



Sachinformation "Umkehrzahlen"

Zu zweistelligen Zahlen mit unterschiedlichen Ziffern werden durch Vertauschen der Ziffern auf der Zehner- und Einerstelle (z. B. $63 \Rightarrow 36$) die Umkehrzahlen (in der Literatur findet man auch den Begriff „Spiegelzahlen“) gebildet. Anschließend wird die kleinere von der größeren Zahl subtrahiert. Auf diese Weise lassen sich insgesamt 45 Subtraktionsaufgaben mit 9 unterschiedlichen Ergebnissen bilden:

9	18	27	36	45	54	63	72	81
98-89	97-79	96-69	95-59	94-49	93-39	92-29	91-19	90-09
87-78	86-68	85-58	84-48	83-38	82-28	81-18	80-08	
76-67	75-57	74-47	73-37	72-27	71-17	70-07		
65-56	64-46	63-36	62-26	61-16	60-06			
54-45	53-35	52-25	51-15	50-05				
43-34	42-24	41-14	40-04					
32-23	31-13	30-03						
21-12	20-02							
10-01								

Die Differenzen sind Vielfache von 9. Welches Vielfache die Ergebniszahl bildet ist abhängig von der Differenz der Stellenwerte.

Beispiel:

$$63 - 36 = 27$$

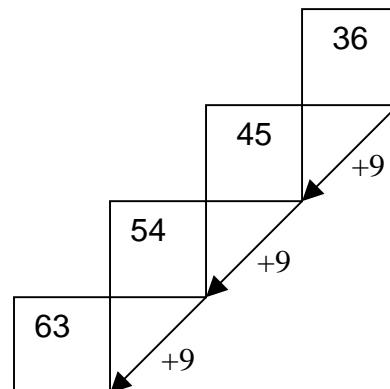
$$6 - 3 = 3$$

$$3 \cdot 9 = 27$$

Die Gesetzmäßigkeit kann mit Hilfe der Hundertertafel, der Stellentafel, dem halbschriftlichen Rechnen oder dem Rechenstrich eingesehen werden werden.

Hundertertafel:

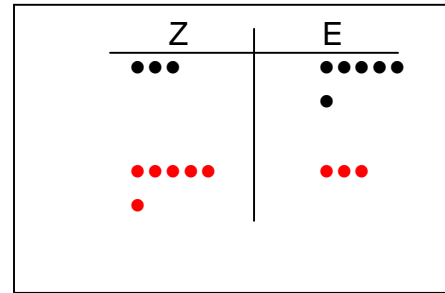
Die Zahlenpaare liegen auf der Hundertertafel „diagonal“. Man gelangt von der kleineren zur größeren Zahl, indem man jeweils auf der Hundertertafel ein Feld nach links (- 1) und anschließend ein Feld nach unten (+ 10), also diagonal + 9 schreitet. Der Unterschied der beiden Ziffern einer Ausgangszahl gibt jeweils an, wie viele Felder man in der jeweiligen Diagonalen überbrücken muss.



$$3 \cdot 9 = 27$$

Stellentafel:

Die Ausgangszahl wird mit Plättchen in der Stellentafel dargestellt. Beim Erzeugen der Umkehrzahl werden die Plättchen verschoben. Dadurch wird ein Einer entfernt (-1) und ein Zehner (+10) hinzugefügt. Dies entspricht einer Veränderung von +9. Die Differenz der beiden Ziffern einer Ausgangszahl gibt jeweils an, wie viele Plättchen man verschieben muss.

**Halbschriftliches Rechnen:**

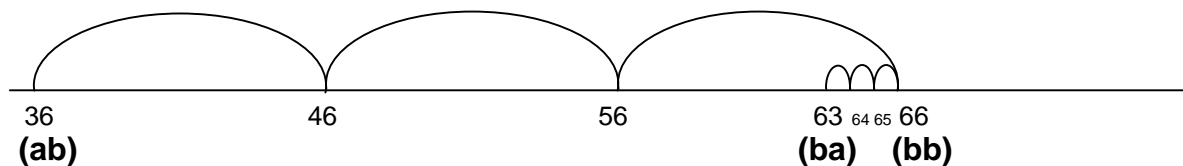
Eine weitere Möglichkeit zur Verdeutlichung bietet das halbschriftliche Rechenverfahren „Stellenwerte extra“:

$$\begin{array}{r} 63 - 36 = 30 - 3 = 27 \\ 60 - 30 \\ 3 - 6 \end{array}$$

Rechenstrich:

Der Rechenstrich stellt noch eine weitere, sehr anschauliche Möglichkeit dar, die Zusammenhänge aufzuzeigen.

