Haus 1

Mathematische und didaktische Informationen zum Thema „Wahrscheinlichkeiten“ sowie zum Spiel „Ziffernkarten ziehen“

Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Grundschule?

Die inhaltbezogene Kompetenz „Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten“ ist seit 2008 fester Bestandteil des Lehrplans Mathematik für das Bundesland Nordrhein-Westfalen. Zu den dort angegebenen Kompetenzerwartungen für das Ende des vierten Schuljahres gehören die folgenden beiden Punkte:

„Die Schülerinnen und Schüler

- *bestimmen die Anzahlen verschiedener Möglichkeiten im Rahmen einfacher kombinatorischer Aufgabenstellungen*
- *beschreiben die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen (sicher, wahrscheinlich, unmöglich, immer, häufig, selten, nie)“*

(MSW NRW 2008, S.66).

Bereits in der Grundschule sollen also erste Grundlagen zu diesem Thema geschaffen werden. Dies ist deshalb sinnvoll, weil die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs Zeit benötigt (vgl. Eichler 2010, S.8) und oftmals Fehlvorstellungen vorherrschen, die, sofern sie unhinterfragt und unreflektiert bleiben, die Aneignung stochastischer Vorstellungen erschweren können (vgl. Prediger 2005). Jedoch sollte man bedenken, dass Elemente der kombinatorischen Anzahlbestimmung und Wahrscheinlichkeitsrechnung sich mit Grundschulkindern nur an realen Situationen aus ihrer Lebenswirklichkeit erarbeiten lassen (vgl. Bobrowski 2010, S. 4). Besonders spielerische Anlässe bieten sich an, um Gespräche über Zufall und Wahrscheinlichkeiten anzuregen, da sie eng mit der Lebenswirklichkeit der Kinder verbunden sind (vgl. Eichler 2010, S.8).

Zunächst soll hier ein kurzer mathematischer Überblick über das Thema „Wahrscheinlichkeiten“ und über typische Fehlvorstellungen gegeben werden, um dann das der Unterrichtseinheit „Reines Glück oder doch nicht? – Wir werden Spielforscher“ zugrunde liegende Spiel „Ziffernkarten ziehen“ näher zu beschreiben und didaktische Hinweise zu geben. (Das Spiel „Ziffernkarten ziehen“ entstand aus einer Kombination der Spiele von Schwarzkopf 2004, S. 32 - 34 und Spiegel & Selter 2008, S. 57.)

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeiten geben an, mit welchem Grad an Sicherheit ein zufälliges Ergebnis eintreffen wird. Allgemein lässt sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnen, indem man den Quotienten aus der Anzahl der für das Ereignis günstigen und der Anzahl aller möglichen Versuchsausgänge bestimmt. Dabei erhält man Werte zwischen 0 und 1, wobei 1 für *sicher*, 0 für *unmöglich* und Werte dazwischen für *wahrscheinlich* (mit einer jeweiligen Tendenz zu *sicher* bzw. *unmöglich*) stehen. Für die Grundschule sollte man sich auf die Verwendung der Begriffe *sicher*, *wahrscheinlich* und *unmöglich* beschränken und auf die Arbeit mit Zahlenwerten verzichten (vgl. Hahn, Kahnt & Maurer 2009, S.9-12).

Die Angabe einer Wahrscheinlichkeit kann allerdings nicht das Eintreten eines Ereignisses vorhersagen. Die Wahrscheinlichkeit gibt einzig Auskunft darüber, wie groß die Chance ist, dass das gewünschte Ergebnis eintrifft (vgl. ebd. S.10). Nach dem *Gesetz der großen Zahlen* nähert sich bei einer sehr großen Anzahl von Versuchen die relative Häufigkeit der günstigen Ereignisse (Verhältnis aus der Anzahl des Eintretens des Ereignisses zur

Gesamtzahl der Versuche) der theoretisch berechneten Wahrscheinlichkeit an (vgl. Eichler 2010, S.9).

