Kompetenzorientierung, Prozessorientierung und Subjektorientierung als Leitideen des Mathematikunterrichts

Nicht erst seit PISA wird eine grundlegende Reform des Mathematikunterrichts gefordert. Herausfordernde Lernanlässe und gut ausgewähltes Material sind hierzu notwendige Voraussetzungen. Eine weitere Basis für eine andere Art des Lehrens und Lernens von Mathematik bilden aber auch sich wandelnde Einstellungen der Lehrerinnen und Lehrer. Darunter verstehen wir einen umfassenderen Blick auf die Kinder (mehr *Kompetenzorientierung*), auf das Fach (mehr *Prozessorientierung*) und auf den Unterricht (mehr *Subjektorientierung*). Diese drei Aspekte wollen wir im Folgenden anhand von Beispielen illustrieren.

1 Kompetenzorientierung

Wenn ich in die Schule komme, dann lerne ich auch zählen.
Aber das kann ich eigentlich schon.
Wie? Du kannst schon zählen?
Eins, zwei, drei, vier, ... ((Kira zählt weiter bis 42))
Kannst du denn auch schon bis Hundert zählen?
Sechsundneunzig, siebenundneunzig, ...
Achtundneunzig, neunundneunzig, hundert, einhundert, zweihundert.

Warum einhundert und 100 nicht dasselbe sein müssen

Lernen besteht zu einem großen Teil aus dem Stiften von Beziehungen. Man überträgt Regeln von einem Gebiet auf ein anderes. Oft gelten sie auf neuem Terrain, aber eben nicht immer. Es gibt halt Ausnahmen und Inkonsequenzen, die das Lernen erschweren – die deutsche Zahlwortbildung zum Beispiel.

Im Zahlenraum bis 100 spricht man bekanntlich zunächst die Einer und dann die Zehner (acht-und-dreißig). Jenseits der 100 wird das Prinzip 'von klein nach groß' dann nicht mehr konsequent eingehalten (einhundert-acht-und-dreißig). Natürlich wäre es folgerichtiger, wenn unsere Zahlwörter immer 'von groß nach klein' (einhundert-dreißig-und-acht) oder stets 'von klein nach groß' (acht-und-dreißig-hundert) gesprochen würden.

Aber so hat sich unsere Sprache nicht entwickelt. Daher ergeben sich immer wieder kleinere Stolpersteine. Fast jedes Kind produziert beispielsweise irgendwann einmal die Zahlwortreihe "achtundneunzig, neunundneunzig, hundert, einhundert, zweihundert", so wie Kira im Eingangsbeispiel. In den weitaus meisten Fällen sind nicht 100 und 200, sondern 101 und 102 gemeint.

Die Kinder sagen aber 'einhundert' bzw. 'zweihundert', weil sie die Regel 'erst die Einer sprechen' aus ihrer Sicht konsequent auf einen Bereich übertragen, in dem sie allerdings nicht gilt. Haben sie dann zu einem späteren Zeitpunkt für größere Zahlen die Regel 'von groß nach klein' kennengelernt, passiert bisweilen sogar das 'Umgekehrte': Sie sagen einhundert-acht-und-sechzig, wenn sie 186 meinen. Erwachsene neigen dazu, diese und weitere hier nicht genannte Sprachschöpfungen ausschließlich als *fehlerhafte* Zahlwortbildungen wahrzunehmen.

Kompetenz- und Defizitorientierung

Diese Grundeinstellung, das Denken und Lernen der Kinder vorwiegend *defizitorientiert* wahrzunehmen und zu interpretieren, ist bedauerlicherweise weiter verbreitet, als es für Kinder und Erwachsene gut wäre. Man orientiert sich hauptsächlich an der Norm. Abweichungen davon bewertet man als Defizite, die es gilt, schnellstmöglich zu korrigieren oder im Vorfeld zu verhindern.

Im Gegensatz dazu kann man die Äußerungen und Handlungen immer auch aus *kompetenzorientierter* Perspektive als Ergebnisse prinzipiell vernünftigen Denkens ansehen: Was haben sich die Kinder möglicher Weise gedacht? Was können sie schon alles? Was sind die vernünftigen Hintergründe eines aus unserer Sicht falschen Vorgehens? Wie kann man sie dazu anregen, ihr Denken und Wissen weiterzuentwickeln? Den Kindern in Mathematik mehr zuzutrauen, ist Voraussetzung wie Ergebnis dieses Bemühens, immer auch deren Perspektive einzunehmen. Zur 101 ‚einhundert' zu sagen, kann also – mit ihren Augen betrachtet – durchaus sinnvoll sein.

