Von der halbschriftlichen zur schriftlichen Multiplikation

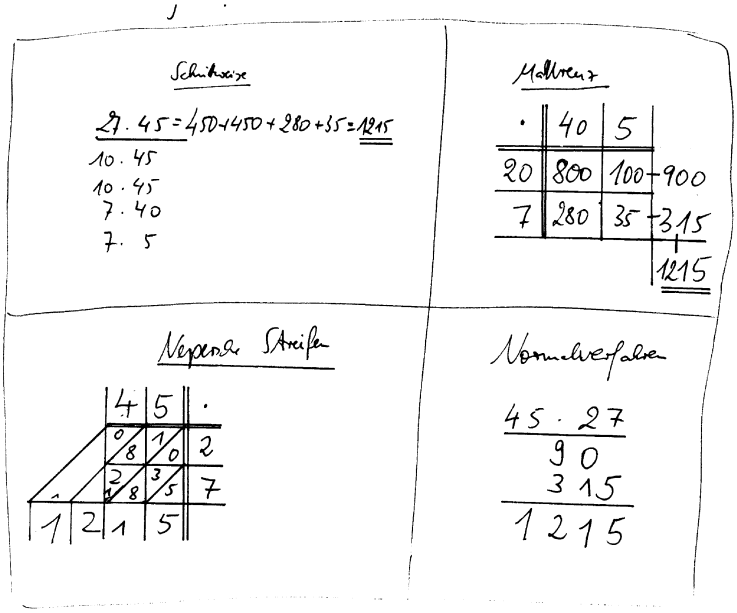
Ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts besteht darin, schriftliches und halbschriftliches Rechnen miteinander zu verbinden. Bei der Verwirklichung dieses Anspruchs ergeben sich jedoch einige Schwierigkeiten. Denn schriftliches Rechnen ist **Ziffern**rechnen nach genau **definierten** Regeln, in der Regel von ‚**klein nach groß**' (erst die Einerstelle, dann die Zehnerstelle, usw.). Schriftliche Rechenverfahren sind Konventionen, die von den Schülern in der Regel nicht – oder nur bei starker Steuerung durch die Lehrerin – entdeckt werden können.

Beim halbschriftlichen Rechnen hingegen benutzt man **Zahlganzheiten**, verwendet **flexibel** einsetzbare, verschiedene Vorgehensweisen und rechnet in der Regel von ‚**groß nach klein**' (bspw. erst die Hunderter, dann die Zehner, dann die Einer). Schüler können halbschriftliche Vorgehensweisen – freilich in unterschiedlich eleganten und fehleranfälligen Varianten – selbst entwickeln und mit ihren Kopfrechenmethoden in Einklang bringen.

Im folgenden soll aufgezeigt werden, dass es zwar nicht möglich ist, das schriftliche unmittelbar aus dem halbschriftlichen Rechnen abzuleiten, dass jedoch die verschiedenen Methoden zueinander in Beziehung gesetzt werden können (vgl. für die Addition: Becker & Spiegel 1995).

Vorgehensweisen beim Multiplizieren großer Zahlen

Für die Multiplikation großer Zahlen bieten sich im Grunde vier verschiedene Vorgehensweisen an, von denen die beiden halbschriftlichen und die beiden schriftlichen jeweils eng miteinander verwandt sind.



- **Schrittweise**: Hier wird einer bzw. werden beide Faktoren zerlegt, die Teilprodukte werden berechnet und untereinander notiert. Zum Schluss erfolgt eine Addition aller Teilsummanden. Bei dieser und der folgenden halbschriftlichen Vorgehensweise sind auch andere als die aufgeführten Varianten möglich.
- **Malkreuz** (Wittmann & Müller 1992): Die beiden Faktoren werden in zwei oder mehr Teilsummanden zerlegt, die in Tabellenform notiert werden. Jeder Teilsummand wird mit jedem anderen multipliziert, und die so entstehenden Teilprodukte werden zeilen- oder spaltenweise addiert. Die Tabellenform ist im übrigen eine Abstraktion einer analogen Zerlegung von Punktefeldern in Teilfelder.
- **Nepersche Streifen**: Der schottische Mathematiker John Neper (1550-1617) erfand ein Rechenmittel aus Holzstäben, dessen heutzutage einsetzbare Papierversion einerseits mit dem Malkreuz in Einklang zu bringen ist, andererseits jedoch ein schriftliches Verfahren darstellt. Stellenwertweise wird multipliziert und schließlich stellengerecht schräg addiert.
- **Schriftliches Normalverfahren**

