Sachinformation „Zahlenmauern“

Mathematische Hintergründe zu den einzelnen Seiten im Zahlenmauern-Übungsheft

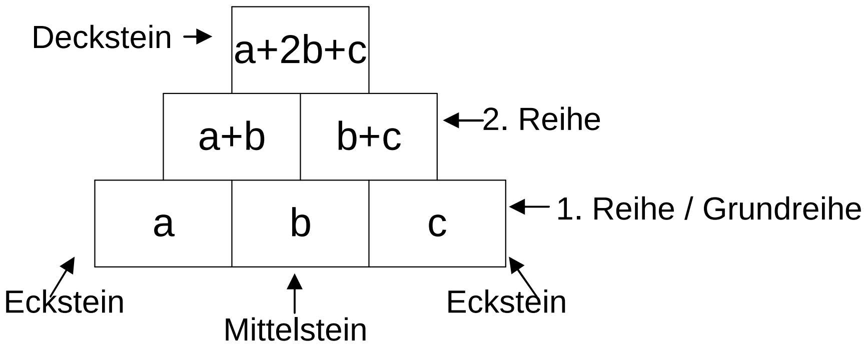
Im Folgenden werden die einzelnen Aufträge im Zahlenmauern-Übungsheft kurz inhaltlich aufgeklärt. Dabei wird auf die algebraische Darstellung zurückgegriffen, damit der Lehrer

- die fachlichen Hintergründe für sich klären kann,
- die Möglichkeit hat, selbst schnell Lösungsanzahlen zu ermitteln
- mit Hilfe der Algebra alle Beobachtungsaufträge im Zahlenmauer-Übungsheft in kurzer Zeit vollständig aufklären kann und damit auch die Lösungen der Kinder überprüfen, bzw. verlässliche Tipps zur Weiterarbeit anbieten kann.

Vgl. Krauthausen, Günter (2006): ZAHLENFORSCHER. Didaktische Handreichung S.103f.

Das algebraische Vorgehen ist jedoch nicht für die Kinder geeignet, schon gar nicht in der Schuleingangsphase. Hier steht das Probieren und erste Entdecken sowie Verbalisieren von Strukturen im Vordergrund.

Dem Format Zahlenmauer liegt folgende einfache Regel zugrunde:



In jedem Stein steht die Summe der beiden darunter liegenden Steine. Je nachdem, ob und welche Werte in einer solchen Zahlenmauer vorgegeben/gesucht sind und abhängig von der präferierten Vorgehensweise erfordert das Ausfüllen einer Zahlenmauer
Entweder

- Additionsaufgaben, Rechnen „von unten nach oben“ (vgl. ZM-Übungsheft S. 3/4, 5/6, 7/8, 9/10, 11-18)

oder

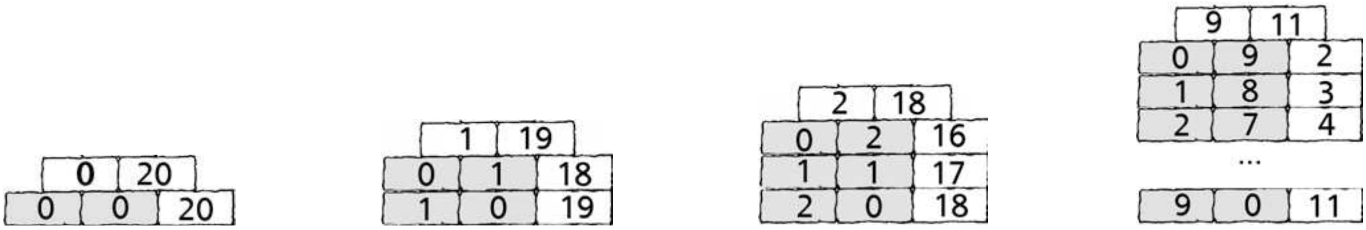
- Subtraktions- bzw. Ergänzungsaufgaben, Rechnen „von oben nach unten“ (vgl. ZM-Übungsheft S. 5/6, 7/8, 9/10).

Zu S. 9 / 10: Deckstein 20/ 100

Auch wenn es (noch) nicht darum geht, alle möglichen verschiedenen Mauern zu finden bzw. die Anzahl der möglichen Mauern zu ermitteln, ist es für die Lehrperson hilfreich, zu wissen, wie viele es tatsächlich gibt, falls Kinder wissen möchten, ob sie alle Möglichkeiten gefunden haben bzw. sie zu motivieren, weitere zu finden.