Fehlvorstellungen

Häufig ist zu beobachten, dass Kinder aus ihrem Alltag, z.B. aus den Handlungen von Erwachsenen, heraus Fehlvorstellungen zum Thema „Zufall“ und „Wahrscheinlichkeiten“ entwickelt haben. So ist es denkbar, dass verborgene Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Versuchen angenommen werden (Kompensationsargument), also dass ein vorheriges Ereignis beeinflusst, welches Ereignis im Versuch danach wahrscheinlich ist. Ebenso kann die Vorstellung existieren, der Zufall würde „unregelmäßige“ Ereignisse produzieren (beispielsweise beim Lotto: 1-2-3-4-5-6 ist unwahrscheinlicher als 2-6-12-15-26-39). Auch wird oft geringe Wahrscheinlichkeit mit Unmöglichkeit sowie hohe Wahrscheinlichkeit mit Sicherheit verwechselt. Ebenso denkbar sind Vorstellungen, dass bestimmte Glück bringende Handlungen, wie Augenschließen o.ä., den Versuchsausgang beeinflussen können (vgl. Eichler 2010, S. 8).

Wahrscheinlichkeiten im Spiel ‚Ziffernkarten ziehen‘

Besonders das *Gesetz der großen Zahlen* wird für die Unterrichtseinheit „Reines Glück oder doch nicht? – Wir werden Spielforscher“ genutzt. Im Spiel „Ziffernkarten ziehen“ hat ein Spieler eine fünfmal so große Gewinnwahrscheinlichkeit wie der andere. (Warum dies so ist, wird im Folgenden noch näher erläutert.) Nach dem *Gesetz der großen Zahlen* wird dieser Spieler bei einer großen Anzahl von Spielrunden ungefähr fünfmal häufiger gewinnen als der andere Spieler. Natürlich wird dies die Kinder ärgern, aber gerade deshalb haben sie eine Motivation, zu ergründen, woran es liegt, dass einer der beiden Spieler viel häufiger gewinnt als der andere. Die Kinder werden also durch intrinsische Beweggründe, dazu gebracht das Thema „Wahrscheinlichkeit“ zu erforschen (vgl. Eichler 2010, S. 8).

Aber wieso hat denn nun einer der Spieler eine fünfmal höhere Gewinnchance? Grundlage des Spiels sind ein Spielfeld und vier Ziffernkarten, welche in einem Beutel sind (vgl. Abbildungen 1 und 2). Aus diesem Beutel werden jeweils nacheinander zwei Ziffernkarten gezogen und auf den dafür vorgesehenen Feldern des Spielfeldes platziert. Anschließend wird das Ergebnis der sich ergebenden Malaufgabe errechnet. Einer der Spieler bekommt einen Punkt bei geraden Ergebnissen, der andere bei ungeraden. Gewonnen hat, wer zuerst drei Punkte hat (vgl. Spielregeln in Abbildung 3).

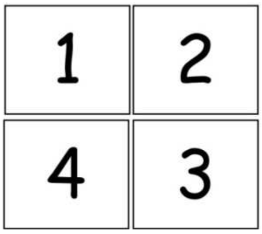

Abb. 1: Ziffernkarten

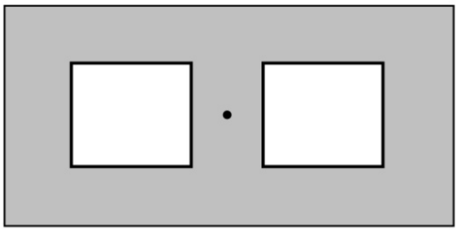

Abb. 2: Spielfeld

Spielregeln „Ziffernkarten ziehen“

Zieht nacheinander je eine Karte aus dem Beutel und legt sie auf das Feld auf eurer Seite des Spielfeldes! Berechnet das Ergebnis der Malaufgabe!

Spieler 1 bekommt einen Punkt, wenn das Ergebnis gerade ist.
Spieler 2 bekommt einen Punkt, wenn das Ergebnis ungerade ist.
Wer zuerst 3 Punkte hat, gewinnt das Spiel.