Das Bemühen, immer auch kompetenzorientiert zu schauen, bedeutet natürlich nicht, dass man den Schülerinnen und Schülern nicht auch Dinge erklären („Die nächste Zahl könnte sicherlich ‚einhundert' lauten, aber man hat sich darauf geeinigt, sie 'hunderteins' zu nennen!") oder sie nicht zum Überwinden von fehlerhaften Vorstellungen oder Verfahren anregen sollte. Aber das passiert aus einer grundsätzlich optimistischen Perspektive heraus.

Aus solcher kompetenzorientierter Perspektive versteht man also die Andersartigkeit des Denkens von Kindern nicht als *Defizit*, sondern als *Differenz*. In Selter & Spiegel (1997) und in Spiegel & Selter (2003) wurde in diesem Sinne an vielen Beispielen dokumentiert, dass Kinder bisweilen anders denken, …

- als Erwachsene denken,
- als Erwachsene es vermuten,
- als Erwachsene es möchten,
- als andere Kinder und
- als sie selbst.

Diese Andersartigkeit ist nicht immer einfach als solche zu erkennen, wie auch das folgende Beispiel von Hendrik zeigt. Das ändert aber nichts an ihrem Vorhandensein.

Keine Zahlvorstellung?

Hierzu ein weiteres Beispiel (aus Sundermann & Selter 2006). Der Zweitklässler Hendrik soll möglicher Weise zur Sonderschule für Lernbehinderte wechseln. Zur Feststellung des sonderpädagogischen Förderbedarfs beobachtet ihn eine Kollegin. In der Unterrichtssequenz geht um zusammenhängende Rechenpäckchen des folgenden Typs.

5+5=10	10+10=20	15+15=30	20+20=40
10+10=20	15+15=30	20+20=40	25+25=50
15+15=30	25+25=50	35+35=70	45+45=90

Die Schülerinnen und Schüler sollten primär erkennen, wie die drei untereinander stehenden Aufgaben zusammenhängen. Des weiteren gibt es auch einige Auffälligkeiten zu entdecken, wenn man die Aufgaben eines Dreierpäckchens mit denen eines benachbarten vergleicht. Hendrik meldet sich und deutet auf die letzte Zeile mitten zwischen das zweite und das dritte Päckchen: „Das sind immer zwei mehr, denn da fehlt die 16."
Die anwesende Sonderpädagogin meint: „Klarer Fall von Sonderschule, keine Zahlvorstellung ausgeprägt. Nirgendwo sind es ‚zwei' mehr. Und auch die ‚16' fehlt nicht, denn das sind ja alles Fünfer- und Zehnerzahlen." Diese defizitorientierte Interpretation scheint nach Meinung der Lehrerin die Leistung von Hendrik nicht authentisch zu erfassen. Sie fragt noch einmal bei Hendrik nach und sieht danach ihre kompetenzorientierte Wahrnehmung bestätigt. Die Zehnerziffer, die Hendrik im Blick hatte, wird von der 50 zur 70 in der Tat um 2 größer, und zudem meinte er nicht die ‚sechzehn', sondern die ganz ähnlich lautende ‚sechzig'.
Ich will nichts beschönigen. Natürlich hat er keine eloquente Beschreibung einer außergwöhnlichen Entdeckung gegeben. Aber es ist – so glaube ich – gut, die häufig automatisch vorhandene defizitorientierte Sicht immer wieder zu relativieren – *mehr Kompetenzorientierung*.

2 Prozessorientierung

Kommen wir zur nächsten Frage für 1.000 Euro:
Wie viele einstellige Primzahlen gibt es?
Puh. ... Was waren denn noch mal Primzahlen?... 9? 99? Keine Ahnung.
Keine Ahnung?
Keine Ahnung. Ist ja Mathe.
Es gibt vier einstellige Primzahlen.
Ahja? Egal.
Tja, war ja auch Mathe.

