



## Wie verdeutlicht sich das operative Prinzip im Geometrieunterricht der Grundschule?

„Operatives Denken ist in der Geometrie von räumlichem Denken kaum noch zu unterscheiden“  
Besuden (1980, S. 107)

Der folgende Text gibt Einblicke, wie Kinder in der Grundschule mit Hilfe des operativen Prinzips Geometrie lernen. Dazu werden zunächst die Grundlagen des operativen Prinzips thematisiert. Mit Hilfe von vier Beispielen soll jeweils der Kern des operativen Prinzips herausgestellt und insbesondere verdeutlicht werden, wie das operative Prinzip im Geometrieunterricht Anwendung finden kann.

### Das „operative Prinzip“

–

#### **Von der Entwicklungspsychologie über die allgemeine Didaktik in die Mathematikdidaktik**

Der Entwicklungspsychologe Jean Piaget führte systematische Untersuchungen zum Lernen durch: Mit dem operativen Prinzip beschreibt er seine Erkenntnisse über die Architektur und die Mechanismen des Lernens in Zusammenhang mit einzelnen, aufeinander aufbauenden Entwicklungsstadien im Verlaufe des menschlichen Lebens. Sein Schüler Hans Aebli löste diese Erkenntnisse aus dem direkten entwicklungspsychologischen Kontext und stellte sie in einen allgemeindidaktischen und damit auch schulischen Zusammenhang, indem er anstelle der natürlich bedingten Entwicklungsstufen beim Menschen schulisch induzierte Bedingungen beschreibt.

Darauf aufbauend betrachtet Erich Wittmann das operative Prinzip aus der Perspektive der Mathematikdidaktik. Im Spiegel der Fachdidaktik stellt er heraus, wie dieses Prinzip in mathematischen Lehr-Lernprozessen Anwendung findet und welche Bedeutung es für das Mathematik-Lernen hat.

Ein etwa 1½-jähriger Junge sitzt während einer Weihnachtsfeier auf dem Schoß seines Vaters mitten in einer großen Runde um den Tisch in einem nur durch Kerzen beleuchteten Raum. Vor ihm, außerhalb seiner Reichweite, steht eine brennende Kerze. Ein älteres Kind beugt sich von der gegenüberliegenden Seite aus nach vorne und bläst die Kerze aus. Der Junge beobachtet dies und sieht auch, wie jemand wieder die Kerze anzündet. Nun möchte er die Kerze ausmachen: Er faucht, die Kerze brennt weiter, er faucht kräftiger, wieder ohne Erfolg, er brummt, er bewegt den Oberkörper nach vorne, dann zur Seite, er schlägt mit den Händen auf den Tisch usw. Er zieht gewissermaßen alle ihm zur Verfügung stehenden Handlungsregister. Die Versuche werden über eine Viertelstunde in allen möglichen Variationen ohne Erfolg wiederholt. Dann erst verliert der Junge das Interesse.

**Abb. 1: Beispiel für das operative Prinzip in einer alltäglichen Situation (Wittmann 1985, S. 7)**



Mit der Abb. 1 wird am Beispiel einer alltäglichen Situation das operative Prinzip als ein grundsätzliches Leitprinzip des Lernens verdeutlicht, das seit jeher dem Menschen beim Lernen hilft.

Das Prinzip basiert hauptsächlich auf drei Aspekten:

- 1) Das erkennende Subjekt wirkt durch seine Handlungen auf Gegenstände ein und beobachtet die Wirkungen seiner Handlungen.
- 2) Bekannte Wirkungen werden antizipierend zur Erreichung bestimmter Ziele eingesetzt.
- 3) Wissen ist keine vorgefertigte Sache, sondern wird vom erkennenden Subjekt in Wechselwirkung mit der Realität konstruiert.

(vgl. Wittmann 1985, S. 7)

Bezieht man diese drei wichtigen Aspekte auf den Mathematikunterricht, so folgt daraus, dass Schülerinnen und Schüler mit Hilfe von Handlungen an geeigneten Materialien neue Erkenntnisse gewinnen und bestehende Vorstellungen revidieren, ausbauen oder stützen. Zur weiteren Konkretisierung formuliert Wittmann:

„Objekte erfassen bedeutet, zu erforschen, wie sie konstruiert sind und wie sie sich verhalten, wenn auf sie **Operationen** (Transformationen, Handlungen, ...) ausgeübt werden. Daher muss man im Lern- und Erkenntnisprozess in systematischer Weise:

1. untersuchen, welche Operationen ausführbar und wie sie miteinander verknüpft sind,
2. herausfinden, welche Eigenschaften und Beziehungen den Objekten durch Konstruktion aufgerägt werden,
3. beobachten, welche Wirkungen Operationen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte haben (was geschieht mit ..., wenn ...?)“ (Wittmann 1985, S. 9).

