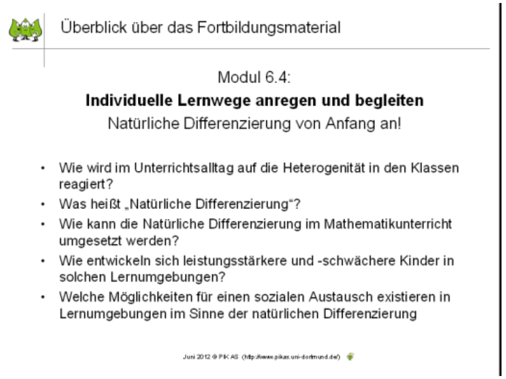
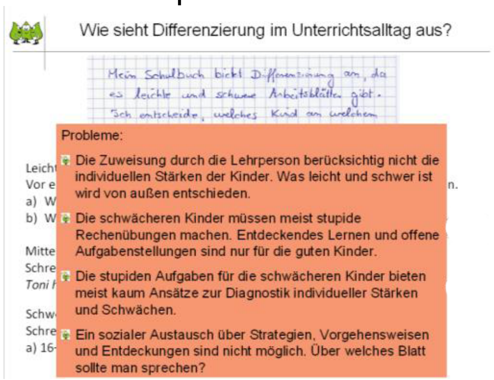
Moderationspfad

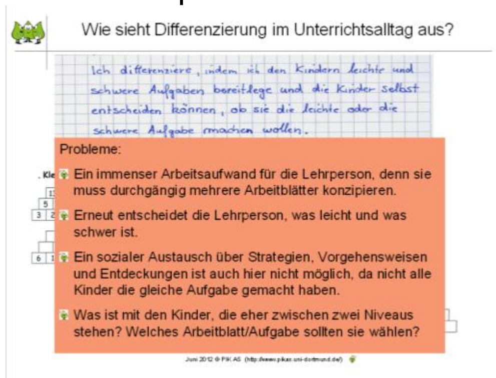
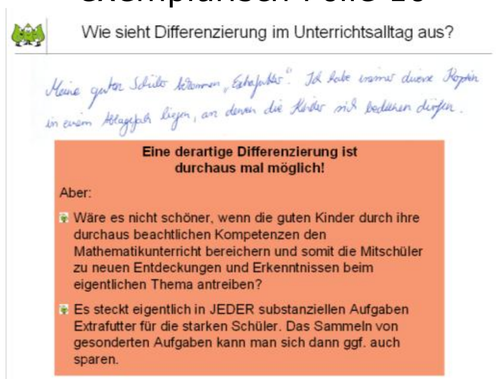
Haus 6 FM Modul 6.4: Individuelles und gemeinsames Lernen – natürliche Differenzierung

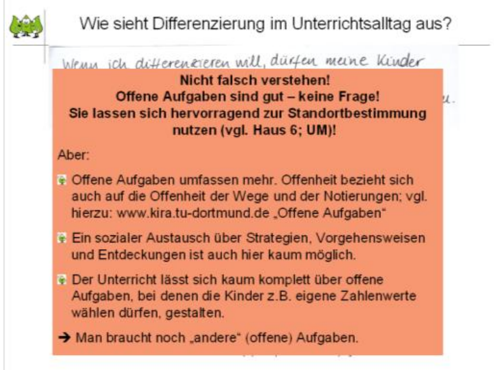
Allgemeine Informationen:
Bei dieser Präsentation handelt es sich um eine mögliche „Einstiegsveranstaltung“ zum Thema „Heterogenität“. Es werden verschiedene Konzepte zur Differenzierung im Mathematikunterricht beleuchtet und mit der natürlichen Differenzierung als eine Differenzierung vom Kind aus verglichen.
In dieser Version der Fortbildung ist eine Arbeitsphase mit eingeplant, daher sollten circa 120 Minuten für die Fortbildung eingeplant werden.
Im Anschluss bzw. für eine Folgeveranstaltung bietet sich das Modul 1.2 „Entdeckerpäckchen“ aus Haus 1, das Modul 8.2 zur Arbeit mit Forscherheften oder eine Veranstaltung aus Haus 7 zu „Guten Aufgaben“ an.
Um noch besser auf Fragen der TN vorbereitet zu sein, bietet es sich an den Informationstext „“Heterogenität gerecht werden“ in Haus 6 zu lesen.

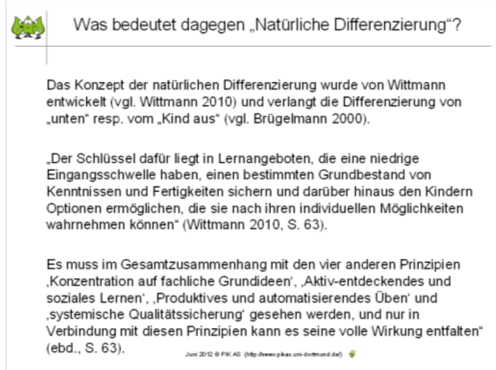
Zeit	Kommentar	**Material**
2‘	<u>**1. Folie:**</u> Begrüßung / Transparenz über Verlauf der Fortbildungsmodule und Inhalte <u>**2. Folie:**</u> **M** gibt Überblick über das Fortbildungsmodul und ihre Schwerpunkte/Inhalte. In der Fortbildung sollen zunächst verschiedene Formen der Differenzierung	Laptop / Beamer