Es fehlt der Platz, hier Vor- und Nachteile der einzelnen Vorgehensweisen vergleichend herauszustellen. Statt dessen soll im weiteren aufgezeigt werden, wie im Unterricht eines vierten Schuljahres versucht wurde, den Schülern das Erkennen von Zusammenhängen zu erleichtern.

Grundsätzliche Entscheidungen

Treffers (1983) hat dargelegt, wie die Schülerinnen und Schüler dazu angeregt werden können, ihre eigenen Vorgehensweisen zielbewusst weiterzuentwickeln. Diesen Weg von den ‚Inventionen' der Kinder hin zu den ‚Konventionen' der Mathematik hat er ‚fortschreitende Mathematisierung' genannt.

Die Schülerinnen und Schüler, über die im Folgenden die Rede sein wird, waren im vorangehenden Schuljahr bereits ein gutes Stück dieses Weges gegangen, indem sie dort eigene Strategien gefunden und zu den Strategien ‚Schrittweise' und ‚Malkreuz' weiterentwickelt hatten. Im Verlauf der Unterrichtsreihe sollten sie nun die halbschriftlichen Rechenstrategien des 3. Schuljahres wiederholen und bei größeren Zahlen verwenden, dann die Neperschen Streifen in ihrem Zusammenhang mit dem Malkreuz und schließlich das Normalverfahren kennen lernen.

Die beiden schriftlichen Verfahren wurden von der Lehrerin durch die Vorgabe von Beispielen eingeführt, anhand derer die Funktionsweisen gemeinsam erarbeitet wurden. Denn den schriftlichen Algorithmus und die Neperschen Streifen konnten die Schülerinnen und Schüler nicht selbst erfinden. Die Hintergründe ihres Funktionierens und deren Beziehungen zum Halbschriftlichen sollten ihnen allerdings nach und nach deutlicher werden.

Umsetzung im Unterricht

Im Unterricht wurde den Schülern zunächst Zieltransparenz gegeben, indem die Behandlung verschiedener Methoden zur Multiplikation großer Zahlen angekündigt wurde. Dann wurden sie gebeten, derartige (selbst gestellte) Aufgaben so zu lösen, wie sie wollten. Dabei zeigte sich, dass in den weitaus meisten Fällen die bereits aus dem 3. Schuljahr bekannten Strategien ‚Schrittweise' und ‚Malkreuz' – freilich in unterschiedlichen Varianten – zum Einsatz kamen (vgl. Abb. 1). Um den Schülern das Erkennen von Beziehungen zwischen dem Malkreuz und den Neperschen Streifen zu erleichtern, wurde eingeführt, dass der Multiplikator im weiteren jeweils am rechten statt am linken Rand notiert werden sollte. Denn beim schriftlichen Rechnen steht der Multiplikator – der Vervielfacher – rechts, während er bei den halbschriftlichen Methoden in der Regel als 1. Faktor notiert wird.