Abb.3: Spielregeln

Um Einsicht in die Gewinnwahrscheinlichkeiten der Spieler zu erlangen, muss man sich die Aufgaben ansehen, die aus den vorhandenen Karten gezogen werden können. Es handelt sich hierbei um eine kombinatorische Aufgabe des Typs „Variation ohne Wiederholung“ (vgl. Spiegel & Selter 2004, S. 294). Eine effektive Möglichkeit, die auch Kinder oft eigenständig entwickeln und nutzen, um alle Aufgaben zu finden, ist das systematische Aufschreiben in einer Liste (vgl. Ruwisch 2010, S. 5), beispielsweise geordnet nach dem ersten Faktor der Malaufgabe:

$1 \cdot 2 = 2$	$2 \cdot 1 = 2$	$3 \cdot 1 = 3$	$4 \cdot 1 = 4$
$1 \cdot 3 = 3$	$2 \cdot 3 = 6$	$3 \cdot 2 = 6$	$4 \cdot 2 = 8$
$1 \cdot 4 = 4$	$2 \cdot 4 = 8$	$3 \cdot 4 = 12$	$4 \cdot 3 = 12$

Betrachtet man alle 12 Aufgaben, die gezogen werden können, wird deutlich, dass davon nur zwei Aufgaben (grün markiert) ein ungerades Ergebnis haben und zehn ein gerades. Der Spieler, der bei den geraden Ergebnissen gewinnt, hat also fünfmal so viele günstige Ergebnisse und somit bei jedem Zug eine fünfmal so hohe Wahrscheinlichkeit wie der andere Spieler, einen Punkt zu bekommen. Wie bereits oben geschildert, merken die Kinder dies sehr schnell. Auch kommen sie schnell auf die Idee, sich die möglichen Aufgaben anzusehen, da ihnen ebenfalls meist bereits nach nur wenigen Spielrunden auffällt, dass der Spieler mit den ungeraden Zahlen nur bei zwei der Aufgaben gewinnt, während es für den anderen Spieler mehrere Aufgaben gibt.

Das Spiel „Ziffernkarten ziehen“ bietet den Kindern also die Möglichkeit, je nach Vorwissen zunächst grundlegende Erfahrungen mit zufälligen Ereignissen zu machen. So können sie entdecken, dass bestimmte Ereignisse häufiger auftreten als andere, was dazu motivieren kann, darüber nachzudenken, ob dies Zufall ist oder ob es eine andere Erklärung dafür gibt. Die Kinder werden dazu veranlasst, das Spiel systematischer zu analysieren und über Wahrscheinlichkeiten von bestimmten Ziffernkombinationen nachzudenken (vgl. Eichler 2010, S.8).

Zusätzliche Potenziale des Spiels „Ziffernkarten ziehen“

Das Spiel „Ziffernkarten ziehen“ bietet zusätzlich die Möglichkeit, sich mit arithmetischen Bereichen wie den Paritätengesetzen zu beschäftigen. Indem die Kinder sich überlegen, wann das Produkt zweier Zahlen ungerade ist, können sie ebenfalls etwas über das Verhältnis der günstigen Aufgaben der Einzelspieler und somit über deren Gewinnwahrscheinlichkeiten herausfinden. Ein ungerades Ergebnis entsteht nur, wenn beide Faktoren ungerade sind. Sobald ein Faktor gerade ist, wird auch das Produkt gerade. Aus den vier Ziffern kann man nur zwei Aufgaben mit zwei ungeraden Faktoren legen, alle anderen Kombinationen, von denen es wesentlich mehr gibt, haben mindestens einen geraden Faktor und somit ein gerades Ergebnis. Es ist also nicht zwingend nötig, alle möglichen Aufgaben explizit zu finden.

