# Sachinformation Haus 2.3:

# Symmetrie und Kongruenz
# Typen von Kongruenzabbildungen

**Dr. Berthold Schuppar: Elementargeometrie (Skript zur Vorlesung)**

**Kapitel 1: S. 18-23**

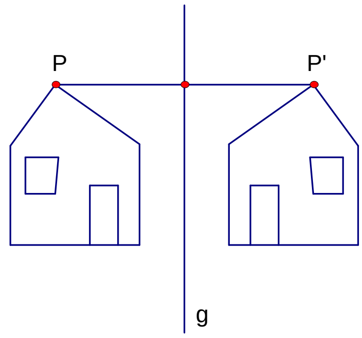
## 1.3 Symmetrie und Kongruenz

Der Begriff „Symmetrie" ist untrennbar verbunden mit den zugehörigen Abbildungen, die eine Figur mit sich selbst zur Deckung bringen oder eine deckungsgleiche Figur erzeugen, den ***Symmetrie- oder Kongruenzabbildungen.***

Die Grundtypen sind *Spiegelung*, *Drehung* und *Verschiebung (Translation)*. Bei begrenzten Figuren sind als Deckabbildungen nur Spiegelungen und Drehungen möglich. Parkette und Bandornamente sind praktisch unbegrenzt (im Sinne von beliebig fortsetzbar), sie lassen auch Verschiebungen als Deckabbildungen zu.

Oftmals beschränkt man die Abbildungen auf die betrachtete Figur, aber im Prinzip sind sie Abbildungen der gesamten Ebene auf sich: Jedem Punkt *P* der Ebene wird ein Bildpunkt *P'* zugeordnet. Ihre wichtigsten Eigenschaften:

(1) ***Spiegelung*** an einer Geraden *g* (genauer *Achsenspiegelung*):
Die Strecke *PP'* wird von der Achse *g* senkrecht halbiert.
Anders gesagt: *g* ist die Mittelsenkrechte von *PP'*.

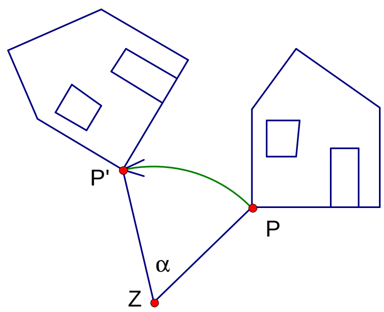



Konkret heißt das: Wenn man auf die Achse einen Spiegel stellt (senkrecht zur Zeichenebene), dann liegt der Bildpunkt *P* genauso weit „hinter" dem Spiegel wie der Urpunkt *P* „vor" dem Spiegel. Die geometrische Spiegelung modelliert also den realen Spiegel: Die Physiker bezeichnen die Spiegelbilder auch als „virtuelle Objekte", die sich optisch genauso verhalten wie die „realen Objekte", sie befinden sich nur an einem anderen Platz.

(2) ***Drehung*** um einen Punkt *Z* (Zentrum) mit einem Winkel $\alpha$:

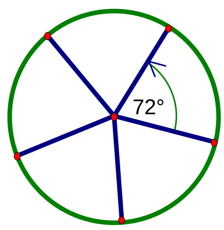
$$\overline{P'Z} = \overline{PZ} \quad , \quad \angle PZP' = \alpha$$

$\alpha$ ist ein *orientierter* Winkel, positiv im Gegenuhrzeigersinn, $0° < \alpha < 360°$ (man kann auch negative Winkelmaße verwenden, dann wird im Uhrzeigersinn gedreht).

