. Ich habe insgesamt ___ richtige Häuser gefunden.

3. Ich fand die Aufgabe:
sehr schwer ein bisschen schwer total leicht

Abb. 4

In einer gemeinsamen Abschlussrunde beschrieben die Kinder noch einmal ihre Vorgehensweisen und ihre Schwierigkeiten. Als stummen Impuls notierte die Lehrkraft an der Tafel: „Wie kann man die passenden Zahlen noch leichter finden? Gibt es eine Strategie?“

Die Kinder erhielten ein Heft mit den unterschiedlichsten Forscheraufträgen zum Mal-Plus-Haus. Als Transparenz wurde ihnen erklärt: „Wenn ihr in diesem Heft forscht und viel ausprobiert, könnt ihr ein solches Knobelhaus sicher bald leichter und schneller lösen. Ihr könnt nämlich die Strategie selbst herausfinden.“

Forschen im Forscherheft

Forscherhefte beinhalten zu einem einheitlichen Themenkomplex miteinander vernetzte Forscheraufträge, Aufgaben zum Erfinden und zum Problemlösen und bieten den Kindern somit eine vorstrukturierte Lernumgebung. „Das Forscherheft als Schreib- und Gestaltungsmedium besitzt für Kinder einen hohen Aufforderungscharakter. ... Mit dem Fortschreiten der Bearbeitung und der individuellen Gestaltung entwickelt sich das Heft immer mehr zu einem persönlichen Dokument und zu einem Produkt, mit dem sich die Kinder identifizieren.“ (Anders et al., S.17).

Den Schwerpunkt im Forscherheft zum Mal-Plus-Haus bilden folgende Aufgabenvariationen nach dem operativen Prinzip:

Was passiert mit der Dachzahl, wenn ...

- die linke und die rechte Kellerzahl vertauscht werden?
- die linke oder die rechte Kellerzahl immer um 1 größer (kleiner) werden?
- die linke Kellerzahl immer um 1 größer wird und die rechte Kellerzahl immer um 1 kleiner wird?
- die Mittelzahl um 1 größer (kleiner) wird?

Weitere Forscherfragen regen zu gezielten Überlegungen bezüglich der Zahlbeziehung im Mal-Plus-Haus an:

- Wie passen die Mittelzahl im Keller und die Dachzahl zusammen?
- Haben die beiden Außenzahlen im Keller und die Dachzahl auch etwas miteinander zu tun?
- Ist es eigentlich egal, wo man die drei Zahlen im Keller einträgt? Kommt trotzdem immer die gleiche Dachzahl heraus?
- Die Mittelzahl ist immer die 6. Was fällt dir bei der Dachzahl auf?

Einfachere Problemstellungen regen an, bereits erkannte Zahlbeziehungen zu nutzen:

- Die Zahlen im Keller fehlen. Wie kannst du sie schnell finden?
- Im Dach stehen nur Zehnerzahlen (10, 20, ... 90). Findest du zu jedem Haus passende Zahlen?
- Nur die Mittelzahl ist gegeben. Wie viele verschiedene Häuser findest du?

Bis auf drei verpflichtende Forscheraufträge konnten die Kinder auswählen, welche Seiten im Forscherheft sie bearbeiten wollten. Alle Aufträge dienten dazu, in die Gesetzmäßigkeit des Aufgabenformats einzudringen. Auch konnten die Kinder wählen, ob sie lieber alleine oder mit einem Partnerkind arbeiten wollten. Einige Tipps halfen, den Blick der Kinder gezielt auf Besonderheiten zu lenken, z.B.: „Sieh dir die Zahlen in der Wohnung an. Welche Zahl bleibt gleich? Warum? Welche Zahl wird größer? Um wie viel? Warum?“ Als Hilfe für das Versprachlichen wurde eine Liste mit (Fach-)Ausdrücken zur Verfügung gestellt.

Bei aller Förderung des selbstständigen, eigenverantwortlichen Arbeitens brauchen die Kinder dennoch die individuelle Rückmeldung, Ermutigung und Unterstützung durch die Lehrkraft. Aus diesem Grunde wurden die Hefte zwischendurch eingesammelt und mit weiterführenden, individuellen Tipps (auf post-it-Zetteln) versehen (Abb.5).