	vorgestellt und diskutiert werden, bevor das Konzept der natürlichen Differenzierung vorgestellt und anhand von drei Lernumgebungen illustriert wird.	Folie 2 
3-4‘	**<u>3.- 5. Folie:</u>** Den Folien 3 bis 5 kommt eine einleitende Funktion für das Thema zu. Auf Folie 3 wird anhand eines Zitates aus den Bildungsstandards verdeutlich, welche Anforderungen an den Umgang mit Heterogenität gestellt werden. Die TN sollen dafür sensibilisiert werden, dass die Anforderungen der Bildungsstandards relativ unkonkret sind bzw. unterschiedliche Interpretationen zulassen. Wie unterschiedlich diese Aussage der Bildungsstandards im Unterrichtsalltag interpretiert werden, wird im weiteren Verlauf der Fortbildung gezeigt. <u>Bildungsstandards KMK:</u> http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf Dass diese Forderung nach einen konstruktiven Umgang mit der vorherrschenden Heterogenität in der Klasse nicht neu ist, zeigt der Bezug zu Johannes Kühnel auf Folie 4. Folie 5 soll anhand der Karikatur verdeutlichen, dass vielen Lehrkräften sicherlich bewusst ist, dass sie an die unterschiedlichen Kinder nicht die gleichen Anforderungen stellen können und dürfen. Die Frage, die sich an dieser Stelle	exemplarisch Folie 5 

	aber aufdrängt ist: Wie kann Differenzierung im Mathematikunterricht aussehen? Bevor dieser Frage anhand von drei konkreten Unterrichtsbeispielen nachgegangen wird, werden im weiteren Verlauf der Fortbildung erst unterschiedliche Formen der Differenzierung vorgestellt werden.	
3-4‘	**<u>6. und 7. Folie:</u>** Anhand der Aussage einer Lehrerin, wie sie im Unterricht differenziert, wird diese Form der Differenzierung jeweils kritisch betrachtet. Auf Folie 6 wird eine Differenzierung vom Schulbuch aus vorgestellt (in Anlehnung an auf dem Markt existierende Werke). Das niedrigste Niveau wird zuerst vorgestellt, das höchste zuletzt. • Die Zuweisung der einzelnen Kinder zu den jeweiligen Aufgaben geschieht durch die Lehrkraft. Nicht die Kinder erfahren, was ihnen leicht und schwer fällt. Diese Entscheidung wird durch die Lehrperson getroffen. Die Kinder lernen hierbei nie, sich selbst angemessen einschätzen zu können (was kann ich gut, was fällt mir schwer?). Es kann auch gut sein, dass ein Kind, das z.B. das leichte Niveau bearbeiten soll, durchaus auch eigene Rechengeschichten erfinden kann. Es darf diese Kompetenzen aber nicht zeigen. • Man erkennt deutlich, dass die schwächeren Kinder stupide Rechenaufgabe abarbeiten müssen. Die „spannenden“ Aufgaben bleiben für die stärkeren Kinder. • Zudem bieten diese stupiden Aufgaben kaum Möglichkeiten zur Diagnostik: Welche Stärken und Schwächen zeigt ein Kind, dass das leichte Niveau nicht bearbeiten kann? Für eine individuelle Diagnostik sind die offeneren Fragestellungen wie sie im schweren Niveau zu finden sind, viel ergiebiger. • Da alle Kinder verschiedene Aufgaben bearbeiten, kann ein sozialer Austausch mit der ganzen Klasse nicht stattfinden.	exemplarisch Folie 7 
3-4‘	**<u>8. und 9. Folie:</u>** Folie 8 beginnt wieder mit einer Aussage einer Lehrerin, die unterschiedliche	

	Arbeitsblätter konzipiert, den Kindern aber die Wahl selbst überlässt. Beispielhaft sind hier zwei verschiedene Zahlenmauer-Aufgaben aufgeführt. Folie 9 verdeutlich erneut die Probleme einer solchen Differenzierung: • Es ist ein immenser Arbeitsaufwand für die Lehrkraft, da grundsätzlich mehrere Arbeitsblätter konzipiert werden müssen. • Erneut liegt es in der Entscheidung der Lehrerin, ob eine Aufgabe leicht oder schwer ist. Die Kinder lernen nicht einzuschätzen, was ihnen leicht oder schwer fällt. Was eine Lehrerin als leicht oder schwer einstuft ist oftmals nicht identisch mit dem, was Kinder als leicht oder schwer empfinden (das ist ein individueller Prozess). • Ein sozialer Austausch ist auch hier nicht möglich, s.o. • Es gibt, egal wie viele Überlegungen bei der Konzeption der AB angestellt werden, immer Kinder, die zwischen den Niveaus der Arbeitsblätter stecken. Sie können Vieles vom leichten Niveau und auch einiges vom schweren. Für diese Kinder ist weder das eine noch das andere AB das „passende“ Niveau.	exemplarisch Folie 8 
3-4‘	**<u>10. und 11. Folie:</u>** Folie 10 beginnt wieder mit einer Aussage einer Lehrerin, die für alle Kinder das gleiche AB bereit hält und die stärkeren Kinder in die Freiarbeit schickt bzw. für sie „Extrafutter“ im hinteren Bereich der Klasse bereithält. Die Grafik soll verdeutlichen, dass dieses Extrafutter oftmals diverse ganz verschiedene Themenbereiche anspricht. Folie 11 betont zunächst, dass derartige Formen der Förderungen auch durchaus möglich, aber nicht durchgängig optimal sind. • Die hohen mathematischen Kompetenzen der guten Schüler können den Unterricht bereichern, indem sie den anderen Kindern helfen, Tipps geben oder auch Strategien vorstellen. Sie werden zum „Motor“ neuer Entwicklungen in der Klasse. Diese Chance darf nicht verschenkt werden!!! • Das sammeln von Extrafutter kann ein sehr aufwändiger Prozess sein, denn es muss möglichst selbsterklärend gestaltet werden. In jeder guten Aufgabe	exemplarisch Folie 10 