### ***Ein Beispiel zur Verdeutlichung:***

Das **NIM-Spiel** ist ein für Kindergartenkinder sowie Kinder in der Schuleingangsphase und darüber hinausgehend geeignetes Spiel, welches reichhaltige Möglichkeiten für mathematische Entdeckungen bietet. Zwei Spieler legen abwechselnd mit ihrer Farbe (z.B. Rot oder Blau) ein oder zwei Plättchen fortlaufend auf den Spielplan (Abb. 2). Gewonnen hat der Spieler, der sein Plättchen auf die Zehn legen kann.



**Abb. 2: Spielplan zum NIM-Spiel**

Spiele Kinder dieses Spiel, so lässt sich im Verlaufe mehrerer Spielrunden beobachten, dass sie zunächst vermuten, dass es kein Zufall ist, ob jemand verliert oder gewinnt. Daraufhin versuchen sie durch die Entwicklung geeigneter Strategien herauszufinden, woran dies liegt. Anhand ihrer zielgerichteter werdenden Vorgehensweisen und Strategien verdeutlicht sich dabei das operative Prinzip. Im Folgenden soll dieser Prozess mittels einer stark verkürzten Darstellung eines mögli-



chen Erkenntnisweges und -gewinns sowie der damit einhergehenden Strategieentwicklung aufgezeigt werden:

- Wenn ich einen Stein auf die 8 oder 9 lege, dann verliere ich das Spiel.
- Wenn ich also meinen Stein auf die 7 lege, dann muss mein Gegner auf die 8 oder 9 legen. Die 7 ist also ein Gewinnfeld
- Wenn ich meinen Stein auf die 5 oder 6 lege, dann legt mein Gegner auf die 7 und gewinnt. Die Felder 5 und 6 sind also Verlustfelder.
- Wenn ich also meine Überlegungen bis zum Start fortsetze, dann sehe ich, dass ich anfangen muss, um gewinnen zu können.

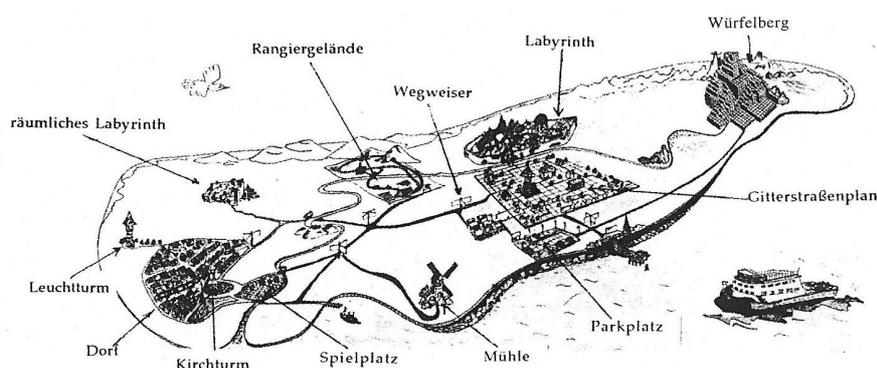
In der konkret-handelnden Auseinandersetzung können Kinder im Wechselspiel zwischen Objekt und Operation die jeweilige Wirkweise der Operation auf das Objekt erproben. In diesem „Wenn – Dann – Wirkungsgefüge“ gewinnen sie Erkenntnisse, die sie durch erneutes Ausprobieren überprüfen, überarbeiten oder verwerfen, um sie zur (Weiter-)Entwicklung einer geeigneten Gewinnstrategie zu nutzen. Probieren Sie doch selber einmal eine geeignete Gewinnstrategie für ein modifiziertes NIM-Spiel mit 15 Feldern und den Bedingungen wie oben bzw. mit 60 Feldern und der veränderten Bedingung, dass pro Spielzug bis zu 3 Plättchen gelegt werden dürfen, zu entwickeln. Und: Beobachten Sie sich bei Ihren Vorgehensweisen und ihrer Gewinnstrategie-Entwicklung und notieren Sie diese.

### **Das operative Prinzip im Geometrieunterricht der Grundschule**

Im Folgenden wird für jede Jahrgangsstufe der Grundschule ein Beispiel für die Anwendung des operativen Prinzips im Geometrieunterricht dargestellt.