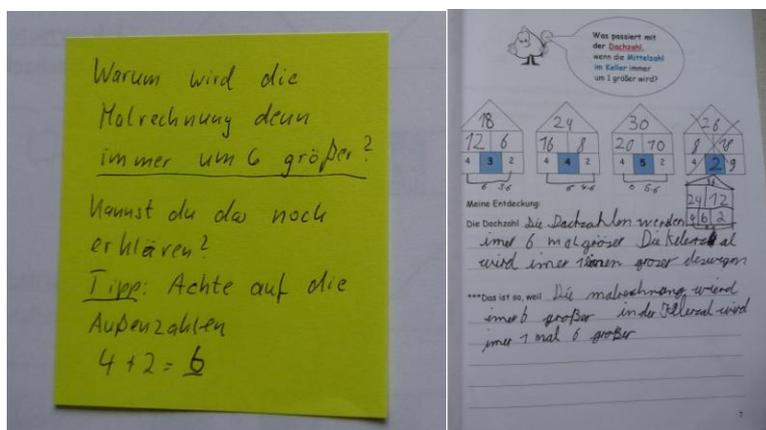


Abb. 5

Es ist erstaunlich, wie weit manche Kinder bei einigen Forscheraufträgen in die Struktur des Mal-Plus-Hauses eindringen und die Beziehungen zwischen den Zahlen erklären und begründen konnten (Abb.6 und 7).

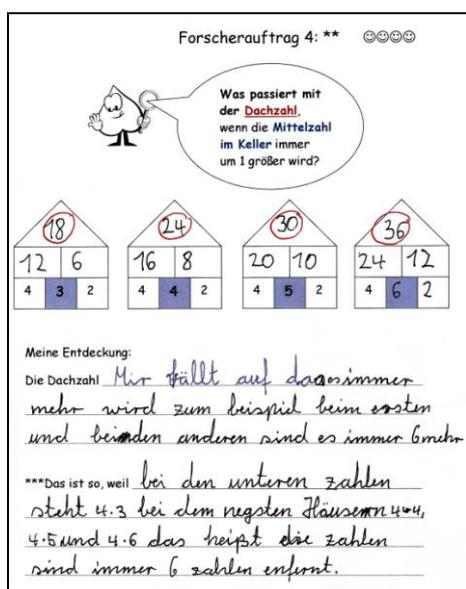


Abb. 6



Abb. 7

Aber nicht alle Kinder führten die selbstständigen Erkundungen so in die Tiefe. Manche Kinder hatten auch große Schwierigkeiten, ihre Beobachtungen schriftlich zu formulieren.

Ein gemeinsam zu bearbeitender Forscherauftrag im Forscherheft (Abb.8) gab zwischendurch Gelegenheit, vor allem für diese Kinder Erkenntnisse zu bündeln, zu veranschaulichen, zu vertiefen und zu übertragen. Auf den Fotos ist zu erkennen, wie die Kinder ihre Häuser sortieren (Abb.9), Beziehungen zwischen den Zahlen im Keller und der Dachzahl (Abb.10) veranschaulichen und gemeinsam aufgrund der bekannten Beziehungen schnell weitere Aufgaben lösen können (Abb.11).

Forscherauftrag 7

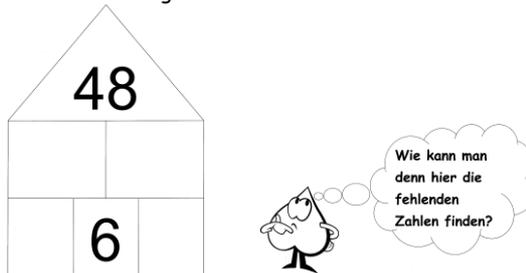


Abb. 8



Abb. 9

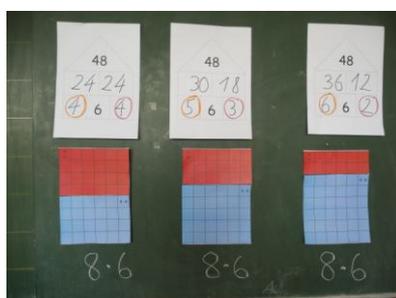


Abb.10



Abb.11

Abschließende Lernstandsbestimmung und Reflexion

Ausgehend von der übergreifenden Forscherfrage: „Wie kann man die passenden Zahlen noch leichter finden? Gibt es eine Strategie?“, sollten die Schülerinnen und Schüler zum Abschluss der Reihe überprüfen, ob sie nun schneller und leichter ein ähnliches Knobelhaus wie beim ersten Versuch lösen konnten.