Mit dem Deckstein 20 gibt es

- 121 verschiedene 3er-Mauern, wenn die Null zugelassen wird.



(1) (2) (3) (4) … (9) (10)

Vgl. Krauthausen, Günter (2006): ZAHLENFORSCHER. Didaktische Handreichung S.105.

- 81 verschiedene 3-er Mauern, wenn die Null nicht zugelassen wird.

Mit dem Deckstein 100 gibt es

- 2601 verschiedene 3-er Mauern, wenn die Null zugelassen wird.
- 2401 verschiedene 3-er Mauern, wenn die Null nicht zugelassen wird.

„Weitere Hinweise“

Falls Kinder weiterarbeiten und die Anzahl verschiedener 3er-Mauern mit beliebigem Deckstein ermitteln wollen, bietet es sich für die Lehrperson an, dies schnell mittels einer Formel ausrechnen zu können, um den Kindern entsprechend weiterhelfen zu können.

Die Anzahl der möglichen verschiedenen Mauern wird mit folgender Formel berechnet, mit der sich die Anzahl der 3er-Mauern mit dem Deckstein n berechnen lässt:

Für gerades n: $\frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+2}{2}$

Für ungerades n: $\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+3}{2}$

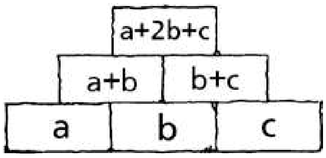
Falls die Zahl Null als Stein ausgeschlossen wird, ergibt sich die Anzahl der Mauern mit Deckstein n, indem man in die obigen Formeln statt n die Zahl n-4 einsetzt.

Vgl. Wittmann, Erich Ch. / Müller, Gerhard N. (2004): Zahlenbuch 1. Lehrerband S.195.

Um zu berechnen, wie sich die Anzahl der Mauern bei beliebig großen Mauern verhält, siehe Ausführungen bei Krauthausen S. 106.

Zu S. 11-14: Ecksteine erhöhen
Zu S. 15 / 16: Mittelstein erhöhen

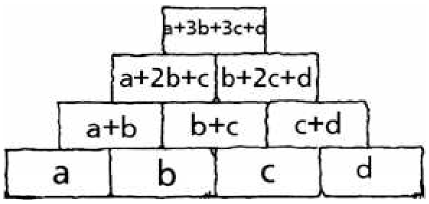
Bei diesen beiden Übungen steht das wiederholte Vergrößern um einen bestimmten Wert im Vordergrund, um die daraus resultierende Wirkung zu beobachten und zu beschreiben („Wenn, dann-Zusammenhänge“) und wenn möglich auch zu begründen („Weil-Sätze“).



3er- Mauer

- **Wenn** in einer 3er-Mauer **ein Eckstein der Grundreihe** um 1 (generell n) vergrößert bzw. verkleinert wird, **dann** wird auch der Deckstein um 1 (bzw. n) größer bzw. kleiner, **weil** die Positionen a und c jeweils einfach in den Deckstein eingehen.
- **Wenn** in einer 3er-Mauer **der Mittelstein der Grundreihe** um 1 (generell n) vergrößert bzw. verkleinert wird, **dann** wird der Deckstein um 2 (bzw. 2n) größer bzw. kleiner, **weil** die Position b doppelt in den Deckstein eingeht.

„Weitere Hinweise“
Falls Kinder zusätzlich eigene, größere Mauern (z.B. 4er Mauern) erfinden wollen, gilt Folgendes:



4er-Mauer

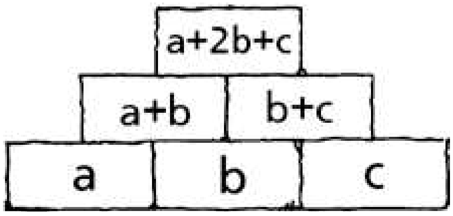
- **Wenn** in einer 4er-Mauer ein **Eckstein der Grundreihe** um 1 (generell n) vergrößert bzw. verkleinert wird, **dann** wird auch der Deckstein um 1 (bzw. n) größer bzw. kleiner, **weil** die Positionen a und c jeweils einfach in den Deckstein eingehen.
- **Wenn** in einer 4er-Mauer **einer der beiden mittleren Steine der Grundreihe** um 1 (generell n) vergrößert bzw. verkleinert wird, **dann** wird auch der Deckstein um 3 (bzw. 3n) größer bzw. kleiner, **weil** die Positionen b und c jeweils dreifach in den Deckstein eingehen.