#### **1. Klasse: „Orientierungsübungen auf der Insel Waterland“**

Anfang der 70er Jahre wurde in den Niederlanden im Rahmen des Wiskobas-Projektes ein neues Mathematikcurriculum für die Grundschule erstellt, in dem die Grundschulgeometrie einen deutlich höheren Stellenwert bekommen sollte. Innerhalb dieser Überlegungen wurde ein sechswöchiges Projekt für den Mathematikunterricht der ersten Klasse entworfen. Dieses Projekt thematisiert eine fiktive Insel namens Waterland (Abb. 3), auf der es viel zu entdecken gibt und die Raum für vielfältige herausfordernde Aufgabenstellungen lässt.



Alleine die Beschreibung der Insel und insbesondere Suchaufträge der Form „Was befindet sich links vom Spielplatz und rechts vom Leuchtturm?“ bieten bereits Anlässe für operative Vorgehensweisen und

**Abb. 3: Karte von „Waterland“ (de Moor/van den Brink 1997, S. 14)**

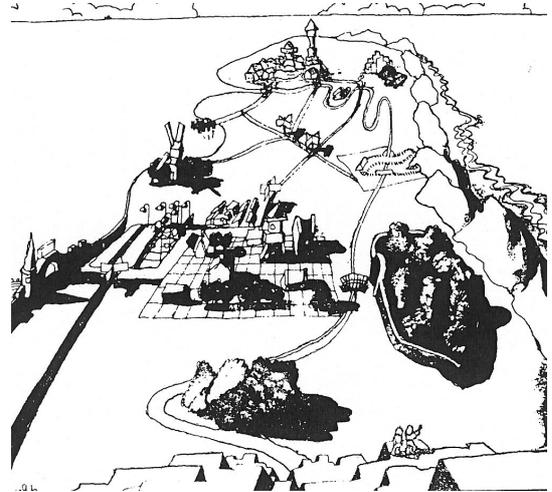


fordern und fördern Begrifflichkeiten der Raum-Lage-Relationen, die zugleich für die Orientierung auf dem Zahlenstrahl und für die alltägliche Orientierung in der Lebenswelt von grundlegender Bedeutung sind.

Aber auch die folgende Aufgabenstellung motiviert zu operativen Vorgehensweisen: In der Abb. 4 sollten Kinder erkennen, wo der Fotograf auf der Karte von Abb. 3 stand, als er das Foto gemacht hat.

Die Kinder überlegen nun mit Hilfe der Karte, *was passiert, wenn man sich gedanklich auf der Karte bewegt*. So wäre eine mögliche Überlegung:

„Wenn ich auf dem Parkplatz stehe, *dann* ist das Labyrinth auf meinem Foto *zwischen* Leuchtturm und Würfelberg. Außerdem befindet sich von diesem Standpunkt aus betrachtet das Labyrinth immer *rechts* vom Leuchtturm. Auf dem Foto ist es aber *vor* dem Leuch-



**Abb. 4: Perspektivwechsel auf der Insel Waterland (de Moor 1997, S. 16)**

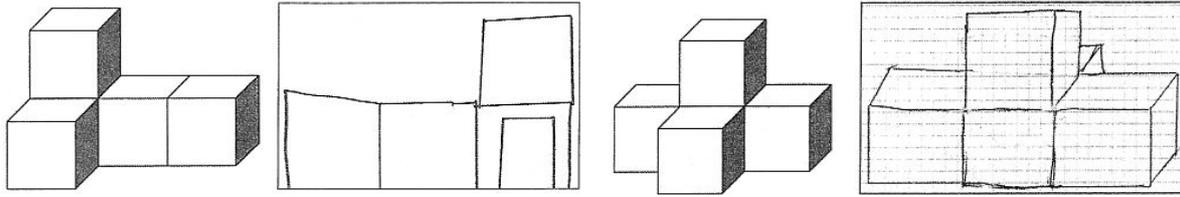
tturm und der Würfelberg ist nur in Teilen zu sehen. *Wenn* ich mich nach *links* Richtung Leuchtturm bewege, *dann* bleibt das Labyrinth auch dabei zunächst *rechts* vom Leuchtturm und *wenn* ich am Leuchtturm angekommen bin, *dann* befindet sich das Labyrinth *hinter* dem Leuchtturm. Also bewege ich mich nach *rechts* Richtung Würfelberg. Vom Würfelberg aus habe ich nun einen Blick wie der Fotograf ihn hatte.“