Somit sind verschiedene Zugangsweisen möglich, wodurch man einer heterogenen Schülerschaft gerecht werden kann. Dazu trägt ebenfalls bei, dass das Spiel leicht zu modifizieren ist. So können beispielsweise weitere Ziffernkarten hinzugenommen oder die Gewinnregeln modifiziert werden. Diese Modifikationen können von den Kindern selbst vorgenommen werden, wodurch eine natürliche Differenzierung stattfinden kann und gleichzeitig Einsichten über Wahrscheinlichkeiten gewonnen und vertieft werden können. In der letzten Arbeitshase der Unterrichtseinheit steht genau dies im Vordergrund. Hier sollen die Kinder das Spiel so verändern, dass es fair wird. Dazu können sowohl die Ziffernkarten als auch die Spielregeln verändert werden.

Eine Möglichkeit, über die Veränderung der Zifferkarten eine faire Version zu erhalten, ist die Karte mit der 2 wegzulassen und stattdessen eine mit einer 5 in den Beutel zu legen. Nach dem gleichen Prinzip wie oben schreibt man nun alle Aufgaben auf, die man ziehen kann, und markiert jene mit ungeraden Ergebnissen grün:

$1 \cdot 3 = 3$	$3 \cdot 1 = 3$	$4 \cdot 1 = 4$	$5 \cdot 1 = 5$
$1 \cdot 4 = 4$	$3 \cdot 4 = 12$	$4 \cdot 3 = 12$	$5 \cdot 3 = 15$
$1 \cdot 5 = 5$	$3 \cdot 5 = 15$	$4 \cdot 5 = 20$	$5 \cdot 4 = 20$

Es ist augenscheinlich, dass jeder Spieler bei sechs der insgesamt zwölf Aufgaben einen Punkt bekommt, also beide Spieler gleiche Gewinnchancen haben.

Eine mögliche veränderte Gewinnregel, bei der das Spiel fair ist, ist die folgende:

> *Spieler A gewinnt bei Produkten, die kleiner oder gleich vier sind, Spieler B bei Produkten, die größer als vier sind.*

Diese Regel klingt zunächst unfair, da für Spieler A nur vier (1 bis 4) Gewinnzahlen zur Verfügung stehen für Spieler B jedoch zwölf (5 bis 16). Vergleicht man jedoch mit der Auflistung aller Aufgaben zu den Ziffernkarten 1 – 4 (siehe oben), erkennt man, dass nicht alle dieser Zahlen mögliche Ergebnisse der Malaufgaben sind und dass sich die Anzahl der möglichen günstigen Versuchsausgänge für beide Spieler auf jeweils sechs beläuft. Somit haben auch hier beide Spieler die gleiche Gewinnchance.

Sicherlich gibt es noch unzählige andere mögliche Variationen, in denen das Spiel fair ist. Die hier angeführten sollen lediglich der exemplarischen Veranschaulichung der Bandbreite der Möglichkeiten und des damit einhergehenden Differenzierungspotenzial dienen.

Weitere Lernchancen

Die Kinder lernen durch die Beschäftigung mit dem vorgestellten Glücksspiel, sich kritisch gegenüber solchen zu verhalten und ihre Chancen realistisch einzuschätzen. Die Unterrichtseinheit *„Reines Glück oder doch nicht? – Wir werden Spielforscher“* trägt also auch dazu bei, die Kinder zu mündigen Menschen zu erziehen, die Glückspielen nicht leichtgläubig begegnen (vgl. Schwarzkopf 2004, S. 32). Dies entspricht gleichsam den Forderungen des Lehrplans für den Mathematikunterricht nach **Anwendungs- und Strukturorientierung**. Demnach sollen sowohl die mathematischen Vorerfahrungen in lebensweltlichen Situationen aufgegriffen werden, als auch Einsichten über die Realität mit Hilfe mathematischer Methoden neu gewonnen, erweitert und vertieft werden (vgl. MSW NRW 2008, S.66). Beides wird bei der Beschäftigung mit diesem Spiel berücksichtigt.

In der gesamten Einheit werden zudem die **prozessbezogenen Kompetenzen** angesprochen:

Sofern Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit noch nicht behandelt wurden, haben die Kinder für solche Aufgabentypen noch keine Strategien entwickelt. Sie stehen vor einem Problem. Um es zu lösen, erschließen sie Zusammenhänge, stellen Vermutungen an, probieren systematisch, reflektieren und prüfen. Wenn sie selbst faire Regeln finden, übertragen, variieren und erfinden sie. Diese Kompetenzen zählen zu der prozessbezogenen Kompetenz *Problemlösen* (vgl. MSW NRW, S.57).