	stecken Ansätze für „Extrafutter“. Das werden die Unterrichtsbeispiele zeigen.	
3-4‘	**<u>12. und 13. Folie:</u>** Folie 12 beginnt erneut mit einer Aussage einer Lehrerin, die den guten Kindern einfach offene Aufgaben gibt, damit sie frei Zahlen wählen dürfen. Das Beispiel ist von der Projektseite des Projekte KIRA entnommen. Dort findet man einen kompletten Internetauftritt zum Thema „offene Aufgabe“. Folie 12 betont zunächst, dass offene Aufgaben gut sind, allerdings in der Aussage der Lehrerin auch zu einseitig verstanden werden. • Offene Aufgaben sind nicht nur Aufgaben, bei denen Zahlen frei gewählt werden dürfen. Auch Aufgaben, in denen die Kinder ihre Vorgehensweisen, Entdeckungen und Überlegungen aufschreiben müssen, sind offene Aufgabe, denn sie überlassen es den individuellen Kompetenzen des Kindes, den Weg zur Lösung selbst zu bestimmen. • Bei offenen Aufgaben, bei denen Zahlen u.ä. frei wählbar sind, können im Unterricht nicht oder kaum zum Austausch über Strategien etc. genutzt werden. Sie können allenfalls präsentiert, korrigiert, überprüft und gewürdigt werden. • Der Unterricht und vor allem die Schulung prozessbezogener Kompetenzen ist kaum über offene Aufgaben in vollem Umfang möglich, da hier nichts entdeckt, beschrieben, begründet … werden muss.	exemplarisch Folie 12 
1-2‘	**<u>14. Folie:</u>** Folie 14 bringt auf den Punkt, was natürlich Differenzierung bedeutet. Sie setzt beim Kind an, d.h. das Kind selbst sucht sich selbst aus, wie tief es in die Aufgabe eindringt: findet es alle Lösungen, geht es systematisch vor, kann es seine Entdeckungen aufschreiben, kann es diese auch begründen? … Wichtig ist, dass die niedrige Eingangsschwelle einen Zugang für ALLE Kinder ermöglicht. Jedes Kind muss einen ersten Zugang zur Aufgabe finden.	

	Allerdings macht eine gute Aufgabe noch keinen guten Unterricht. Es müssen noch weitere Gestaltungsprinzipien mitberücksichtig werden (insb. das aktiv-entdeckende und soziale Lernen). Für weitere Informationen können Sie sich das Fortbildungsmodul 6.1 oder auch die Informationstexte in Haus 6 ansehen.	Folie 14  Was bedeutet dagegen „Natürliche Differenzierung“? Das Konzept der natürlichen Differenzierung wurde von Wittmann entwickelt (vgl. Wittmann 2010) und verlangt die Differenzierung von „unten“ resp. vom „Kind aus“ (vgl. Brügelmann 2000). „Der Schlüssel dafür liegt in Lernangeboten, die eine niedrige Eingangsschwelle haben, einen bestimmten Grundbestand von Kenntnissen und Fertigkeiten sichern und darüber hinaus den Kindern Optionen ermöglichen, die sie nach ihren individuellen Möglichkeiten wahrnehmen können“ (Wittmann 2010, S. 63). Es muss im Gesamtzusammenhang mit den vier anderen Prinzipien ‚Konzentration auf fachliche Grundideen‘, ‚Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen‘, ‚Produktives und automatisierendes Üben‘ und ‚systemische Qualitätssicherung‘ gesehen werden, und nur in Verbindung mit diesen Prinzipien kann es seine volle Wirkung entfalten“ (ebd., S. 63).
45-50’	**<u>15. -19. Folie</u>** Diese Folien dienen zur Einleitung der Arbeitsphase. Die drei verschiedenen Aufgabenformate werden kurz vorgestellt. Die Ergebnisse der Gruppenarbeit können z.B. nacheinander präsentiert oder auch als Museumsrundgang von allen Teilnehmern betrachtet werden.	Die Gruppe wird in drei Teilgruppen unterteilt. Jede Teilgruppe bekommt für jeden Teilnehmer die entsprechenden Kopien der Forscherhefte. Edding + Flipchart
12-15’	**<u>20. -29. Folie</u>** Im Folgenden werden Kinderdokumente aus einer vierten Klasse präsentiert, die in Anlehnung an eine Veröffentlichung von Verboom zum Thema Anna-Zahlen (vgl. Verboom 1998) Forscheraufträge zu Anna-Zahlen bearbeitet haben. Die Dokumente sind im Rahmen einer Masterarbeit von Kristina Krause (vgl. Krause 2011) entstanden. Weitere Informationen zum Aufgabenformat Anna-Zahlen und verwandten Aufgaben finden Sie in Haus 7 unter Informationstexte: http://www.pikas.tu-dortmund.de/upload/Material/Haus_7_-_Gute_-_Aufgaben/IM/Informationstexte/Haus7_MIMI_Aufgaben.pdf <u>Folie 21:</u> Als niedriges Einstiegsniveau sollten die Kinder zunächst verschiedene Anna-Zahlen finden. Während Hannah relativ unsystematisch Anna-Zahlen	Hannah: 4334, 6116, 5445, 7887, 8338, 6446 1001, 2112, 3883 6116 9889 1221