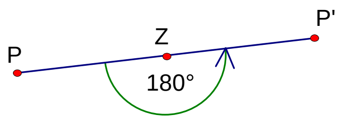


Bei drehsymmetrischen Figuren ist der kleinstmögliche Drehwinkel $\alpha$ ein ganzzahliger Teil des Vollwinkels:

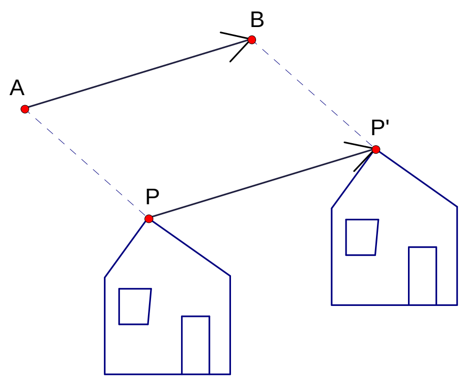
$\alpha = \frac{360°}{n}$ mit einer natürlichen Zahl $n \geq 2$ (typischer Fall: Rad mit $n$ Speichen). Beispiel: Bei „fünfzähliger" Drehsymmetrie ist $\alpha = 72°$.




Ein Sonderfall ist die Drehung um 180°, genannt ***Punktspiegelung***.
In diesem Fall bilden die Punkte *P, Z, P'* einen gestreckten Winkel, deshalb ist *Z* immer der Mittelpunkt der Strecke *PP'*. *Z* wird dann auch *Spiegelpunkt* oder *Spiegelzentrum* genannt.



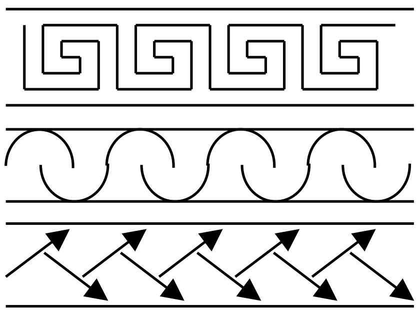

(3) ***Verschiebung (Translation)*** um einen Vektor $\overrightarrow{AB}$:
Hier ist immer $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AB}$, d. h. alle Strecken *PP'* sind gleich lang und parallel zu *AB*; genauer: Das Viereck *ABP'P* (in dieser Reihenfolge!) bildet immer ein Parallelogramm.

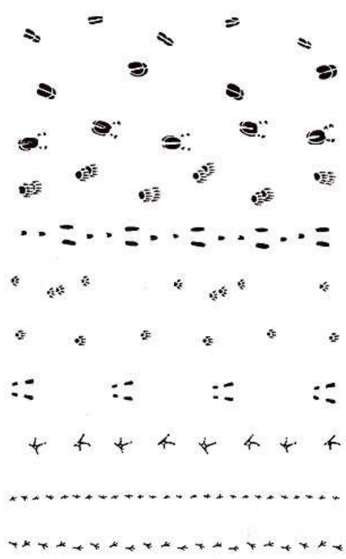



(...)

Gemeinsames Merkmal all dieser Kongruenzabbildungen ist: *Form* und *Größe* der Figuren bleiben erhalten. (Invarianz der Längen- und Winkelmaße). Im Kapitel 6 werden wir sie genauer unter die Lupe nehmen.

***Bandornamente*** sind streifenförmige Muster, sie entstehen durch regelmäßige Wiederholung (Verschieben) eines Grundmusters, das im Folgenden „Motiv" genannt wird. Wenn man ein Motiv in eine Gummiwalze schneidet und dann durch Abrollen der Walze das Motiv auf Papier druckt, dann entsteht ein Bandornament.





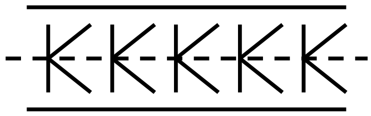
Man findet sie bereits auf prähistorischen Gebrauchsgegenständen (Tontöpfe u. Ä.). Jede Kultur hat ihre typischen Bandornamente hervorgebracht: Verzierungen jeder Art, Wandschmuck (Friese), gewebte Bänder, Borten, Geschenkband, Schlüsselbänder, Freundschaftsbänder, Zopfmuster .... Auch Tierspuren kann man als Bandornamente ansehen.

(...)