Um von ab nach ba zu kommen ($a < b$), geht man $b - a$ Zehner nach vorne zur Zahl bb und dann $b - a$ Schritte zurück zu ba . Der Unterschied ist dann $(b-a) \cdot 10 - (b-a) = (b-a) \cdot 9$



Einfacher gesagt: Am Rechenstrich kann gezeigt werden, dass für jeden addierten Zehner jeweils ein Einer abgezogen werden muss. Beim Ziffernunterschied 3 ($63 - 36$) geht man also 3Z nach vorne und 3E zurück.

Immer 99:

Bildet man zur Ergebniszahl die Umkehrzahl und addiert diese beiden Zahlen ($27 + 72$), so erhält man immer 99 als Ergebnis.

Bei allen Vielfachen von 9, die kleiner oder gleich 90 sind, ergibt die Quersumme immer 9. Addiert man zwei Vielfache von 9, bildet man zweimal die Quersumme 9 – einmal bei den Einern und einmal bei den Zehnern.

Hinweise zu den Variationen:**a) Veränderung der Rechenvorschrift:**

Es gibt 17 verschiedene Ergebnisse zu den 45 Aufgaben. Die Ergebniszahlen sind Vielfache von 11. Welches Vielfach von 11 die Ergebniszahl bildet, ist abhängig von der Summe der Stellenwerte.

187	176	165	154	143	132	121	110	99	88	77	66	55	44	33	22	11
98+89	97+79	87+78	86+68	76+67	75+57	65+56	64+46	54+45	53+35	43+34	42+24	32+23	31+13	21+12	20+02	10+01
		96+69	95+59	85+58	84+48	74+47	73+37	63+36	62+26	52+25	51+15	41+14	40+04	30+03		
				94+49	93+39	83+38	82+28	72+27	71+17	61+16	60+06	50+05				
						92+29	91+19	81+18	80+08	70+07						
								90+09								

Die Gesetzmäßigkeit kann ähnlich zur Subtraktion mit dem Hunderterfeld oder der Stellentafel nachgewiesen werden.

b) Veränderung der Stellenzahl:

Dreistellige Umkehrzahlen sind Paare solcher Zahlen, bei denen die Hunderter- und die Einerstelle vertauscht werden (645 \Leftrightarrow 546). Es wird die kleinere von der größeren Zahl subtrahiert. Dies liefert insgesamt neun unterschiedliche Ergebniszahlen, die alle ein Vielfaches von 99 sind. Welches Vielfache von 99 die Ergebniszahl bildet, ist abhängig von der Differenz der Stellenwerte an der Einer- und Hunderterstelle.

Beispiel:

$$745 - 547 = 198$$

$$7 - 5 = 2$$

$$2 \cdot 99 = \mathbf{198}$$

Immer 1089:

Bildet man zur Ergebniszahl die Umkehrzahl und addiert diese beiden Zahlen, so erhält man 1089.

Der Nachweis kann analog zu zweistelligen Umkehrzahlen über die Stellentafel oder „Stellenwerte extra“ erbracht werden.

c) Veränderung des Zahlenmusters:

Das Zahlenmuster kann durch die Vorgabe: „Es werden 2 unterschiedliche Ziffern zur Bildung einer dreistelligen Zahl benutzt“, verändert werden. Dabei können die Zahlen aus z.B. 4 und 5 wie folgt gebildet werden: 454 oder 545 (IRI- oder AHA-Zahlen): Mit diesen Zahlen können ähnliche Überlegungen zur Subtraktion angestellt werden wie bei den Umkehrzahlen:

Es gibt insgesamt 45 Aufgaben. Die Differenzen sind Vielfache von 91. Welches Vielfach von 91 die Ergebniszahl bildet, ist abhängig von der Differenz der Stellenwerte.

Weiterführend können diese Überlegungen auch an diesem Muster 445 oder 554 (AAL – Zahlen) angewandt werden.

Kombiniert zwei zweistellige Umkehrzahlen entsteht zwei vierstellige Zahlen mit folgendem Muster: 6336 und 3663. Hierbei handelt es sich um „Palindrome“ (Spiegelzahlen), die wieder voneinander subtrahiert werden und weitere Entdeckungen ermöglichen.

d) Erweiterung des Aufgabenformats:

Eine verwandte Übung zu den „Umkehrzahlen“ stellen die sog. „Minus-Türme“ oder „Minus-Züge“ dar.

Minustürme werden nach folgendem Prinzip gebildet: Aus drei unterschiedlichen Ziffern wird eine dreistellige Zahl gebildet, bei der die Ziffern der Größe nach geordnet werden. Die Umkehrzahl wird gebildet und subtrahiert. Dieses Vorgehen wird so oft wiederholt bis die Rechnungen beim Ergebnis 495 enden. Es entstehen „Türme“ mit unterschiedlicher Anzahl von „Stockwerken“; der höchste Turm hat 5 Stockwerke.