	aufschreibt, geht Marie zunehmend systematischer vor und entwickelt schon nach wenigen Versuchen eine Strategie.	
	<u>Folie 22:</u> Diese setzt sie konsequent fort, indem sie das bereitliegende Material nutzt und so letztlich alle möglichen Anna-Zahlen findet. Aus der Notierung heraus kann sie auch die Vollständigkeit der gefundenen Anna-Zahlen begründen.	Marie: 9779, 8668, 4334, 9229, 7667, 2332, 2112, 2442, 2552, 2662, 2772, 2882, 2992, 3113, 3223, 3443, 3553, 3663, 3773, 3883, 3993, 3003, 4004, 4114, 4224, 4334, 4554, 4664, 4774, 4884, 4994, 5005, 5115, 5225, 5335, 5445, 5665, 5775
	<u>Folie 23:</u> Marie kann darüber hinaus ganz allgemein erklären, wie eine Anna-Zahl gebildet wird (weiterführende Anforderung).	Marie: Bei ~~einer~~ Anna: ~~Zahl~~ steht forne und hinten ein A bei der Zahl steht Vorne und hinten der gleiche Zahl. In der mitte stehen 2 Ns bei ~~de~~ der Zahl stehen auch 2 gleiche Zahlen Beispiel: ANNA = 1001
	<u>Folie 24:</u> Das Material wird aber nicht nur von den starken Kindern genutzt. Es hilft auch Kindern wie Lara, ihre teilweise systematisch gefundenen Anna-Zahlen zu sortieren und aus der Sortierung heraus neue zu finden (wenn auch nicht alle) ➔ Somit arbeiten alle Kinder an der gleichen Aufgabe, aber jeder zeit individuell, was er oder sie kann. Am Ende der Stunde werden alle Anna-Zahlen gesammelt. Dabei können sowohl Marie als auch Hannah und Lara ihre gefundenen Anna-Zahlen beitragen. Lara und Hannah können von Marie lernen, wie man systematisch an solche Aufgabe herangehen kann.	
	<u>Folie 25:</u> Im weiteren Verlauf sollten Anna-Aufgaben mit dem Ergebnis 891 gefunden werden. Nina rechnet einige Aufgaben korrekt aus. Man weiß nicht genau, ob sie erkannt hat, dass die Zifferndifferenz ausschlaggebend dafür ist, dass 891 als Ergebnis herauskommt. Marie fängt korrekt an. Doch dann wird sie etwas „übereilig“. Die erste Rechnung ist noch korrekt, alle weiteren aber nicht mehr. Genau hier kann die leistungsstarke Marie nun etwas von ihren Mitschülern lernen und ihren Fehler im Rahmen einer gemeinschaftlichen Reflexionsphase erkennen.	Nina: 5445 − 4554 = 0891 8778 − 7887 = 0891 3223 − 2332 = 0891 1001 − 0110 = 0891

<table>
<tr>
<td></td>
<td><u>Folie 26:</u>
Anschließend wurde den Kindern in Anlehnung an Verboom (1998) eine Möglichkeit der Visualisierung angeboten. Durch das Verschieben der Plättchen in der Stellenwerttafel können die Kinder erkennen, warum bei einer Zifferndifferenz von 1 immer ein Vielfaches von 891 herauskommen muss (+1000-100-10+1).

<u>Folie 27:</u>
Marie versteht sofort, wieso Anna die Plättchen genau so verschiebt und warum sie diese Darstellung nutzen kann, um die Vielfachen von 891 zu erklären.

<u>Folie 28:</u>
Auch Ahmed schafft es zu beschreiben, was Anna macht und wie sie die Plättchen verschiebt. Den Zusammenhang zur Zahl 891 stellt er aber noch nicht deutlich heraus.
Die Entdeckungen zu dieser Aufgabe haben die Kinder in einer gemeinschaftlichen Reflexionsphase im der Klasse besprochen. Anschließend konnten sie versuchen zu erklären, warum bei einer Zifferndifferenz von 2 das Doppelte von 891 als Ergebnis herauskommt.

<u>Folie 29:</u>
Hier wird deutlich, was Ahmed in der Reflexionsphase gelernt hat. Im Unterschied zu seiner vorherigen Beschreibung, bringt er nun eine nahezu perfekte Beschreibung. Da Anna nu zwei Plättchen verschiebt (er meint zwei zu den Tausendern und zwei zu den Einern), kommt auch das Doppelte von 891 heraus. Er erklärt es auch noch mal durch eine Rechnung +2000 -200 -20 +2

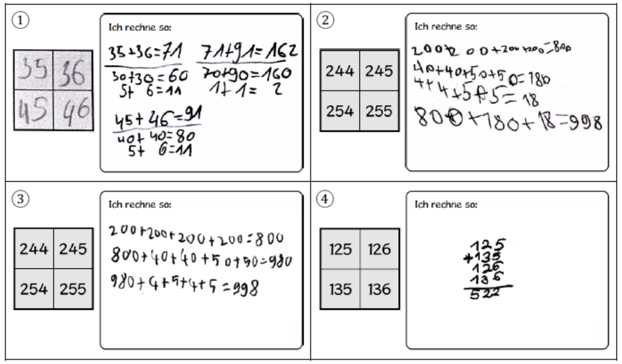
Der soziale Austausch im Sitzkreis dazu geführt, dass Ahmed nun deutlich detaillierter beschreibt.</td>
<td>Marie:
1001 - 0110 = 891
2002 - 0220 = 891
3003 - 0330 = 891
4004 - 0440 = 891
5005 - 0550 = 891
6006 - 0660 = 891
7007 - 0770 = 891
8008 - 0880 = 891
9009 - 0990 = 891

Marie:
Sie hat aus der Anna-Zahl 1221 die Zahl 2112 gemacht weil ~~s~~ sie hat die Plättchen verschiebt. Und hat dadurch die umgekerthe Anna-Zahl gemacht. Die Differenz ist 1 und deshalb muss das Ergebniss 891 sein.
1000 - 100 = 900
900 - 10 = 890
890 + 1 = 891
Stimmt!