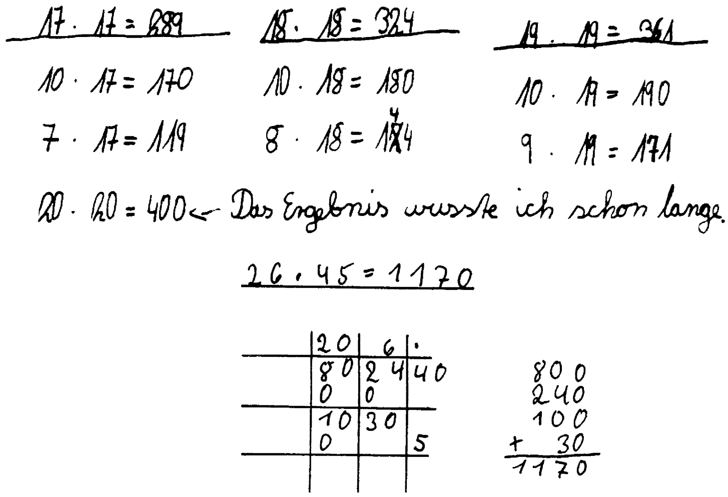
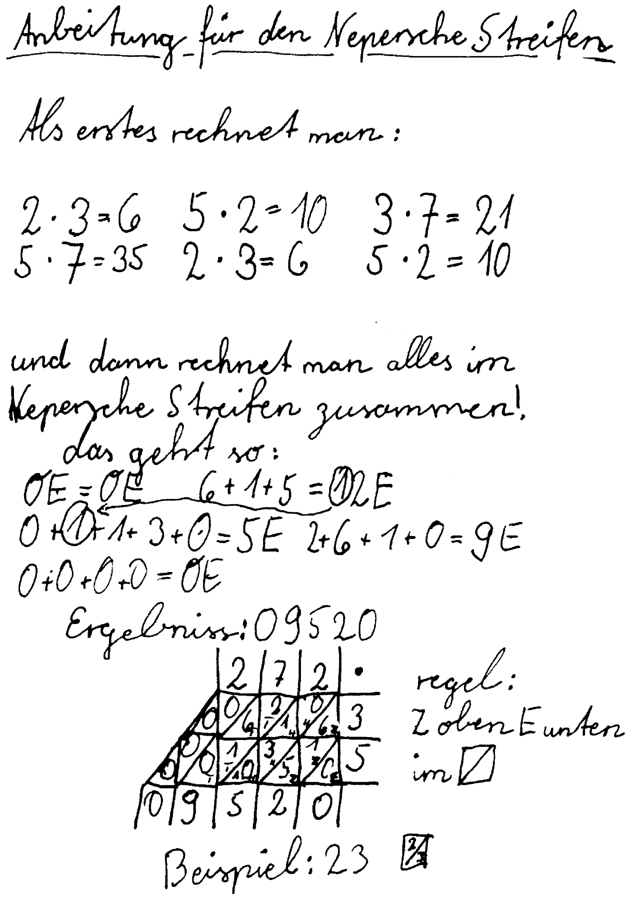


Abb. 1: Halbschriftliche Strategien

Anschließend wurden die Neperschen Streifen als historisches Rechenverfahren vorgestellt. Die Schüler verstanden die Funktionsweise und auch deren Hintergründe relativ schnell. Die Neperschen Streifen lösten die halbschriftlichen Strategien aufgrund ihrer Neuigkeit und ihrer Effizienz als bevorzugte Rechenstrategie bei vielen Schülern ab. Der Sprung vom Zahlen- zum Ziffernrechnen wurde bewusst thematisiert, um den Schülern Gelegenheit zu geben, die Zusammenhänge zum Malkreuz zu erkennen (Abb. 2).



Anbeitung für den Neperschen Streifen

Als erstes rechnet man:

$2 \cdot 3 = 6$ $5 \cdot 2 = 10$ $3 \cdot 7 = 21$
$5 \cdot 7 = 35$ $2 \cdot 3 = 6$ $5 \cdot 2 = 10$