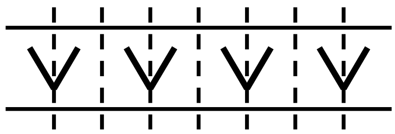
Welche *Deckabbildungen* können Bandornamente haben?
Da gibt es zunächst einmal die *Verschiebungen*. Ein Band ist im Prinzip unendlich lang (nach beiden Seiten beliebig fortsetzbar). Wenn *e* die Länge des Motivs ist, sozusagen als „Einheit“ des Ornaments, dann ist die Verschiebung um *e* nach rechts per definitionem eine Deckabbildung, und alle ganzzahligen Vielfachen sind es ebenso.

Je nach der Gestalt des Motivs kann es weitere Deckabbildungen geben:

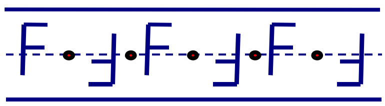
- *Längsspiegelung*:
  Die Spiegelachse ist die Mittellinie des Bandes.



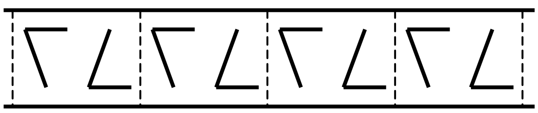
- *Querspiegelung*:
  Spiegelachsen sind Geraden senkrecht zur Band-Richtung.



- *Punktspiegelung*:
  Die Spiegelpunkte liegen auf der Mittellinie.



Auch Kombinationen dieser Symmetrien können vorkommen.

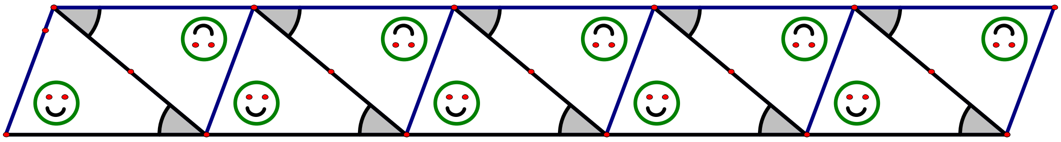


Das Bandornament rechts hat sicherlich auch eine gewisse Symmetrie, aber es ist offenbar weder achsen- noch punktsymmetrisch.
Man kann jedoch das Ornament um eine halbe Motivlänge verschieben und dann an der Mittellinie spiegeln. Diese Verschiebung und diese Spiegelung allein sind *keine* Deckabbildungen des Bandes, nur zusammen funktioniert es, und deshalb sollten wir diese Kombination als *neuen Typ* von Deckabbildung in unsere Liste aufnehmen:

- ***Schubspiegelung***,
  bestehend aus einer Verschiebung in Band-Richtung und einer Spiegelung an der Mittellinie.

Untersuchen Sie Bandornamente auf ihre Symmetrien!
Wenn man diese vier Symmetrien beliebig miteinander kombinieren könnte, dann gäbe es $2^4 = 16$ verschiedene Typen von Bandornamenten (WARUM?). Es stellt sich aber später heraus, dass es nur *sieben* verschieden Symmetrie-Typen gibt (vgl. Kap. 6).

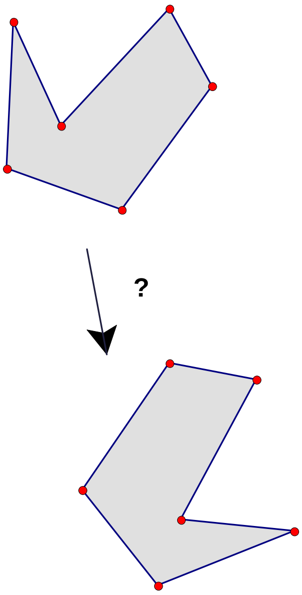
Noch eine geometrische Anwendung: Schneiden Sie ein kleines Dreieck beliebiger Form aus Pappe und zeichnen Sie mit dieser Schablone ein Bandornament. (Sie können es auch noch ein bisschen verzieren, damit es nicht so langweilig aussieht.) Welche Symmetrien hat es?
Was hat das mit der Winkelsumme im Dreieck zu tun?



***Kongruenz***

Die Eigenschaft „kongruent“ bedeutet allgemein „übereinstimmend“, in der Geometrie heißt es „deckungsgleich“: Zwei Figuren sind kongruent, wenn sie mit einer Kongruenzabbildung ineinander transformiert werden können.