Warum Mathematik und Produktivität zusammen gehören

Trügt der Eindruck vollkommen, dass Kindern und Jugendlichen im Mathematikunterricht oft eher die Rolle von Konsumenten oder von Reproduzenten zukommt, die vorgegebene Lösungsverfahren nachmachen bzw. anwenden? Erscheint es nicht selten als didaktischer Königsweg, das Fertigprodukt Mathematik in kleine Lern-Häppchen vorzuportionieren? Entsteht nicht bei vielen Menschen, Mathematik sei eine prinzipiell unverstehbare und nicht lebensrelevante Geheimwissenschaft, so wie es auch in den Äußerungen des Quizmasters und des Kandidaten anklingt?

Im Gegensatz dazu hat der Mathematiker und Mathematikdidaktiker Hans Freudenthal immer wieder formuliert, das Mathematik keine Ware, keine Ansammlung von Wissen und Können, die aus dem Kopf des Wissenden in die Köpfe der Unwissenden übertragen werden könne. Mathematik sei eine menschliche Aktivität, eine Tätigkeit, eine Geisteshaltung (Freudenthal 1982). Auch wenn sie in der Regel nur die Endprodukte ihrer mathematischen Aktivität veröffentlichen, sind Mathematiker kreativ und produktiv. Dieses sollten Schülerinnen und Schüler auch sein können.

Anzustreben ist daher ein Unterricht, der sich nicht auf die Aneignung von Kenntnissen und Fertigkeiten beschränkt, sondern immer auch die Prozesshaftigkeit der Mathematik in den Vordergrund stellt (vgl. Spiegel & Selter 2003; vgl. auch die bundesweiten Bildungsstandards für die Grundschule bzw. für die Sekundarstufe I). Hier erhalten die Schüler kontinuierlich Gelegenheiten, ...

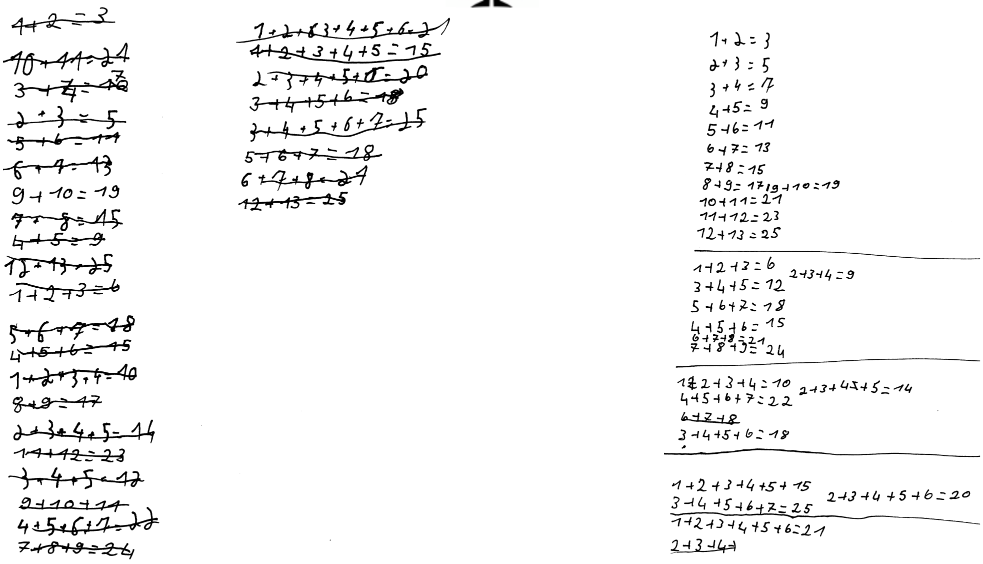
- *kreativ zu sein:* problemhaltige Situationen experimentierend zu erforschen, dabei Auffälligkeiten zu entdecken, eigene Lösungswege zu beschreiten und selbst Aufgaben zu erfinden,
- *zu mathematisieren:* aus lebensweltlichen Situationen mittels geeigneter ‚Methoden' (Zählen, Schätzen, Messen, Befragen, Nachlesen, Internetrecherche…) relevante Informationen zu gewinnen, diese Situationen zu modellieren und die Ergebnisse auf die Ausgangssituation zurück zu beziehen,
- *zu begründen:* Vermutungen über mathematische Sachverhalte (Auffälligkeiten, Regeln, Beziehungen, Ausnahmen, usw.) aufzustellen und diese anhand von repräsentativen Beispielen oder von allgemeinen Überlegungen zu bestätigen oder zu widerlegen.
- *darzustellen:* Auffälligkeiten (z. B. durch Ordnen) zu strukturieren, diese für andere nachvollziehbar mündlich oder schriftlich auszudrücken und sich dabei angemessener Darstellungsweisen zu bedienen,
- *zu kooperieren:* gemeinsam mit anderen komplexere Aufgaben zu bearbeiten, dabei Verabredungen zu treffen, diese einzuhalten und eigene und fremde Standpunkte zueinander in Beziehung zu setzen.

