



Zauberquadrate entdecken

*„Von Mathematik kann man natürlich erst auf den höheren Stufen sprechen.
In der Grundschule wird ja nur gerechnet“*

(Moderator der Sendung „Kulturzeit“ im 3sat, aus: Walther et al. 2009, S. 44)

*„Kreativität an unseren Schulen? – Meine Behauptung ist,
dass wir Kreativität überhaupt nicht trainieren“*

(Gerhard Binning, Nobelpreis in Physik 1986, aus Walther et al. 2009, S. 45)

Diese oder ähnliche Vorstellungen über das Mathematiklernen in der Grundschule sind in unserer Gesellschaft noch häufig anzutreffen. Glaubt man diesen Vorurteilen, haben Mathematik und Kreativität wenig miteinander zu tun; stets gibt es nur **den einen Lösungsweg** und **nur das richtige Ergebnis**. Kindern werden demnach nur mathematische Rechenoperationen eingetrichtert, die sie dann **ohne Einsicht** ausführen sollen.

Aber: Das Wesen von Mathematik und der Alltag im Mathematikunterricht von Grundschulen sehen heute ganz anders aus, was ein Blick in den Lehrplan Mathematik 2008 und in die Bildungsstandards Mathematik für die Grundschule im Folgenden zeigen soll. Die daraus resultierenden Konsequenzen für den Mathematikunterricht in der Grundschule werden anschließend näher erläutert. Im dritten Abschnitt werden konkret am Beispiel „Zauberquadrate“ Chancen und Möglichkeiten benannt, die sich für die Schülerinnen und Schüler in einem aktiv-entdeckenden Unterricht ergeben.

1. Das Wesen von Mathematik

Mathematik ist keine Wissenschaft der Geheimnisse und des verständnislosen Rechnens, sondern **„die Wissenschaft von den Mustern“** (Develin 1998, S. 3f.). Das wird vor allem im Lernprozess deutlich. Mathematisches Wissen wird mit Hilfe verlässlicher Muster vernetzt, so dass leichter gelernt und die gewonnenen Fähigkeiten gezielter angewendet werden können.

Daher ist es wichtig, dass die Lehrpersonen ihren Schülerinnen und Schülern schon in der Grundschule **Aufgaben** anbieten, die **zum Entdecken und Erforschen von Mustern und mathematischen Zusammenhängen** anregen, da durch diese eine Stärkung des Verständnisses erlangt werden kann.

Diese Umsetzung hat sowohl im Lehrplan und in den Bildungsstandards und Lehrbüchern als auch im Unterrichtsalltag der Grundschulen schon erfolgreich begonnen. So tauchen die Begriffe **„Muster und Strukturen“** im Bereich der inhaltsbezogenen Kompetenzen in den Bildungsstandards unter anderem mit den folgenden Formulierungen auf:



Muster und Strukturen

Übergeordnete Kompetenzerwartungen	Untergeordnete Kompetenzerwartungen
<input type="checkbox"/> Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen	<input type="checkbox"/> die Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern erkennen, beschreiben und fortsetzen <input type="checkbox"/> arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben

Abb. 1: Kompetenzerwartungen am Ende der vierten Klasse im Bereich "Muster und Strukturen", modifiziert nach Vorlage (aus: Walther et al. 2009, S. 42)

Aufgrund der Tatsache, dass die oben aufgeführten Kompetenzen unter dem Begriff „Muster und Strukturen“ dem wahren Wesen der Mathematik entsprechen, sollten diese auch intensiv im Mathematikunterricht der Grundschule thematisiert werden.