Aber damit wird die Begriffsklärung nur verschoben: Was ist denn eine Kongruenzabbildung? Das ist eine *längentreue* Abbildung der Ebene auf sich. Es stellt sich heraus, dass es genau die Abbildungen sind, die schon beim Thema Symmetrie die zentrale Rolle gespielt haben, nämlich Translation, Drehung, Achsenspiegelung und Schubspiegelung (s. o., Weiteres in Kap. 6).



Wie stellt man fest, ob zwei Figuren kongruent sind? Man legt die eine auf die andere um zu prüfen, ob sie sich decken, und das wird durch eine der obigen Abbildungen realisiert. Als Denkmodell ist das gut und sinnvoll, aber praktisch hat es Grenzen, denn eine solche Abbildung zu finden ist nicht immer einfach.

Zweite Möglichkeit: Man vergleicht die Maße der Figuren. Stimmen alle Maße entsprechender Stücke überein, dann sind sie kongruent. Dabei möchte man natürlich so sparsam wie möglich vorgehen, d. h. man muss nicht unbedingt *alle* Stücke miteinander vergleichen.

**Dr. Berthold Schuppar: Elementargeometrie (Skript zur Vorlesung)**

**Kapitel 6: S. 11-19**

## 6.3 Verketten von Kongruenzabbildungen

Zwei Kongruenzabbildungen werden nacheinander ausgeführt. Daraus ergibt sich natürlich wieder eine Kongruenzabbildung. Aber welche? Genauer: Von welchem Typ ist sie? Wie kann man ihre Bestimmungsstücke angeben, in Abhängigkeit von den Bestimmungsstücken der Komponenten?

Das sind die zentralen Fragen dieses Abschnitts. Wir werden anhand einiger typischer Beispiele verschiedene Methoden zur Behandlung dieses Problems entwickeln. Es wird jedoch keine Vollständigkeit angestrebt in dem Sinne, dass wir alle möglichen Kombinationen diskutieren.

(...)

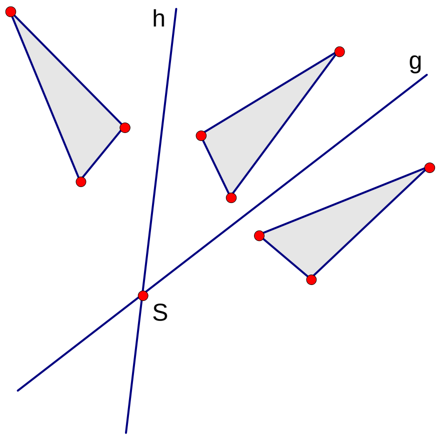
Die naheliegende Methode ist: Nimm irgendeine (möglichst unsymmetrische) Figur $F$, konstruiere das Bild $F^*$ unter Abbildung 1, dann dessen Bild $F'$ unter Abbildung 2, und untersuche: Wie kann man $F'$ direkt aus $F$ erzeugen? Diese "explorative Methode" ergibt jedenfalls wertvolle Hinweise, welche Abbildung es sein *könnte*, und wenn man den Typ kennt, dann braucht man nur zwei Paare Urpunkt-Bildpunkt, um sie genau anzugeben. Auf lange Sicht ist das aber umständlich; im Hinblick auf die vorigen Abschnitte können wir systematischer vorgehen:

- Beachte die Merkmale: Ist die Abbildung *gleich- oder gegensinnig*? Hat sie einen *Fixpunkt*?
- Wähle Testpunkte *geschickt* (was das heißt, sollen die Beispiele zeigen)!
- Auch die *Spuren* von Punkten sind charakteristisch und können eine Analyse fördern.

Zur Bezeichnung: Sind $\varphi$, $\psi$ die beiden Komponenten, dann bedeutet $\psi \circ \varphi$ die Abbildung "erst $\varphi$, dann $\psi$" (die Verknüpfung $\circ$ wird auch "$\psi$ nach $\varphi$" gelesen). Ist $P$ ein Punkt, dann wird mit $P^* = \varphi(P)$ der "Zwischenpunkt" und mit $P' = \psi(P^*) = \psi \circ \varphi(P)$ das Resultat der Verkettung bezeichnet.