Die prozessbezogene Kompetenz des *Modellierens* wird insofern angesprochen, dass das theoretische Konstrukt der Wahrscheinlichkeit an sich ein Modell ist. Beim Zuschreiben einer Wahrscheinlichkeit wird mit entsprechenden Angaben, die in der Grundschule auf der Ebene der verbalen Beschreibung bleiben, ausgedrückt, mit welchem Grad an Wahrscheinlichkeit ein Ereignis eintreten wird. Somit wird eine reale Situation mathematisch modelliert. Die Kinder wenden folglich Mathematik auf eine konkrete Aufgabenstellung aus ihrer Erfahrungswelt (unfaires Spiel) an. Dabei erfassen sie die Sachsituation, übertragen sie auf ein mathematisches Modell und wenden mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten an, um anschließend einen Rückschluss auf die Realsituation zu ziehen (vgl. ebd. S.57).

Das *Darstellen/Kommunizieren* wird angesprochen, da die Kinder dazu angehalten werden, ihre Entdeckungen und Überlegungen zu dokumentieren. Dazu können sie verschiedene Darstellungsmittel wie Tabellen, systematische Auflistungen oder auch Skizzen verwenden.

Auch zum *Argumentieren* werden die Kinder explizit angeregt, da sie begründen sollen, wieso das Spiel nicht fair ist, bzw. ihre neuen Regeln es sind. Dazu müssen sie die Beziehungen zwischen den möglichen Ergebnissen und den Gewinnchancen erklären oder Vermutungen dazu anstellen.

Insgesamt zeigt sich, dass das Spiel „Ziffernkarten ziehen“ sehr reichhaltig ist und viele Möglichkeiten eröffnet, um einen handlungsorientierten Unterricht zum Thema „Wahrscheinlichkeiten“ zu gestalten.

Literatur

Bobrowski, S. (2010): Neue Lerninhalte im Mathematikunterricht? – Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten sind nicht neu, aber vielfältig. Und sie fordern Schülerinnen und Schüler heraus. In: *Praxis Grundschule*. 33. Jg. H.3, S. 4.

Eichler, K.-P. (2010): Wahrscheinlich kein Zufall – Betrachtungen rund um Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit. In: *Praxis Grundschule.* 33. Jg., H. 3, S. 7-13.

Hahn, H., Kahnt, J. & Maurer, F. (2009): Wahrscheinlich ist „… es kann klappen, muss aber nicht…“ – Erfahrungen mit Wahrscheinlichkeitsaufgaben in der Grundschule. In: *Sache-Wort-Zahl*. 37. Jg., H.102, S. 9-16.

Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalens (2008): *Lehrplan für die Grundschulen des Landes Nordrhein-Westfalen.*

Prediger, S. (2005): Wenn man Schwein gehabt hat, kann man zwei Dreien kriegen. Fallbeispiele zu Überschneidungseffekten bei stochastischen Vorstellungen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005 online.* http.:ww.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/BzMU/BzMU2005/Beiträge/prediger-gdm05.pdf (Abruf am 11.01.2012).

Ruwisch, S. (2010): Zählen, ohne zu zählen. *Grundschule Mathematik*. H. 27, S. 4-5.

Spiegel, H. &Selter, Ch. (2004): Elemente der Kombinatorik. In: G. N. Müller, H. Steinbring & E. Ch. Wittmann (Hg.): *Arithmetik als Prozess*. (1. Aufl.). Seelze: Klett-Kallmeyer. S. 291-311.

Spiegel,H. &Selter, Ch. (2008): *Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten.* (5. Aufl.) Seelze-Velber: Erhard Friedrich Verlag.

Schwarzkopf, R. (2004): Wer gewinnt? – Dem Zufall auf der Spur. In: *Die Grundschulzeitschrift.* 18. Jg., H. 172, S. 32 - 36.