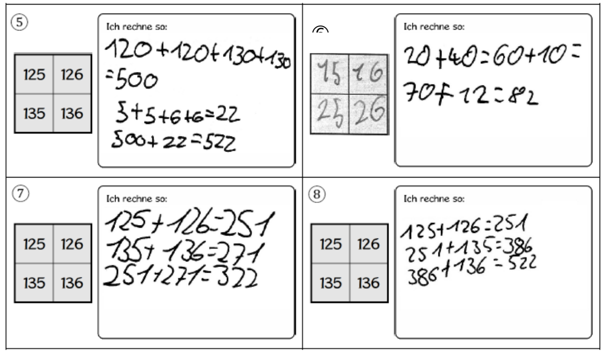
Ahmed:
Anna hat diesmal 2 Plättchen verschoben. Weil 2 das doppelte von 1 ist kommt auch das dop~~pelten~~ pelte von der 891 raus. Die Stellenwerte von der H. u. Z. werden -200 oder -20 und bei den T. +2000 und bei den E +2. Das sind 1782 = 2 · 891</td>
</tr>
<tr>
<td>12-15’</td>
<td><u>30. – 36. Folie</u>
Die Drittklässler sollten in dieser Lernumgebung entweder an vorgegebenen oder selbst gewählten 2x2-Ausschnitten des Tausenderbuches die Summe der vier gewählten Zahlen möglichst geschickt bestimmen. Da das halbschriftliche Rechnen aus dem zweiten Schuljahr bekannt war und auch schon die Addition</td>
<td></td>
</tr>
</table>

mit zwei Summanden im Tausender Thema des Mathematikunterrichts war, konnte hier jedes Kind einen Zugang finden (niedriges Einstiegsniveau).
Die Dokumente stammen alle aus einer Bachelorarbeit von Cornelia Lüling (vgl. Lüling 2010).

<u>Folie 31:</u>
Hier sind Beispiele von leistungsschwächeren Kindern (entnommen aus Lüling 2010) zu sehen. Im Beispielen 1 ist zu erkennen, dass das Kind die zwei Zahlen in den Zeilen stellenweise addiert. Beide Teilergebnisse werden erneut stellenweise addiert. Kind 2 rechnet auch stellenweise, allerdings berücksichtigt es alle vier Zahlen gleichzeitig. Kind 3 mischt ein wenig das stellenweise und schrittweise Rechnen, da es mit Zwischenergebnissen direkt weiterrechnet. Kind 4 rechnet schriftlich. Man kann sogar innerhalb der schwächeren Kinder Unterschiede – und das auch qualitativ - in den Herangehensweisen sehen. Letztlich muss man aber sagen, dass diese vier Kinder die Besonderheiten der vier Zahlen wenig genutzt haben. Sie haben eine für sie einfache und universelle Strategie benutzt.

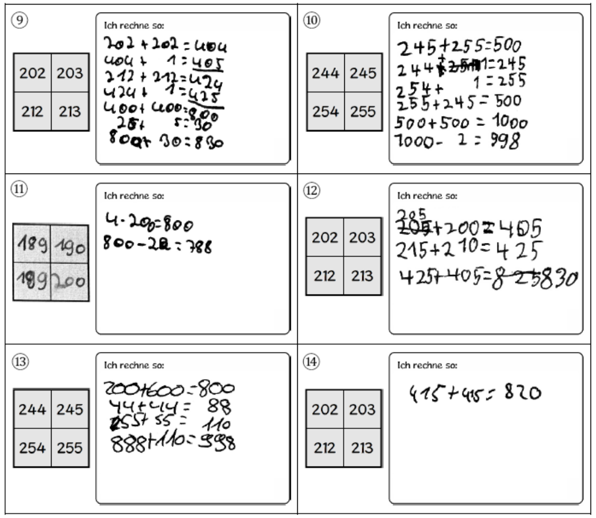


<u>Folie 32:</u>
Die Beispiele der leistungsmittleren Kinder zeigen wieder andere Strategien. Teilweise haben diese Kinder schon einen recht guten Blick für die vier Zahlen, die es zu addieren gilt. So hat das Kind 5 vielleicht schon erkannt, dass 120+120+130+130=500 ergibt und dieses ausgenutzt. Kind 6 hat – auch wenn das Gleichheitszeichen nicht korrekt benutzt wird – bereits einige Schritte im Kopf durchgeführt (10+10=20; 20+20=40; 5+5=10 und 6+6=12). Kind 7 hat anscheinend schon recht komplexe Rechnungen im Kopf durchgeführt. Ob es dabei die Verdopplungsaufgaben (125+125 und 135+135) ausgenutzt hat, wissen wir nicht. Es könnte aber sein. Kind 8 rechnet ähnlich wie Kind 7 recht komplexe Zahlen zusammen. Auch hier kann man vermuten, dass ggf. die Verdopplung 125+125 ausgenutzt wurde.



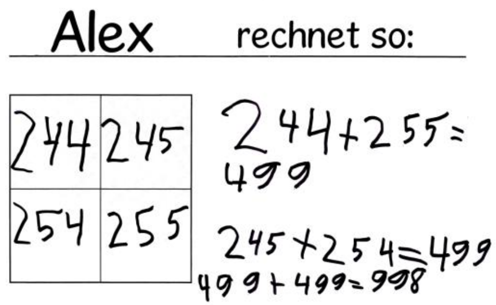
<u>Folie33:</u>
Kind 9 nutzt die Verdopplungsaufgabe als Hilfsaufgaben um die Summen in einer Zeile zu bestimmen. Kind 10 addiert zuerst die Zahlen in der rechten

Spalte. Vielleicht hat es gesehen, dass die Summe 500 ergibt. Hieraus wird dann die Summe der linken Spalte abgeleitet, denn das Kind zeigt, dass 244+254 um 2 kleiner sein muss als 245+255.
Kind 11 nutzt bei einem selbst gewählten Ausschnitt die Einsicht, dass die Zahlen untereinander einen bestimmten Abschnitt haben: ein Schritt nach links bedeutet -1, ein Schritt nach oben -10, ein Schritt nach oben und gleichzeitig nach links -11. Es rechnet daher 4·200 und zeiht hiervon 22 (=1+10+11) wieder ab. Kind 12 nutzt die Konstanz der Summe aus und rechnet eine einfachere Aufgabe, die das gleiche Ergebnis hat (202+203=205+200).
Kind 13 addiert zunächst alle Hunderter. Dann verdoppelt es die 44. Dabei hat das Kind aber einen Einer „unterschlagen“. Den berücksichtigt das Kind bei der Verdopplung der 55, denn hier wird ein Einer zuviel berechnet.
Kind 14 addiert „über Kreuz“: 202+213=415 und 203+212=415).