Noch eine Anregung: Vertauscht man die Reihenfolge der Faktoren, dann wird sich im Allgemeinen eine andere Abbildung ergeben, zwar vom gleichen Typ und auch sonst irgendwie verwandt, aber doch anders.

(...)




**Ein möglicher Fall: Zwei Achsenspiegelungen**

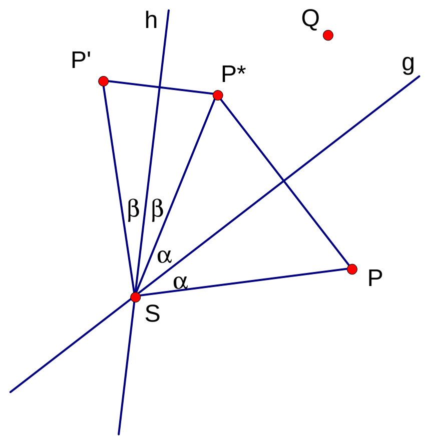
Zwei Geraden *g, h* seien gegeben. Was ist $\sigma_h \circ \sigma_g$ ?

<u>1. Fall:</u> *g* schneidet *h* im Punkt *S*.

Es könnte sich um eine Drehung handeln.

Warum? Betrachten wir einen einzelnen Punkt *P*.
Die Dreiecke $PSP^*$ und $P^*SP'$ sind gleichschenklig, beide mit der gleichen Schenkellänge $\overline{PS}$ . Also ist *P'* gleich weit von *S* entfernt wie *P*. Außerdem halbieren *g, h* jeweils (als Mittelsenkrechten der Basis) den Winkel bei *S*, und es gilt (vgl. Bild rechts):

$$\alpha+\beta = \angle(g, h) \quad \Rightarrow \quad \angle PSP' = 2\cdot(\alpha+\beta) = 2\cdot\angle(g, h)$$

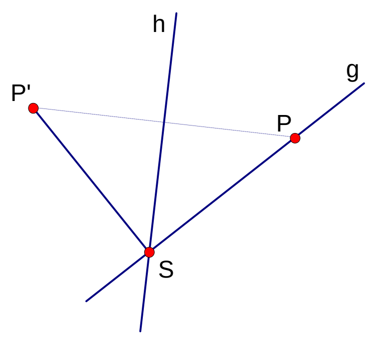



(Dabei ist $\angle(g, h)$ als *orientierter* Winkel zu verstehen, der *g* nach *h* dreht!) Wenn man die Lage von *P* ändert, dann ändern sich zwar α und β, aber nicht $\angle PSP'$, weil *g* und *h* fest bleiben.

Damit sind die Eigenschaften der Drehung nachgewiesen; das Zentrum ist *S*, und der Drehwinkel ist $2\cdot\angle(g, h)$.
Kleines Problem: Wie ändert sich die Figur, wenn $P^*$ nicht zwischen *P* und *P'* liegt? Konstruieren Sie die Figur z.B. für den Punkt *Q* ! Gilt auch hier $\angle QSQ' = 2\cdot\angle(g, h)$?

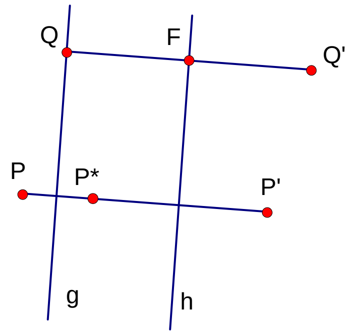
Stattdessen untersuchen wir jetzt die Merkmale.
Die Verkettung zweier *gegensinniger* Abbildungen ist immer *gleichsinnig*, denn beide Komponenten kehren den Umlaufssinn einer Figur um, also bleibt er beim Resultat erhalten.
Der Schnittpunkt *S* der Spiegelachsen ist Fixpunkt bei *beiden* Spiegelungen, also auch bei der Verkettung. Nach dem Klassifikationssatz *muss* es sich daher um eine Drehung handeln! Das Drehzentrum ist der Fixpunkt, also *S*. Um den Drehwinkel zu bestimmen, wählen wir einfach einen Punkt *P* auf *g*, denn dann ist $P^* = P$, also $P' = \sigma_h(P)$. Daraus ergibt sich unmittelbar der Drehwinkel als $\angle PSP' = 2\cdot\angle(g, h)$ .