Diese fünf prozessbezogenen Kompetenzen sind in der Realität nicht immer sauber voneinander zu trennen – im Gegenteil: herausfordernde Aufgaben sprechen mehrere von ihnen gleichermaßen an.

Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen

Als Beispiel sollen Dokumente der Arbeit zweier Viertklässler dienen. Diese setzten sich mit der Aufgabe auseinander, die Zahlen von 1 bis 25 auf möglichst viele verschiedene Weisen als Summe aufeinander folgender natürlicher Zahlen darzustellen (also z. B.: 15=4+5+6, aber auch 15=7+8 oder 15=1+2+3+4+5).

Die linke Hälfte der Abbildung dokumentiert die Möglichkeiten, die sie in enger Zusammenarbeit (kooperieren) der Reihe nach fanden und aufschrieben (kreativ sein). Um jedoch prüfen bzw. zeigen zu können, ob bzw. warum sie alle Möglichkeiten gefunden hatten (begründen), schrieben sie die Gleichungen rechts nochmals geordnet ab (darstellen).



Der Aufgabenkontext ‘Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen’ bietet nicht nur für das vierte Schuljahr unterschiedlich anspruchsvolle Probleme. Im zweiten Schuljahr beispielsweise kann man die Schüler bitten, jeweils drei Reihenfolgezahlen zu addieren, z. B.: 2+3+4 oder 13+14+15 oder …, und sich ergebende Auffälligkeiten zu erkennen, zu beschreiben und ggf. sogar zu begründen. Im achten Schuljahr könnte die Aufgabe lauten: Finde alle Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen, deren Ergebnis 1000 ist! Versuchen Sie doch selbst einmal, alle Lösungen zu notieren, bevor Sie weiterlesen!

Produkt- und Prozessorientierung

Auch hier soll kein falsche Eindruck erweckt werden. Natürlich geht es im Unterricht und im Alltag nicht ohne solide Kenntnisse und Fertigkeiten. Ohne eine sichere Verfügbarkeit des Einmaleins beispielsweise kann man weder große Zahlen noch Brüche miteinander multiplizieren. Das Üben im Bereich der Grundkenntnisse und –fertigkeiten darf also keineswegs vernachlässigt, muss vielleicht in einigen Bereichen sogar noch intensiviert werden. Aber es geht schon in der Grundschule, ja sogar schon im Kindergarten um ein umfassenderes Verständnis von Mathematik: *mehr Prozessorientierung*.

3 Subjektorientierung

Was meinst du: Sollen wir Lehrer immer erklären
oder sollen die Schüler selbst einen Lösungsweg herausfinden?
Selbst herausfinden finde ich besser.
Wieso?
Es ist nicht so langweilig.
Wenn der Lehrer was an der Tafel erklärt, muss man meistens gähnen.
Außerdem macht es Spaß, wenn das Gehirn angestrengt wird. Und außerdem wird
einem, wenn man selbst nachdenkt, nichts vom anderen ins Gehirn reingeschickt.

Lernen auf eigenen Wegen

Es kann als grundlegende Erkenntnis der Forschung gelten, dass Lernen nicht als Übernahme von fertigem Wissen, sondern als ein *stets* aktiver, konstruktiver, individueller Prozess stattfindet. Selbst dann, wenn Schüler einer Erzählung eines Erwachsenen zuhören oder einige Seiten in einem Sachbuch lesen, bedarf es eigener Konstruktionen, damit sie etwas lernen, nicht nur dann, wenn sie auf sich selbst gestellt versuchen, ein herausforderndes Problem zu bewältigen.