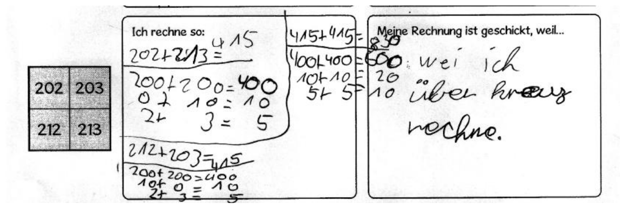
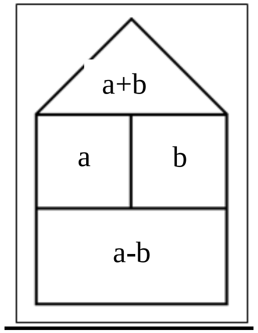
Folie 34:
Anna – ein leistungsschwächeres Mädchen – hat die Summen im Quadrat stets nach der Strategie „stellenweise“ gerechnet.

Alex Rechentrick:



Folie 35:
In einer gemeinschaftlichen Reflexionsphase wurden ganz verschiedene Tricks zu Bestimmung der Summen im Tausenderbuch vorgestellt. Es wurden einfache Lösungen wie auf Folie 31 gezeigt und auch komplexere genauso gewürdigt. Letztlich wurden verschiedene Rechenwege an der Tafel angehängt, an denen die Kinder sich orientieren konnten. So wurde auch der Rechentrick von Alex vorgestellt, der „über Kreuz“ gerechnet hat und somit zwei gleiche Teilsummen (499) erhält.

Folie 36:
Im weiteren Unterrichtsverlauf, in dem die Kinder aufgefordert wurden, auch mal neue Tricks auszuprobieren, wagte sich Anna an den Trick von Alex heran. Sie erklärte später im Sitzkreis auch stolz, dass sie den Rechentrick von Alex ausprobiert hat. Zwar erkennt man, dass sie die Teilsummen erneut nach ihrer alten Strategie bestimmt und sich damit ihre alte mit der neuen Strategie mischt, aber Anna hat zumindest mitbekommen, dass man mit einem gewissen

	Zahlenblick Zahlen geschickter zusammenfassen kann. Zudem zeigt sich auch hier wieder, dass jede neue Rechenstrategie wiederholt angewendet werden muss.	Anna: 
12-15’	**37. – 46. Folie** Die mathematische Struktur des Rechenhauses (vgl. Müller und Wittmann 1994; Nührenbörger und Schwarzkopf 2010) ist nebenstehend abgebildet. Sie ist für die folgende Analyse der Kinderdokumente wichtig. Wenn in der Fortbildung den Teilnehmer nicht klar ist, warum die Kinder so rechnen dürfen, sollte ein kurzer Einschub zur mathematischen Struktur des Aufgabenformates vorgenommen werden. Die auf den folgenden Folien aufgeführten Kinderdokumente stammen aus einem dritten Schuljahr und sind aus der Masterarbeit von Gülay Beyoglu und Banu Uyanik (vgl. Beyoglu & Uyanik 2011) entnommen. Folie 37 + 38: Diese Folien haben einleitende Funktionen: Worum geht es bei den Rechenhäusern? Welche Aufgabenformate sind möglich. Folie 39: Das niedrige Einstiegsniveau bestand darin, dass die Kinder verschiedene Rechenhäuser (lösbare und auch unlösbare) ausrechnen sollten. Dabei wurden sie stets aufgefordert aufzuschreiben, ob dieses Rechenhaus lösbar ist oder nicht. Hier zeigt sich eine Form der Offenheit: zum einen müssen die Kinder diesen Arbeitsauftrag nicht zwingend bearbeiten, zum anderen ist ihnen offen gelassen, wie sie die Lösbarkeit oder auch Unlösbarkeit erklären. So behauptet Lisa, dass das vorliegende Rechenhaus unlösbar sei. Da es sich	

um lösbares Rechenhaus handelt (wie man bei Tom sieht), braucht Lisa hier dringend den Austausch mit ihren Mitschülern, um Strategien zur Lösung des Hauses zu erfahren. Vermutlich hat sie viel probiert und keine Lösung gefunden.

Tom findet eine Lösung, und beschreibt, warum die von ihm gefundene Lösung korrekt ist: weil die zalen zusamen Pasen. Es mag sicherlich an der Fragestellung liegen: Ist das Haus lösbar? Bezogen auf die Fragestellung ist seine Antwort also durchaus korrekt.

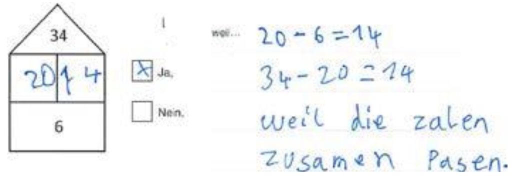
Interessanter wird es, wenn die Rechenhäuser unlösbar sind, wie das Beispiel von Alina zeigt. Sie erklärt, dass man das Ergebnis nicht halbieren kann. Mit „das Ergebnis" meint sie vermutlich entweder eine Addition oder eine Subtraktion der Dachzahl und der Kellerzahl. Die stärkeren Kinder hatten nämlich erkannt, dass man bei einer Addition der Dachzahl und der Kellerzahl erhält man das Doppelte der linken Zimmerzahl: $(a+b)+(a-b)=2a$; entsprechend erhält man bei einer Subtraktion der Dachzahl und der Kellerzahl das Doppelte der rechten Zimmerzahl $(a+b)-(a-b)=2b$; halbiert man diese Ergebnisse, bekommt man eine der beiden Zimmerzahlen.
Bei einer geraden und einer ungeraden Dach- und Kellerzahl aber erhält man immer ein ungerades Ergebnis, das nicht halbiert werden kann. Das Rechenhaus muss also unlösbar sein. Bemerkenswert ist, dass Alina ein absolut allgemein gültiges Argument bringt: JEDES Rechenhaus mit einer geraden und einer ungeraden Dach- und Kellerzahl ist unlösbar!