Es gilt also allgemein: Für jede Mauergröße lässt sich an der algebraischen Form des Decksteins ablesen und begründen, welche Effekte die Veränderung in der Grundreihe nach sich ziehen.

Vgl. Krauthausen, Günter (2006): ZAHLENFORSCHER. Didaktische Handreichung S.109f.

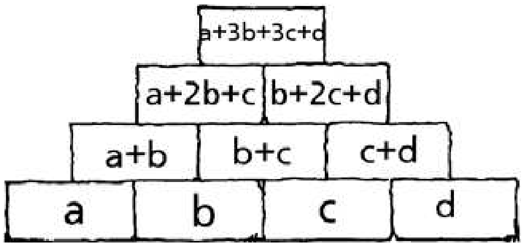
Zu S. 17 / 18: Grundsteine vertauschen

Kennen die Kinder die Rechenregel und wenden diese korrekt an, so führt dies immer zu dem Deckstein mit der allgemeinen Form a+2b+c (s.o.). Die reine Berechnung stellt an dieser Stelle in der Regel die geringste Schwierigkeit für die Kinder da. Jetzt geht es darum, diesem algebraischen Term zu deuten und wichtige Informationen daraus für die Beobachtungsaufgabe zu entnehmen.



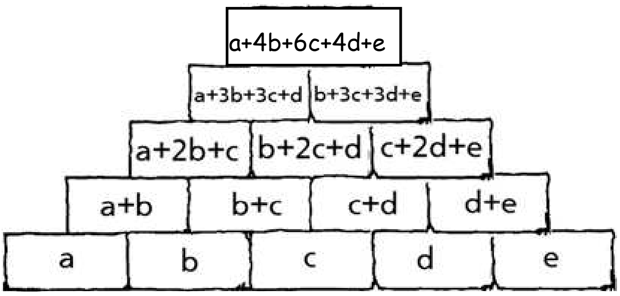
• **Wenn** in einer 3-er Mauer der größtmögliche Deckstein erreicht werden soll, **dann** muss die größte Zahl der Grundreihe auf den Mittelstein b platziert werden, **weil** dieser Wert doppelt in den Deckstein eingeht.
• **Wenn** in einer 3er-Mauer der kleinstmögliche Deckstein erreicht werden soll, **dann** muss die kleinste der Zahl der Grundreihe auf den Mittelstein b platziert werden, **weil** dieser Wert doppelt in den Deckstein eingeht.

„Weitere Hinweise"
<u>Folglich gilt für 4er- und 5er-Mauern:</u>



4er-Mauer

• **Wenn** in einer 4er-Mauer der größtmögliche Deckstein erreicht werden soll, **dann** müssen die beiden größten Zahlen der Grundreihe auf die mittleren Steine (Positionen b und c, Reihenfolge egal) platziert werden, **weil** diese Werte dreifach in den Deckstein eingehen.
• **Wenn** in einer 4er-Mauer der kleinstmögliche Deckstein erreicht werden soll, **dann** müssen die beiden kleinsten Zahlen Grundreihe auf die mittleren Steine (Positionen b und c, Reihenfolge egal) platziert werden, **weil** diese Werte dreifach in den Deckstein eingehen.



5er-Mauer

• **Wenn** in einer 5er-Mauer der größtmögliche Deckstein erreicht werden soll, **dann** muss die größte Zahl der Grundreihe auf den Mittelstein c platziert werden (geht 8-fach in den Deckstein ein), die beiden nächstgrößten Zahlen müssen auf die Positionen b und d (gehen 4-fach in den Deckstein ein), und die beiden kleinsten Zahlen gehören auf die Außenpositionen a und e (gehen einfach in den Deckstein ein).
• **Wenn** in einer 5er-Mauer der kleinstmögliche Deckstein erreicht werden soll, **dann** muss die kleinste Zahl der Grundreihe auf den Mittelstein c platziert werden (geht 8-fach in den Deckstein ein), die beiden nächstkleinsten Zahlen müssen auf die Positionen b und d (gehen 4-fach in den Deckstein ein), und die beiden größten Zahlen gehören auf die Außenpositionen a und e (gehen einfach in den Deckstein ein).

Vgl. Krauthausen, Günter (2006): ZAHLENFORSCHER. Didaktische Handreichung S.107ff.