2. Welche Konsequenzen hat das nun für den Mathematikunterricht?

Um dem Wesen der Mathematik gerecht zu werden und auf dessen Grundlage erfolgreich zu lernen, fordert der Lehrplan der Grundschule NRW „**Lernen als einen konstruktiven und entdeckenden Prozess**“ (vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung 2003, S. 72). Das bedeutet zum einen, dass die Kinder im Umgang mit mathematisch **gehaltvollen Aufgaben** auch aktiv und selbstständig tätig werden. Zum anderen soll die Lehrperson solche **Aufgaben** für den Mathematikunterricht auswählen, **die in einem Sinnzusammenhang stehen**, die Kinder geistig **herausfordern**, sowie die **Kommunikation** unter den Schülerinnen und Schülern über mathematische Sachverhalte **fördern**. Demnach fordert der Lehrplan **Aufgaben, an denen die Kinder** bei der Bearbeitung **aktiv-entdeckend tätig werden** können.

3. Das aktiv-entdeckende Lernen am Beispiel von Zauberquadraten

Das Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens soll nun am Aufgabenformat „**Zauberquadrate**“ konkret beschrieben und erläutert werden. Gleichzeitig werden mögliche Anregungen für den Einsatz im Unterricht gegeben.

Bei dem Aufgabenformat „Zauberquadrate“ handelt es sich um eine **produktive Übungsform**, die sich durch folgende Merkmale auszeichnet:

- Sie kann **über mehrere Jahrgangsstufen** eingesetzt werden
- Unterschiedlich Schwierigkeitsniveaus ermöglichen eine **natürliche Differenzierung**
- Inhaltsbezogene und prozessbezogene Kompetenzen** sind **untrennbar miteinander verbunden**:
 - Kinder werden zum **Beobachten, Fragen** und **Vermuten** herausgefordert



- Kinder entdecken und sprechen über **Muster, Gesetzmäßigkeiten** und **Zahlbeziehungen**
- Kinder können die **Auswirkungen eigener operativer Veränderungen beobachten**

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Abb. 2: Ausgefülltes Zauberquadrat

Das Zauberquadrat besteht aus einem 3x3-Gitter, welches sich aus jeweils drei Spalten und Zeilen zusammensetzt. Das Besondere an diesem Aufgabentyp besteht zum einen darin, dass jeweils immer drei Zahlen **waagrecht, senkrecht und diagonal** addiert die **gleiche Summe** aufweisen. Diese Summe nennt man „Zauberzahl“. Bei dem abgebildeten Zauberquadrat (vgl. Abb.2) ist diese Zahl die „15“. Zum anderen ist die **„Zauberzahl“ immer genau das Dreifache der Zahl**, die **in der Mitte** des Quadrates steht (s. Abb. 2: Mittelzahl „5“, Zauberzahl (3x5=) „15“).

Das Aufgabenformat Zauberquadrate ermöglicht im Mathematikunterricht der Grundschule eine natürliche Differenzierung. Der **Zahlenraum ist beliebig erweiterbar** (vgl. Abb. 4), so dass die Kinder auf ihren **individuellen Lernniveaus** an diesem Aufgabentyp **entdecken, berechnen, beschreiben** und **begründen** können. Im selbstständigen Umgang mit den Zauberquadrate können die Kinder – während sie ihre Rechenfertigkeiten im Bereich der Addition, Subtraktion und Multiplikation trainieren - die **Beziehung zwischen der Zauber- und der Mittelzahl untersuchen** und ihre Entdeckun-

6		2
	5	
	3	4

gen bzw. Muster der Zahlbeziehungen beschreiben und schriftlich festhalten.

Durch den **Rückgriff auf die gefundenen Gesetzmäßigkeiten** lassen sich dann unvollständig ausgefüllte Zauberquadrate (vgl. Abb. 3) ergänzen.

Abb. 3: unvollständig ausgefülltes Zauberquadrat

Des Weiteren lassen sich die Zauberquadrate sowohl additiv (vgl. Abb. 4), als auch multiplikativ (vgl. Abb. 5) verändern, sodass die Kinder die **Auswirkungen der ausgeführten Rechenoperation entdecken** können. Diese **Entdeckungen über die Struktur des Quadrates und Beziehungen der Zahlen zueinander** können dann in einem gemeinsamen Klassengespräch gesammelt werden.