Der Arbeitsauftrag lautete entsprechend: „Findet möglichst viele Häuser zur Zielzahl 42.“ (Abb.12). Es stand ähnlich viel Zeit zur Verfügung.



(Abb. 12)

Ihren Lernerfolg sollten die Kinder anhand eines Reflexionsbogens (Abb.13) reflektieren. Dieser war ähnlich aufgebaut wie der Selbsteinschätzungs-Bogen beim ersten Mal.



Abb. 13

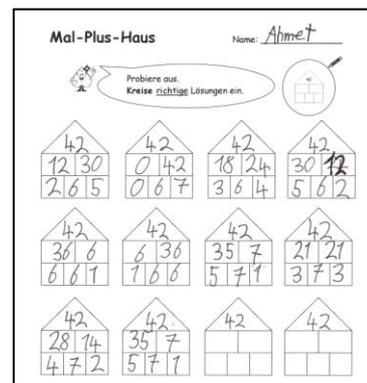


Abb. 14

Deutlich ist der Lernzuwachs bei Ahmet zu erkennen (Abb.14): Während er bei der ersten Problemstellung acht Versuche benötigte, bis er eine richtige Lösung gefunden hatte, ging er die erneute Knobelaufgabe von Anfang an gezielt an. Als Mittelzahl wählte er die 6 und suchte für die beiden äußeren Zahlen im Keller nach Zerlegungen der 7. Als er keine Zerlegungen mehr fand, setzte er die 7 als Mittelzahl ein und notierte nun Zerlegungen der 6. Viele Kinder konnten auch schriftlich begründen, warum sie das Knobelhaus „heute besser lösen konnten, als beim ersten Mal“: „Weil ich einen Trick jetzt habe.“ „Weil ich schon viel mehr über das Mal-Plus-Haus kenne viele Tricks.“ „Weil ich herausgefunden habe, dass man eine Malaufgabe machen muss. Zu der Zahl 42 kann man die Malaufgabe $6 \cdot 7$ oder $7 \cdot 6$ bilden.“

Im mündlichen Gespräch brachte Lisa es wie einige andere Kinder genau auf dem Punkt. Sie erklärte ihre Vorgehensweise wie folgt: „Erst mal hab‘ ich mir eine Malaufgabe für die Dachzahl überlegt, das war die $6 \cdot 7$. Dann hab‘ ich eine Zahl ausgesucht, das war die 7; die hab‘ ich in die Mitte im Keller geschrieben. Dann hab‘ ich die 6 in der rechten und in der linken Kellerzahl aufgeteilt. Man kann noch Tauschaufgaben machen und noch anders aufteilen.“

Fast alle Kinder hatten auf der Grundlage des erkannten Distributivgesetzes selbstständig eine Strategie gefunden, die sie gezielt anwandten. Die übergreifende Forscherfrage „Gibt es eine Strategie“ konnten sie nun mit Stolz beantworten.

Literatur:

Anders, K., Oerter, A. (2009): Forscherhefte und Mathematikkonferenzen in der Grundschule 3+4. Vpm/Kallmeyer

Ollenshaw, Ch., Ritchie, R., Rieder, K. (2000): Kinder forschen – Naturwissenschaften im modernen Sachunterricht. Wien

Winter H. (1975): Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 7, 3, S. 106-116

Wittmann, Erich Ch. (1985): Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: Mathematik lehren, H. 11

Hinweis: Die gesamte Unterrichtsreihe mit allen Materialien ist unter www.pikas.tu-dortmund.de dokumentiert.

Anmerkung: Dies ist die Vorversion eines Beitrags von Lilo Verboom, der im August 2010 erscheint in: Häring, G. (Hrsg.) (2010): Mathematik Klasse 3. In der Reihe: Start in den Unterricht. Friedrich Verlag, Seelze