Timo entdeckt auch, dass das Rechenhaus unlösbar ist. Bei ihm ist aber deutlich zu erkennen, dass er es probierend herausgefunden hat: wenn er passende Zimmerzahlen zur Dachzahl wählt, passt der Keller nicht und umgekehrt.
Es ist in der Qualität der Bearbeitung ein Unterschied zu Alina zu erkennen. Aber genau das meint „natürliche Differenzierung". Jedes Kind arbeitet auf seinem Niveau!

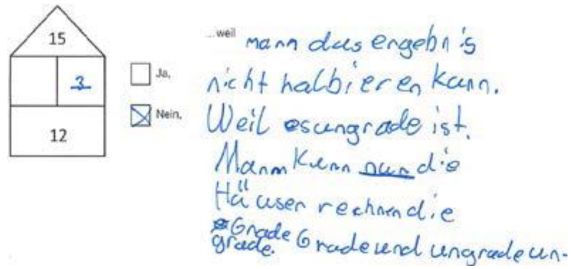
Folie 40:
Die Kinder wurden zudem aufgefordert nach dieser ersten Auseinandersetzung

Lisa:

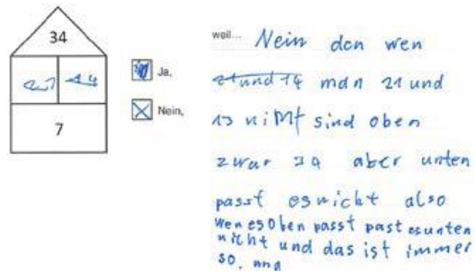
Tom:



Alina:



Timo:



mit lösbaren und unlösbaren Rechenhäusern, Tippkarten für ihre Mitschüler zu erstellen, wie man Rechenhäuser lösen kann.

Hierzu wurde vorab ein Wortspeicher (vgl. Wortspeicherfilm in Haus 4) erarbeitet, so dass die Kinder über die netsprechenden Fachbegriffe verfügten.

Der Tipp von Felix ist zwar verständlich: beim Ergänzen der Kellerzahl zur Dachzahl erhält der das Doppelte der rechten Zimmerzahl. Wie er aber nun genau auf die rechte und die linke Zimmerzahl kommt, erklärt er nicht vollständig. Irgendwie erhält er eine rechte und eine linke Zimmerzahl. Hier könnte ein Austausch mit einem Mitschüler, der diesen Tipp nachvollziehen soll, eine Verbesserung bewirken.

Sören beschreibt die gleiche Strategie wie Felix. Er beschreibt allerdings korrekt, wie er die rechte Zimmerzahl berechnet. Aus der Beschreibung „rechte zimmer plus das linke zimmer = Dachzahl“ kann man vermuten, dass er damit beschreiben möchte, wie er die linke Zimmerzahl bestimmt: als Ergänzung mit der rechten Zimmerzahl zur Dachzahl.

Folie 41:
Folie 41 zeigt Tippkarten von leistungsschwächeren Kindern. Auch sie konnten versuchen, ihre Vorgehensweisen zu beschreiben.

Annika umschreibt ihre Strategie als „man muss kucken“ und umschreibt, wie sie zunächst zwei passende Zahlen für die Dachzahl nimmt. Hieran überprüft sie dann die Kellerzahl. Wenn sie nicht passt, erhöht und erniedrigt sie die Zimmerzahlen gegensinnig um je Eins, bis sie eine passende Lösung gefunden hat. Sie nutzt dabei implizit die Konstanz der Summe aus (linke Zimmerzahl um Einen verkleinern, rechte Zimmerzahl um Einen vergrößern, dann stimmt die Dachzahl immer noch).

Ramona beschreibt – und das sieht man auch in ihrem Rechenhaus – dass sie Zahlen ausprobiert hat.

Felix:

Ich habe erst die Kellerzahl mit der Dachzahl ergänzt. Das ~~Ergebis~~ Ergebnis ~~a~~ habe ich geteilt ~~das~~ die eine zahl habe ich ins rechtezimmer getan und die andere zahl habe ich ins linke Zimmer getan

Sören:

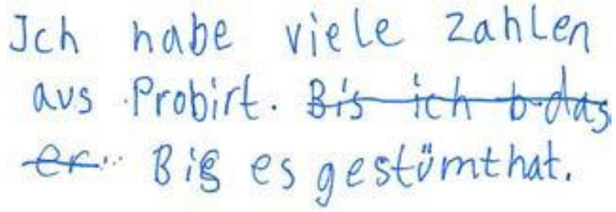
Rechne die kellerzahl – die dachzahl dann halbiere das ergebniss und schreibe das ergebniss ins das ~~ree~~ rechte zimmer und das rechtezimmer plus das linkezimmer = Dachzahl

Annika:

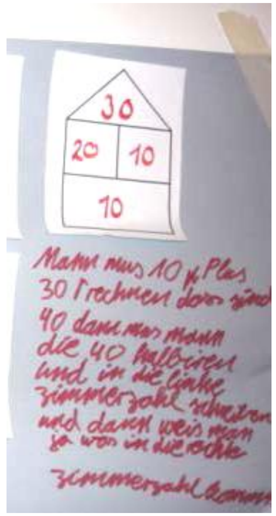
Man mus kucken wen man
~~35~~ ~~hat mus man~~ das macht also
ich habe jetzt 35 dan mus
33|2
33
33
man 33 und 2 das passt nicht den
33 - 2 = 31 und es mus ja 33 sein
also neme ich jetzt 34 und 1 35
das past weil 34 - 1 = 33 34|1
~~3~~ sind und 34 + 1 = 35 sind. 33