Diese fiktiven Überlegungen zeigen, dass sich Kinder im Kopf entlang einzelner Orte über die Insel (Objekt(e)) bewegen (Operation) um sich sodann die Veränderungen bzgl. der Perspektive (Wirkung) zu überlegen. In diesem Wechselspiel zwischen Objekt, Operation und der jeweiligen Wirkweise der Operation auf das Objekt verdeutlicht sich das operative Vorgehen:

So erproben Kinder in diesem „Wenn – Dann – Wirkungsgefüge“ erste Vermutungen und gewinnen dadurch neue Erkenntnisse, die sie in Form weiterentwickelter Vermutungen durch erneutes Ausprobieren überprüfen, überarbeiten oder verwerfen, um sie wiederum zur (Weiter-)Entwicklung einer zielführenden Vermutung zu nutzen, um den Standpunkt des Fotografen zu finden.

## **2. Klasse: „Wie sieht’s in der Zeichnung aus?“ – Würfelgebäude bauen, zeichnen, umbauen und die Wirkungen des Umbauens auf die Zeichnung übertragen.“**

Ein Beispiel für den Geometrieunterricht der zweiten Klasse stellen Aktivitäten zu der Lernumgebung Würfelgebäude dar. Abb. 5 zeigt Schülerdokumente zu einer daraus ausgewählten Aufgabenstellung, bei der Kinder in Zweiergruppen Würfelgebäude so zeichnen sollten, dass sie eindeutig nachkonstruiert werden können.



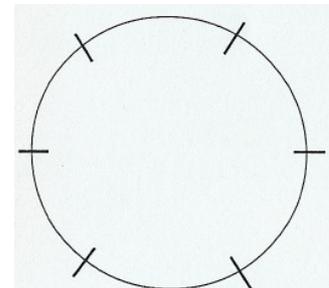
**Abb. 5: Zeichnungen von Zweitklässlern zu Würfelgebäuden  
(aus: Rodemer 2008, S. 9)**

In einer folgenden Arbeitsphase sollte dann in größeren Teams die beste Lösung besprochen und gegebenenfalls überarbeitet werden. Auf der Grundlage dieser Zeichnungen wurden die Würfelgebäude nun mit Hilfe von Holzwürfeln nachgebaut und durch 90° Drehungen oder deren Vielfache, aber auch durch Umbauen einzelner Würfel verändert. Aufgabe der Kinder war nun, die Veränderungen des Bauwerks auf die jeweilige Zeichnung zu übertragen: Dabei mussten sie überlegen und mit Hilfe operativer Vorgehensweisen erproben, wie es sich auf die Zeichnung auswirkt (Wirkung), wenn man das Würfelgebäude (Objekt) dreht (Operation) oder einzelne Würfel umsetzt (Operation).

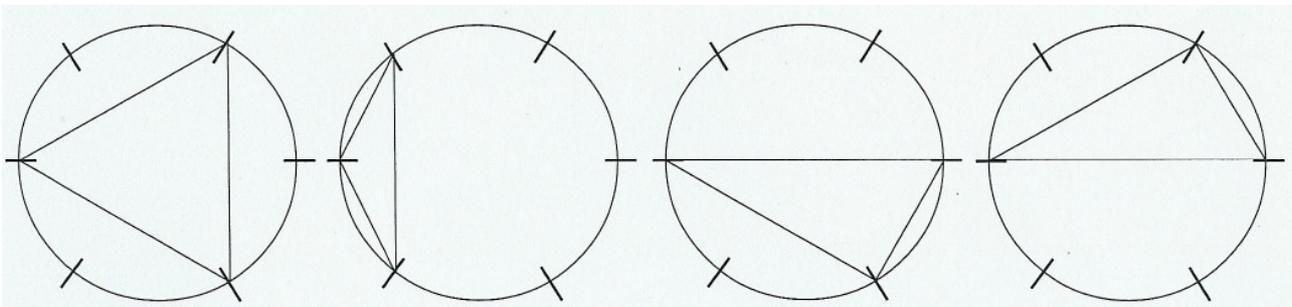
### **3. Klasse: „Dreiecke im Kreis – Wie viele verschiedene Dreiecke kannst du in einem in sechs gleiche Teile geteilten Kreis finden?“**

Eine Unterrichtsidee für die dritte Klasse stammt von Pohle und Reiss (1999), die das operative Prinzip nutzen, um geometrische Abbildungen zu veranschaulichen und entdecken zu lassen.