Es ist hoffentlich klar geworden, dass dies wesentlich ökonomischer und durchsichtiger ist (in komplexeren Situationen wird sich der Vorteil noch stärker auswirken).



2. Fall: *g* und *h* sind parallel.

Die resultierende Abbildung ist *gleichsinnig* (wie oben).




Alle Strecken *PP'* sind senkrecht zu *g* und *h*, also parallel zueinander, somit kann es keine Drehung sein: Es bleibt nur die Verschiebung. Wählt man *Q* auf *g*, dann ist $Q' = \sigma_h(Q)$, also ist die Länge des Verschiebungsvektors gleich dem doppelten Abstand von *g* und *h* (vgl. Bild: $\tau = \overrightarrow{QQ'} = 2 \cdot \overrightarrow{QF}$ , *F* ist der Fußpunkt des Lotes von *g* auf *h*). Zeichnen Sie trotzdem ein Dreieck und konstruieren Sie das doppelte Spiegelbild, um sich davon zu überzeugen!

→ Es gibt natürlich eine Vielzahl weiterer Kombinationen, die hier nicht ausführlich dargestellt werden können, daher hier nur eine tabellarische Übersicht einiger möglicher Fälle:

| **Verkettung** | **Resultierende Abbildung** |
|---|---|
| Zwei Achsenspiegelungen<br>(Spiegelachsen schneiden sich) | Drehung (s. Beispiel) |
| Zwei Achsenspiegelungen<br>(Spiegelachsen schneiden sich) | Verschiebung (s. Beispiel) |
| Zwei Punktspiegelungen | Verschiebung |
| Achsenspiegelung und Verschiebung | Schubspiegelung |
| Achsenspiegelung und Drehung<br>(Drehzentrum liegt nicht auf der Spiegelachse) | Schubspieglung |
| Achsenspiegelung und Drehung<br>(Drehzentrum liegt auf der Spiegelachse) | Achsenspieglung |
| Zwei Drehungen<br>($\beta \neq -\alpha$) | Drehung |
| Zwei Drehungen<br>($\beta = -\alpha$) | Verschiebung |
| Zwei Verschiebungen | Verschiebung |
| … | … |

→ Es fällt auf, dass als Ergebnis der Verkettungen nur die vier verschiedenen Kongruenzabbildungen (s. Seite 3) entstehen.

*Anmerkung: Im Skript werden die Verknüpfungen ausführlich dargestellt. Für dieses Informationspapier wurde eine tabellarische Übersicht nachträglich erstellt.*

Ein anderer Zugang zum Problem des Verkettens von Kongruenzabbildungen ist das ***"Spiegelungsrechnen"***: Man kann jede Drehung, Translation, Schubspiegelung als Verkettung von Achsenspiegelungen darstellen. Wenn man das geschickt macht, dann kann man die Verkettung beliebiger Abbildungen algebraisch vereinfachen. Näheres dazu im Anhang.

Zum Abschluss des Themas kehren wir zu den ***Bandornamenten*** zurück. Wie im Kapitel 1 erwähnt, gibt es sieben Symmetrietypen; das werden wir jetzt beweisen.