Einem Kind wie Ramona kann durch den sozialen Austausch mit anderen verdeutlicht werden, dass es noch andere Strategien gibt, als das Ausprobieren von Zahlen. Oftmals kommen die schwächeren Kinder nicht darauf, dass es noch andere geschickte Wege gibt. In dem vorliegenden Beispiel wurde daher eine Mathekonferenz eingeplant, in der sich die Kinder in Kleingruppen ihre Strategien gegenseitig erklären. Zum einen kann eine Ramona in diesen Gesprächen mitreden, da sie eine eigene Strategie beitragen kann, zum anderen kann sie durch die Strategien anderer Kinder neue Strategien kennenlernen.

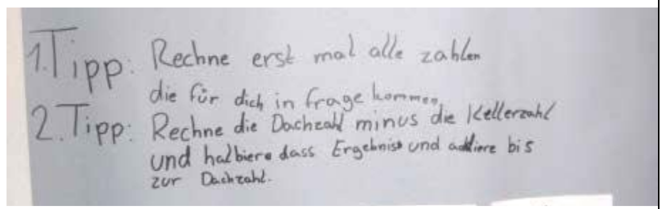
Ramona:



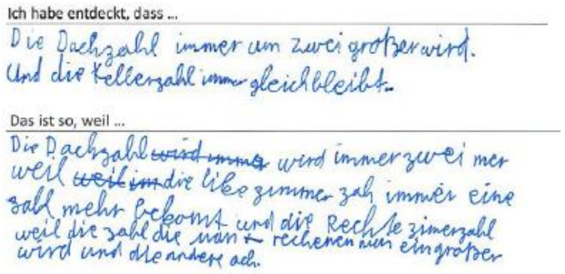
Folie 42:
Hier wird das Ergebnis einer solchen Mathekonferenz gezeigt. Hier haben sich die Kinder auf eine Strategie geeinigt, bei der die linke Kellerzahl durch Ausnutzung der Struktur im Rechenhaus bestimmt wird: Dachzahl+Kellerzahl ergibt das Doppelte der linken Zimmerzahl, denn (a+b)+(a-b)=2a



Folie 43:
Hier wird das Plakat einer anderen Gruppe präsentiert. Man sieht, dass diese Gruppe zwei wesentlich verschiedene Tipps notiert hat: 1. Das Ausprobieren aller Zahlen, die in Frage kommen; 2. Die Berechnung der rechten Zimmerzahl durch Subtraktion von Dachzahl und Kellerzahl. Dieses Ergebnis wird halbiert und man erhält die rechte Zimmerzahl. Zudem wird noch erklärt, wie man daraus nun die linke Zimmerzahl bestimmen kann.



Folie 44:

	Bei einem anderen Forscherauftrag sollten die Kinder operative Aufgabenserien zu den Rechenhäusern erforschen: Jede Zimmerzahl wird um Eins erhöht. Kevin erkennt hier vollkommen korrekt, dass dadurch die Dachzahl um zwei größer wird, während die Kellerzahl gleich bleibt. Warum die Dachzahl um zwei größer werden muss, kann er auch gut begründen, denn jede Zimmerzahl wird um Eins größer. Warum dann aber gleichzeitig die Kellerzahl gleich bleibt, erklärt er nicht. Hier sieht man, dass der leistungsstarke Kevin durchaus weiter gefördert und gefordert werden könnte, indem er aufgefordert wird, auch die Konstanz der Kellerzahl zu erklären. Folien 45 und 46: Hier wird deutlich, dass die Kinder bei der Evaluation der Lernumgebung „Rechenhäuser“ erfahren haben, dass Mathematik auch anders sein kann. Auch wenn sie haben viel forschen und arbeiten müssen, so haben sie dies doch gern gemacht: Mathematik kann Spaß machen!	Kevin: 
1-2’	**Folie 47:** Verabschiedung der Teilnehmer, Verweisen Sie zur weiteren Anregungen auf das Fortbildungs- und Unterrichtsmaterial im Haus 7	

Literatur:

Beyoglu, Gülay; Uyank, Banu (2011): Konzeption und Evaluation einer Lernumgebung zum Aufgabenformat „Rechenhäuser“ und „Zahlen ziehen um“ in einem dritten Schuljahr. TU Dortmund: Unveröffentlichte Masterarbeit

Krause, Kristina (2011): Entwicklung und Erprobung einer Lernumgebung zum Thema „Muster und Strukturen“ in einer vierten Klasse. TU Dortmund: Unveröffentlichte Masterarbeit.

Lüling, C. (2010): Entwicklung, Erprobung und Analyse einer Lernumgebung zum flexiblen Rechnen in einem dritten Schuljahr. TU Dortmund: Unveröffentlichte Bachelorarbeit. (vgl. auch http://www.kira.tu-dortmund.de/front_content.php?idcat=371&lang=8)

Müller, Gerhard N.; Wittmann, Erich Ch. (1994): Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins. 2. überarbeitete Auflage. Leipzig: Klett.

Nührenbörger, Marcus; Schwarzkopf Ralph (2010): Diskurse über mathematische Zusammenhänge. In: Claudia Böttinger, Elke Söbbeke, Kerstin Bräuninger, Marcus Nührenbörger, Ralph Schwarzkopf (Hrsg.): *Mathematik im Denken der Kinder. Anregung zur mathematikdidaktischen Reflexion*. Seelze-Velber: Kallmeyer/Klett, S. 169-215.

Verboom, Lilo (1998): Produktives Üben mit ANNA-Zahlen und anderen Zahlenmustern. In: Die Grundschulzeitschrift, H.119, S- 48-49.