Das bedeutet: Wie auch immer man agiert, man kann Lernerfolge der Kinder nicht erzwingen, auch noch so ausgefeilte Lernarrangements können nicht garantieren, dass Lernen stattfindet. Aber man kann Wahrscheinlichkeiten dafür erhöhen, dass sich Lernen ereignet, wenn man sich an der Konstruktivität menschlichen Lernens orientiert. Daher sollte man Schülerinnen und Schülern hinreichend viel Zeit und Raum für ein selbst gesteuertes 'Lernen auf eigenen Wegen' geben (vgl.

Spiegel & Selter 2003), wie es sich auch der eingangs zitierte Schüler wünscht (aus Wittmann 1995, 35).

Um nicht einer übertriebenen Individualisierung das Wort zu reden, sei gesagt, dass das Lernen auf eigenen Wegen stets durch das Lernen voneinander zu ergänzen ist. In der Auseinandersetzung mit anderen können die Schülerinnen und Schüler lernen, die eigene Sichtweise zu artikulieren, sich über andere Lösungswege auszutauschen, sachbezogene Rückmeldungen zu geben und zu nutzen und über verschiedene Herangehensweisen nachzudenken und sie zu bewerten.

Im Kopf oder schriftlich

Hierzu ein Beispiel aus dem Unterricht. Die Kinder sollten entscheiden, *welche* Aufgaben sie *warum* mündlich bzw. schriftlich rechneten.

Kopfrechnen – schriftliches Rechnen: Zunächst wurden ihnen folgende fünf Aufgaben zur Addition im Zahlenraum bis 1000 präsentiert.

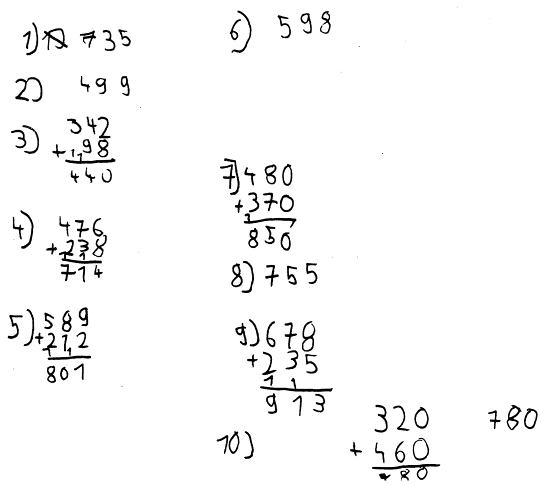
1) 278+199 2) 340+250 3) 280+200 4) 138+133 5) 721+247

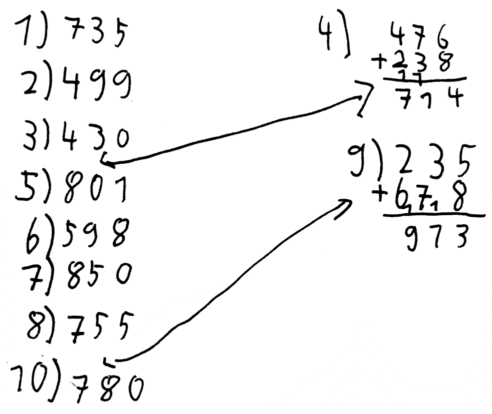
Die Schülerinnen und Schüler sollten im Unterrichtsgespräch für sich begründet bzw. für andere nachvollziehbar entscheiden, welche der folgenden Aufgaben sie im Kopf bzw. schriftlich rechnen würden. Kriterien, die hier genannt wurden, waren Nullen an der Einer- bzw. der Zehnerstelle ("glatte Zahlen"), die Anzahl der Überträge oder die Nähe zu einer 'glatten Zahl'.

Entscheide selbst: im Kopf oder schriftlich? Dann erhielten die Schülerinnen und Schüler zehn weitere Aufgaben, die sie allein oder in Partnerarbeit lösten. Sie sollten dabei jeweils entscheiden, ob sie schriftlich oder mündlich rechneten. Da manche Kinder dazu neigten, sämtliche Aufgaben entweder so oder so zu rechnen, gab es eine Zusatzbedingung: Jeweils mindestens zwei Aufgaben waren im Kopf bzw. schriftlich zu rechnen.

1) 700+ 35 2) 249+250 3) 342+ 98 4) 476+238 5) 589+212
6) 500+ 98 7) 480+370 8) 720+ 35 9) 235+678 10) 320+460

Dabei ergaben sich erwartungsgemäß unterschiedliche Verteilungen: Kinder, die jeweils die Hälfte der Aufgaben mit einer Methode lösten, solche, die fast alles schriftlich, aber auch solche, die nahezu alles im Kopf rechneten.