Zuvor einige Bezeichnungen:

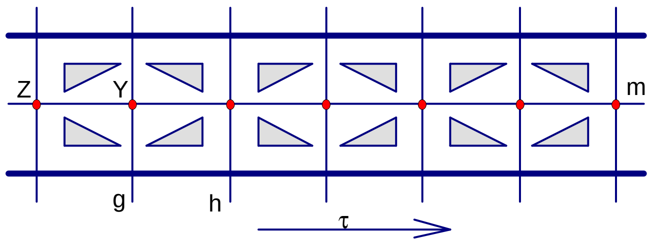
$\tau$ sei die elementare Verschiebung, die ein Motiv auf das (rechtsseitig) benachbarte schiebt; ihre Länge $t = |\tau|$ ist die Länge des Motivs.
Mögliche Symmetrien der Bandornamente sind:

a) die Längsspiegelung $\sigma_m$ ($m$ ist die Mittelparallele);
b) Querspiegelungen $\sigma_g$ , $\sigma_h$ , ... mit $g, h, \ldots \perp m$ ;
c) Punktspiegelungen $\sigma_Z$ , $\sigma_Y$ , ... mit $Z, Y, \ldots$ auf $m$ ;
d) Schubspiegelungen: $\sigma_m \circ \tau_s = \tau_s \circ \sigma_m$ sei diejenige mit dem kleinsten Verschiebungsvektor.

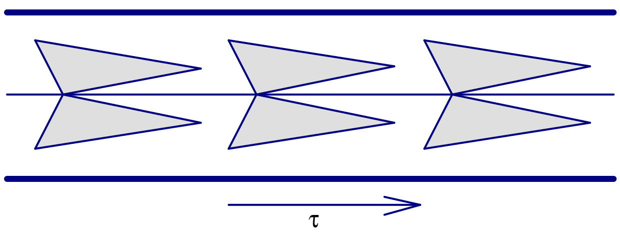
Und nun zur Klassifikation:

1. Das Bandornament habe die <u>Längsspiegelung</u> als Symmetrie.

   a) Wenn es auch <u>Querspiegelungen</u> hat, dann gibt es auch <u>Punktspiegelungen</u> als Verkettung von zwei Achsenspiegelungen mit senkrechten Achsen.
   Außerdem ist dann $\sigma_m \circ \tau$ eine <u>Schubspiegelung</u>: Typ $\boxed{\textbf{LQPS}}$

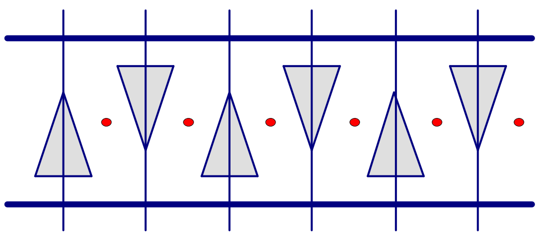


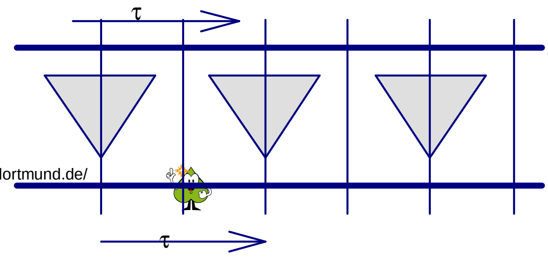

   b) Wenn es keine Querspiegelungen hat, dann gibt es auch keine Punktspiegelungen, denn die Verkettung von Längs- und Punktspiegelung ergäbe eine Querspiegelung. Es gibt jedoch die <u>Schubspiegelung</u> $\sigma_m \circ \tau$ : Typ $\boxed{\textbf{LS}}$




2. Das Bandornament habe keine Längsspiegelung, aber <u>Querspiegelungen</u> als Symmetrien.

   a) Wenn es auch <u>Punktspiegelungen</u> hat, dann liegen die Zentren nicht auf den Querspiegelachsen, sonst wäre $\sigma_Z \circ \sigma_g = \sigma_m$ die Längsspiegelung. Allerdings ist $\sigma_Z \circ \sigma_g$ , wenn $Z$ nicht auf $g$ liegt, eine <u>Schubspiegelung</u>:
   Typ $\boxed{\textbf{QPS}}$