6	7	2	+ 2	8	9	4
1	5	9		3	7	11
8	3	4		10	5	6

Abb. 4: Additive Veränderung

6	7	2	x 2	12	14	4
1	5	9		2	10	18
8	3	4		16	6	8

Abb. 5: Multiplikative Veränderung



Zauberquadrate bieten auch die Möglichkeit, dass Grundschul Kinder ihre **Lösungswege** und **Strategien** beim Vervollständigen der Gitter **darstellen** und **vergleichen** können. Dadurch erhalten nicht nur die Kinder Einblicke in die Denkweisen ihrer Mitschüler, sondern auch die Lehrperson erlangt wichtige Informationen über die gezeigten inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen ihrer Schülerinnen und Schüler.

Eine weiterführende Aufgabenstellung, die die Grundschul Kinder dazu auffordert ihre bereits entdeckten Gesetzmäßigkeiten anzuwenden, ist das **Erfinden eigener Zauberquadrate**. Auch bei dieser Aufgabe erhalten die Kinder die Gelegenheit auf ihren eigenen Niveaus zu arbeiten. So werden manche Grundschul Kinder z.B. erkennen, dass sie die äußeren Zahlen nur drehen müssen, um ein verändertes Quadrat zu erhalten. Andere Kinder wagen sich vielleicht in höhere Zahlenräume und erfinden ganz neue Zauberquadrate. Die Lehrperson nimmt in diesem Unterricht eine begleitende Rolle ein. Es ist hilfreich, wenn Sie ihre Schülerinnen und Schülern durch gezielte Impulse und Erklärungen unterstützt, da sich so eine Kultur des Entdeckens und Forschens im Mathematikunterricht nach und nach entwickeln kann. Um wirklich allen Kindern Entdeckungen zu ermöglichen, können folgende Fragen als **mögliche Denkanstöße** dienen:

- Was fällt dir auf?
- Ist das immer so?
- Warum ist das so?
- Was fällt dir auf, wenn du die Zeilen, Spalten und Diagonalen betrachtest?
- Welche Regeln kannst du formulieren?
- Ein anderes Kind hatte die Idee die Mittelzahl und die Zauberzahl zu vergleichen. Was meinst du dazu?
- Erfinde weitere Zauberquadrate!

Verständnis und Begeisterung für die Mathematik können sich bei Grundschulkindern nur dann entwickeln, wenn die Kinder selbstständig die Mathematik als die Wissenschaft von Mustern entdecken. Sinnvoll sind daher Aufgabenformate, wie das der Zauberquadrate, die genug Potential haben, um die Kinder entsprechend ihrem individuellen Lernniveau herauszufordern, zu Entdeckungen anzuregen, sowie inhalts- als auch prozessbezogene Kompetenzen wie das Beschreiben, Kommunizieren, Problemlösen und Begründen zu fördern.

*„Einem Kind ein Geheimnis zu verraten, das es selber entdecken kann,
ist schlechte Didaktik, es ist ein Verbrechen“
(Freudenthal 1973, S. 389)*



Literaturverzeichnis



1. Develin, K. (1998): *Muster der Mathematik: Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur*. Heidelberg: Oetinger.
2. Freudenthal, H. (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Bd.1, Stuttgart: Klett.
3. Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (2003, Hg.): *Richtlinien und Lehrpläne zur Erprobung für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen*. Frechen.
4. Schütte, S. (2009): Über die Kunst gemeinsam weiterzudenken. In: *Die Grundschulzeitschrift*. H. 222.223, S.60-63.
5. Ulm, V. (2008, Hg.): *Gute Aufgaben Mathematik*, Berlin: Cornelsen Scriptor.
6. Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2009): Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther et al (Hg.): *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*, Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 42-65.
7. Wittmann, E. Ch. & Möller, G. N. (1990): *Handbuch produktiver Rechenübungen*, Bd. 1. Stuttgart: Klett.

Weiterführende Literatur

Die folgende Literatur thematisiert weitere Aufgabenformate, die das aktiv-entdeckende Lernen fördern:

Maaß, K. (2009): *Mathematikunterricht weiterentwickeln*, Berlin: Cornelsen Scriptor.