Warum im Kopf, warum schriftlich? Die Schülerinnen und Schüler wurden auch gebeten, aufzuschreiben, warum sie welche Aufgaben mit welcher Methode gerechnet hatten. Die beiden Kommentare von Nadine und Victor verdeutlichen, dass einige Kinder eher global antworteten, während andere schon recht differenzierte Aufgabenkriterien als Entscheidungsgrundlage benannten. Selbstverständlich wäre es auch möglich gewesen, die Kinder diese Äußerungen vollständig oder auch teilweise mündlich machen zu lassen, denn es geht im Unterricht ja sowohl um die Schulung der mündlichen als auch der schriftlichen Ausdrucksfähigkeit.

NADINE

Du hast mindestens 2 Aufgaben im Kopf gerechnet. Welche sind das?

WARUM hast du sie im Kopf gerechnet?

Ich habe die Nr. 1 im Kopf gerechnet denn wenn ~~man~~ hinten nullen stehen und man dann etwas dazuzählt / geht es leicher. Wenn man es schriftlich macht dauert es auch länger.

1) Ich habe 7 Aufgaben im Konfgerechnet aber auch 3 ~~A~~ schriftlich. Ich habe jetzt gemerkt das ~~s~~ es nicht immer gelt ist im Kopf zurechnen,

2) Ich fande diese 3 Aufgaben sehr schwer weil ich nicht mit den hohen Zahlen zu-recht komme,

Stelle deine Arbeit vor: Im Anschluss an die Phase der Einzel- bzw. Partnerarbeit präsentieren und diskutieren die Schülerinnen und Schüler ihre Vorgehensweisen und ihre Texte in kleineren Gruppen. Ausgewählte Aspekte wurden danach auch im Klassenverband besprochen.

Erfinde eigene Aufgaben: Abschließend sollten die Kinder fünf Aufgaben, die sich gut für das Kopfrechnen, und fünf weitere, die sich gut für das schriftliche Rechnen eignen, erfinden. Diese Eigenproduktionen erforderten noch einmal aus einer anderen Perspektive das Nachdenken über Aufgabenmerkmale, aber auch über eigene Präferenzen.

im Kopf

1) 200 + 300 = 500
2) 401 + 37 = 438
3) 150 + 140 = 290
4) 127 + 700 = 827
5) 150 + 149 = 299

schriftlich

1) 237
+ 588
1 1
825

2) 478
+ 478
1 1
956

3) 483
+ 216
699

4) 421
+ 358
+ 107
1
886

5) 153
+ 264
1
417

Zwischen Offenheit und Zielorientierung

Ich denke, dass Folgendes aus dem Beispiel deutlich werden kann: Mit den Augen der Kinder zu schauen und ein Lernen auf eigenen Wegen zu ermöglichen, bedeutet nicht die Gleichsetzung mit unreflektierter *Kindzentrierung*. Guter Mathematikunterricht profitiert vom produktiven Spannungsverhältnis von *Offenheit* und *Zielorientierung*. Er baut auf vorhandenen Kompetenzen auf. Gleichzeitig ist er zielgerichtet und konzeptionell fundiert. Aber das Konzept ist *bottom up* angelegt, nicht *top down*. Das verstehen wir unter ‚*mehr Subjektorientierung*'.

Literatur

Freudenthal, Hans (1982): Mathematik – eine Geisteshaltung. *Grundschule* H. 4, 140-142.

Selter, Christoph & Hartmut Spiegel (1997): *Wie Kinder rechnen*. Leipzig: Klett.

Spiegel, Hartmut & Christoph Selter (2003): *Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten*. Seelze: Kallmeyer.

Sundermann, Beate & Christoph Selter (2006): *Leistung im Mathematikunterricht: mehr als Klassenarbeiten*. Berlin: CVK.

Wittmann, Erich Ch. (1995): Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht. In: Gerhard Müller & Erich Ch. Wittmann (Hg.): *Mit Kindern rechnen*. Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule, 10-41.

Wittmann, Erich Ch. (2003): Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht in der Grundschule? In: Monika Baum & Hans Wielpütz (Hg.): *Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch*. Seelze: Kallmeyer, 18-46.