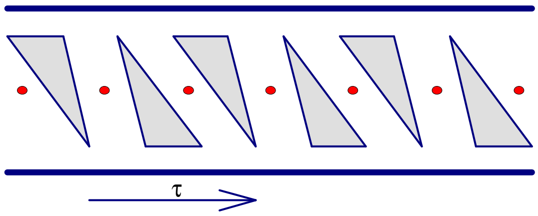


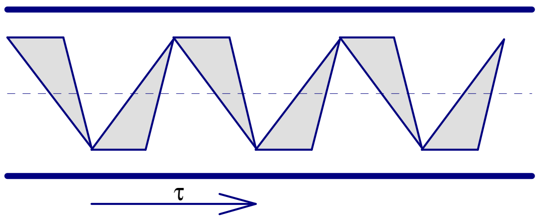
b) Wenn es keine Punktspiegelungen hat, dann gibt es auch keine Schubspiegelungen, denn eine Quer- und eine Schubspiegelung ergäbe eine Punktspiegelung $(\tau_s \circ \sigma_m) \circ \sigma_g = \tau_s \circ (\sigma_m \circ \sigma_g) = \tau_s \circ \sigma_Z = \sigma_Y$. Also gibt es nur Querspiegelungen: Typ $\boxed{\mathbf{Q}}$

3. Das Bandornament habe weder Längs- noch Querspiegelungen als Symmetrien.

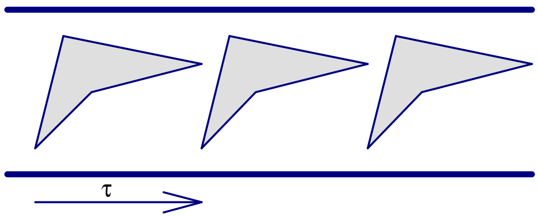
a) Wenn es Punktspiegelungen hat, dann gibt es keine Schubspiegelungen, denn als Verkettung dieser beiden würden Querspiegelungen entstehen: Typ $\boxed{\mathbf{P}}$




b) Wenn es Schubspiegelungen hat, dann gibt es auch keine Punktspiegelungen (siehe oben): Typ $\boxed{\mathbf{S}}$




c) Wenn es weder Punkt- noch Schubspiegelungen, mithin überhaupt keine Spiegelungen als Symmetrien hat, dann bleiben nur die Translationen: Typ $\boxed{\mathbf{T}}$




Außerdem können wir jetzt begründen, dass bei Quer- bzw. Punktsymmetrie die Abstände von Querspiegelachsen bzw. Punktspiegelzentren so regelmäßig sind:

- Sind *g*, *h* zwei *benachbarte* Querspiegelachsen, dann ist $\sigma_h \circ \sigma_g$ eine Translation; ihre Länge ist die kleinstmögliche, also *t*. Andererseits beträgt die Länge das Doppelte des Abstands der Achsen, also haben *g* und *h* den Abstand $\frac{1}{2}t$.
- Sind *Z* und *Y* zwei benachbarte Spiegelpunkte, dann haben sie ebenfalls den Abstand $\frac{1}{2}t$; die Begründung ist analog.
- Beim Typ $\boxed{\mathbf{QPS}}$ liegen die Spiegelpunkte genau in der Mitte zwischen den Punktspiegelzentren (warum?).

Für Schubspiegelungen $\tau_s \circ \sigma_m$ gilt:

- Wenn es Längsspiegelungen gibt (Typen $\boxed{\mathbf{LQPS}}$ und $\boxed{\mathbf{LS}}$), dann ist $(\tau_s \circ \sigma_m) \circ \sigma_m = \tau_s$ auch eine Symmetrie, also muss $\tau_s = \tau$ sein.
- Wenn es keine Längsspiegelung gibt (Typ $\boxed{\mathbf{S}}$), dann ist $(\tau_s \circ \sigma_m)^2$ die Translation τ, also gilt: $(\tau_s \circ \sigma_m)^2 = \tau_s \circ \sigma_m \circ \sigma_m \circ \tau_s = {\tau_s}^2 = \tau$. Daher muss $\tau_s$ die Länge $\frac{1}{2}t$ haben.