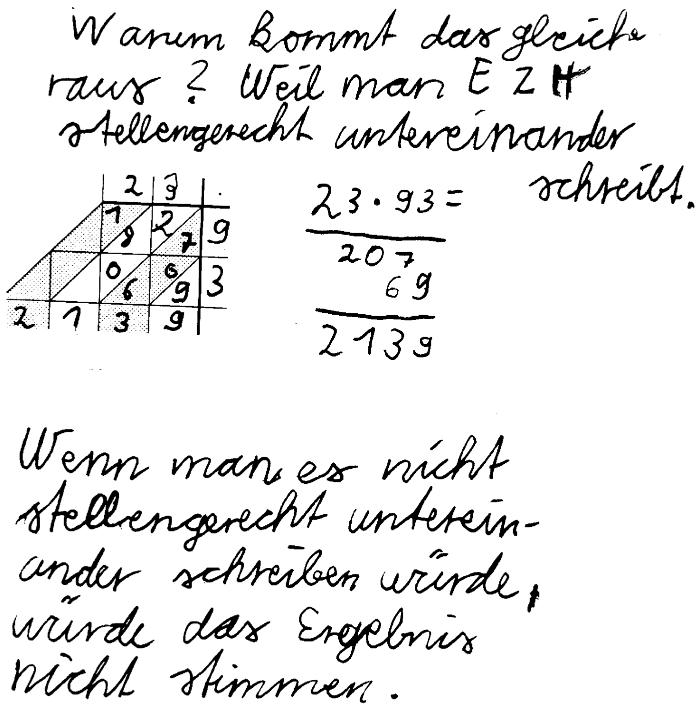
und dann rechnet man alles im Neperzche Streifen zusammen!
das geht so:
$0E = 0E$ $6+1+5 = 12E$
$0+1+1+3+0 = 5E$ $2+6+1+0 = 9E$
$0+0+0+0 = 0E$
Ergebniss: 09520

regel:
Z oben E unten
im ◿

Beispiel: 23

Abb. 2: Lena erklärt die Neperschen Streifen

Schließlich wurde das schriftliche Normalverfahren erklärt und mit den Neperschen Streifen verglichen (Abb. 3).



Warum kommt das gleiche raus? Weil man E Z H stellengerecht untereinander schreibt.

$23 \cdot 93 =$
207
69
2139

Wenn man es nicht stellengerecht untereinander schreiben würde, würde das Ergebnis nicht stimmen.

Abb. 3: Nepersche Streifen und das Normalverfahren

Zum Vergleich der Methoden suchten sich die Schülerinnen und Schüler selbst Aufgaben aus und rechneten sie nach der Methode, die ihnen für die jeweilige Aufgabe als die leichteste erschien (Abb. 4).

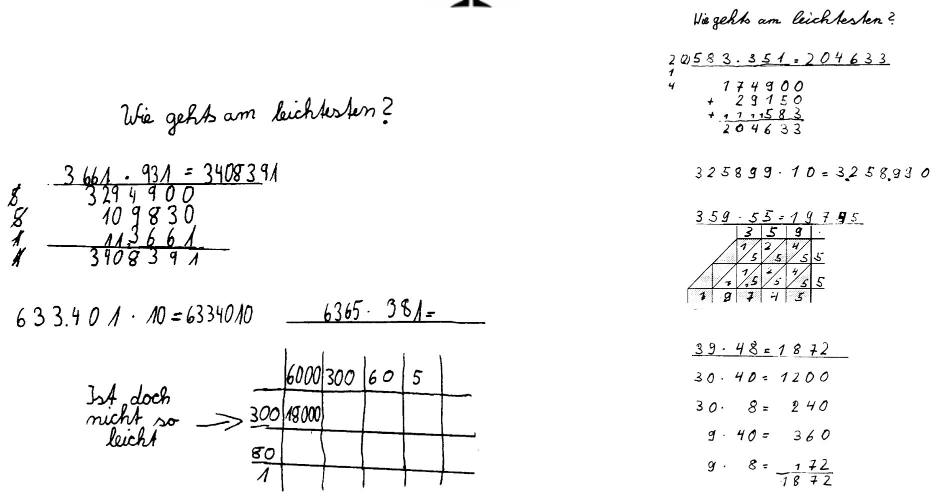


Abb. 4: Wie geht es am leichtesten?