Literatur:

Wittmann/Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1, 2. Auflage, Stuttgart, Düsseldorf, 1993

Wittmann/Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 2, 1. Auflage, Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig, 1992

Wittmann/Müller: Das Zahlenbuch 2, Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf 2008

Wittmann/Müller: Das Zahlenbuch 3, Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf 2009

Wittmann/Müller: Das Zahlenbuch 4, Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf 2009

Schütte, Sybille: Die Matheprofis 2, München, Düsseldorf, Stuttgart 2004

Schütte, Sybille: Die Matheprofis 3, München, Düsseldorf, Stuttgart 2005

Schütte, Sybille: Die Matheprofis 4, München, Düsseldorf, Stuttgart 2006

Aufgabenvariation: Zweistellige Umkehrzahlen

		Anzahl der Aufgaben	Anzahl der Ergebnisse	Auffälligkeiten bei den Ergebnissen			Wenn-dann-Beziehung	Plättchenbeweis
				Vielfaches	Quersumme	Muster		
Veränderung der Rechenvorschrift	Addition	45	17	Vielfache von 11 ≤ 187	18,16,...,4 ,2	Vom größten Ergebnis ausgehend vermindern sich Zehner – und Einerstelle jeweils um 1	Wenn die Summe der Stellenwerte a beträgt, ist die Summe der Umkehrzahlen $a \cdot 11$	x
Veränderung der Stellenanzahl	3 Stellen	360	9	Vielfache von 99 ≤ 891	18 $E + H = 9$	Die mittlere Ziffer der Ergebniszahl ist 9. Einer- und Hunderterstelle als Zahl gelesen, ergeben ein Vielfaches von 9. Dieses Vielfache von 99 ergibt die Differenz der dreistelligen Umkehrzahlen.	Wenn die Differenz zwischen der Einer- und der Hunderterstelle $1 \geq a \leq 9$ beträgt, ist die Differenz der Umkehrzahlen $a \cdot 99$.	x
Veränderung des Zahlenmusters	IRI - Zahlen	45	9	Vielfache von 91 ≤ 819	10, 11,..., 17	Die Hunderter- und Zehnerstelle (bei 91 die Zehnerstelle) ergeben als Zahl gelesen ein Vielfaches von 9. Die Einerstelle liefert jeweils den Faktor, mit dem man 9 multiplizieren muss, um dieses Vielfache zu erhalten. Die Hunderter- und die Einerstelle werden jeweils um 1 größer, die Zehnerstelle um 1 kleiner.	Wenn die Differenz zwischen den Stellenwerten $1 \geq a \leq 9$ beträgt, ist die Differenz der IRI-Zahlen $a \cdot 91$	x
	AAL-Zahlen	45	9	Vielfache von 99 ≤ 891	18 $E + H = 9$	Die mittlere Ziffer der Ergebniszahl ist 9. Einer- und Hunderterstelle als Zahl gelesen, ergeben ein Vielfaches von 9. Dieses Vielfache von 99 ergibt die Differenz der AAL-Zahlen.	Wenn die Differenz zwischen den Stellenwerten $1 \geq a \leq 9$ beträgt, ist die Differenz der AAL-Zahlen $a \cdot 99$	x

	ANNA-Zahlen	45	9	Vielfache von 891 ≤ 8019	18 $T + Z = 9$ $H + E = 9$	Vom kleinsten Ergebnis ausgehend werden Tausender- und Einerstelle immer um 1 größer und Hunderter- und Zehnerstelle immer um 1 kleiner. Tausender- und Zehnerstelle sowie Hunderter- und Einerstelle als Zahl gelesen stellen jeweils Vielfache von 9 dar.	Wenn die Differenz zwischen den Stellenwerten $1 \geq a \leq 9$ beträgt, ist die Differenz der ANNA-Zahlen $a \cdot 891$	x
	NANA-Zahlen	45	9	Vielfache von 909 ≤ 8181	18 $E + Z = 9$ $H + T = 9$	Die Differenzen sind wieder NANA-Zahlen. Vom größten Ergebnis ausgehend wachsen die Hunderter- und Einerstelle um 1, die Tausender – und Zehnerstelle werden jeweils um 1 kleiner.	Wenn die Differenz zwischen den Stellenwerten $1 \geq a \leq 9$ beträgt, ist die Differenz der NANA-Zahlen $a \cdot 909$	x
Erweiterung des Aufgabenformats	Minustürme (3-stellig)	120	8	Vielfache von 99 Vielfache von 99 $198 \leq 891$	18 $E + H = 9$	Die mittlere Ziffer der Ergebniszahl ist 9. Die Einer nehmen jeweils ab Schritt 2 um 1 zu bis sie 5 erreichen. Jede Zahl führt spätestens nach 5 Schritten zu 495. Die Anzahl der Schritte ist Abhängig von der Differenz zwischen der größten und kleinsten Ziffer.	Wenn die Differenz zwischen der größten und kleinsten Ziffer $2 \geq a \leq 8$, ist die Differenz der Zahlen $a \cdot 99$	x