Dafür sollten die Schülerinnen und Schüler mit Dreiecken in einem Kreis operieren, der mit Hilfe des Radius in sechs gleiche Teile geteilt wurde (Abb. 6). Die Aufgabe für die Kinder bestand nun darin, alle unterschiedlichen Dreiecke zu finden, die man in diesem Kreis abstecken kann. Da dies als mentale Übung für die meisten Lernenden zu schwer war, sollten die Kinder es zeichnerisch lösen. Dazu bekamen sie mehrere der markierten Kreise zur Hand. Nach Einzeichnen der Dreiecke wurden diese ausgeschnitten und konnten dadurch direkt miteinander verglichen werden.



**Abb. 6: sechsgeteilter Kreis (aus: Pohle/Reiss 1999, S. 32)**



**Abb. 7: Alle vier unterschiedlichen Dreiecke (aus: Pohle/Reiss 1999, S. 32)**



Die vier grundsätzlich verschiedenen Dreiecke (Abb. 7) wurden von den Lernenden durch operativen Vorgehensweisen entdeckt:

Der eingeteilte Kreis mit dem eingezeichnetem Dreieck bildet das jeweilige Objekt, welches man drehen (Operation) und damit überprüfen kann, ob und welche identischen Dreiecke erzeugt werden können.

#### 4. Klasse

Ein Unterrichtsbeispiel für das vierte Schuljahr beschreibt Ding (2008) zum Thema „Maßstab“: Die Kinder zeichnen ein beliebiges Bild auf eine Folie und projizieren dieses mit Hilfe des Overheadprojektors an die Wand. Das dort entstandene Bild übertragen sie nun auf ein größeres Stück Papier. Anschließend sollen sie den Maßstab der Vergrößerung ermitteln.

Um dabei weitestgehend eigenständig arbeiten zu können, sind insbesondere Vorkenntnisse bzgl. des Maßstabs notwendig. Mit Blick auf die Aufgabenanalyse verdeutlicht sich an den Herangehensweisen der Kinder erneut das operative Prinzip. Die Kinder müssen sich überlegen, welche Eigenschaften der Projektor (Objekt) hat, *was* mit dem Maßstab *passiert* (Wirkung), *wenn* man die Entfernung zur Wand ändert oder *was passiert, wenn* man sein Ausgangsbild verändert (Operation) (Idee aus: Ding 2008, S. 11).

#### **Fazit**

Wie in den Beispielen deutlich wurde, zeigt sich das operative Prinzip immer im Wechselspiel zwischen Objekt, Operation und der jeweiligen Wirkweise der Operation auf das Objekt. Lernende erproben in diesem „*Wenn – Dann – Wirkungsgefüge*“ erste Vermutungen und gewinnen dadurch neue Erkenntnisse, die sie in Form weiterentwickelter Vermutungen durch erneutes Ausprobieren überprüfen, überarbeiten oder verwerfen, um sie wiederum zur (Weiter-)Entwicklung einer zielführenden Vermutung zu nutzen.

Insgesamt entwickeln sie dabei durch die Analyse ihrer konkret- oder mental-handelnden, operativen Vorgehensweisen zielgerichtete mental-handelndeoperative Vorgehensweisen. Daher ist es auch wichtig, dass Lernende für die konkret handelnde Auseinandersetzung geeignetes Material zur Verfügung haben, um ihre Überlegungen zu revidieren, auszubauen oder zu stützen und diesen Entwicklungsprozess vollziehen zu können.



## Literatur

de Moor, E. & van den Brink, J. (1997): Geometrie vom Kind und von der Umwelt aus. In *mathematik lehren*. H. 83, S. 14-17

Ding, K (2008): Vergrößerungen am Overheadprojektor untersuchen. In *Grundschulunterricht. Mathematik*, H. 55, S.11

Fricke, A. (1970b): Operative Lernprinzipien im Mathematikunterricht der Grundschule. In A. Fricke & H. Besuden (Hrsg.), *Mathematik. Elemente einer Didaktik und Methodik* (S. 79-116). Stuttgart.

Lorenz, J. H. (2005): *Lernschwache Rechner fördern*. Berlin: Cornelsen

Pohle, E. &Reiss, K. (1999): Operatives Üben im Geometrieunterricht. In: *Grundschulunterricht*, H. 10, S. 30-32

Rodemer, M. (2008): Kompetenzen von Kindern eines 2. Schuljahres beim Erstellen und Interpretieren von Bauplänen. In: *Grundschulunterricht. Mathematik*, H. 55, S. 7-10

Wittmann, Erich Ch. (1985): Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: *Mathematik lehren*, H. 11, S. 7-11