Auch bekamen sie zum Abschluss der Reihe die Aufgabe gestellt, eine Aufgabe nach allen vier Vorgehensweisen zu rechnen und diese miteinander zu vergleichen (Abb. 5).

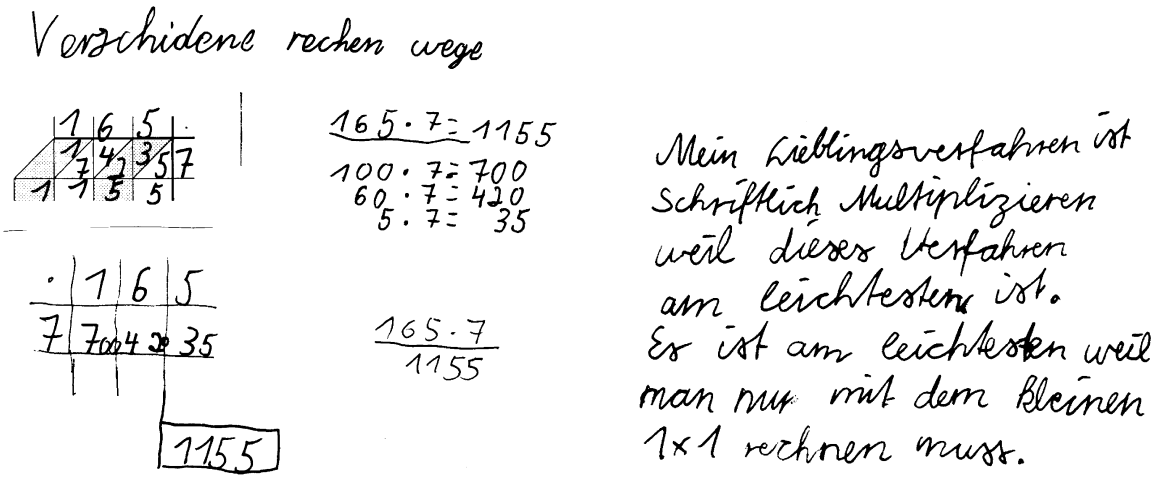


Abb. 5: Vergleich verschiedener Rechenwege

Das Normalverfahren und die Neperschen Streifen wurden zum Abschluss der Unterrichtsreihe von den Schülern und Schülerinnen bei den meisten Aufgaben bevorzugt. Allerdings wurden von der Lehrerin auch Aufgaben eingestreut, bei denen sich die halbschriftlichen Strategien als mindestens genauso leistungsfähig erwiesen. Schließlich sollte der schriftliche Algorithmus nicht die Krönung, sondern eine Rechenmethode unter mehreren darstellen.

Ausblick

Wo immer es sinnvoll war, wurde über die Gemeinsamkeiten und die Unterschiede, die Vor- und die Nachteile der einzelnen Vorgehensweisen reflektiert. In diesem Sinne bei den Schülern Bewusstheit anzuregen, ist ein wichtiges Lernziel des Mathematikunterrichts in der Grundschule.

Literatur

Becker, Christoph & Hartmut Spiegel (1995): Kinder auf dem Weg zum schriftlichen Addieren – Ein Brief an eine Lehrerin. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, S. 224-229.

Spiegel, Hartmut & Christoph Selter (2003): Kinder & Mathematik – Was Eltern wissen sollten. Seelze: Kallmeyer.

Wittmann, Erich Ch. & Gerhard N. Müller (1992): Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Stuttgart: Klett.

Treffers, Adri (1983): Fortschreitende Schematisierung. In: Mathematiklehren. H. 1, S. 16–20.

Anmerkung: Dieses Papier ist eine Vorfassung von Höhkter, Barbara & Christoph Selter (1998): Von der halbschriftlichen zur schriftlichen Multiplikation? In: Die Grundschulzeitschrift. H. 119, S. 17–19.