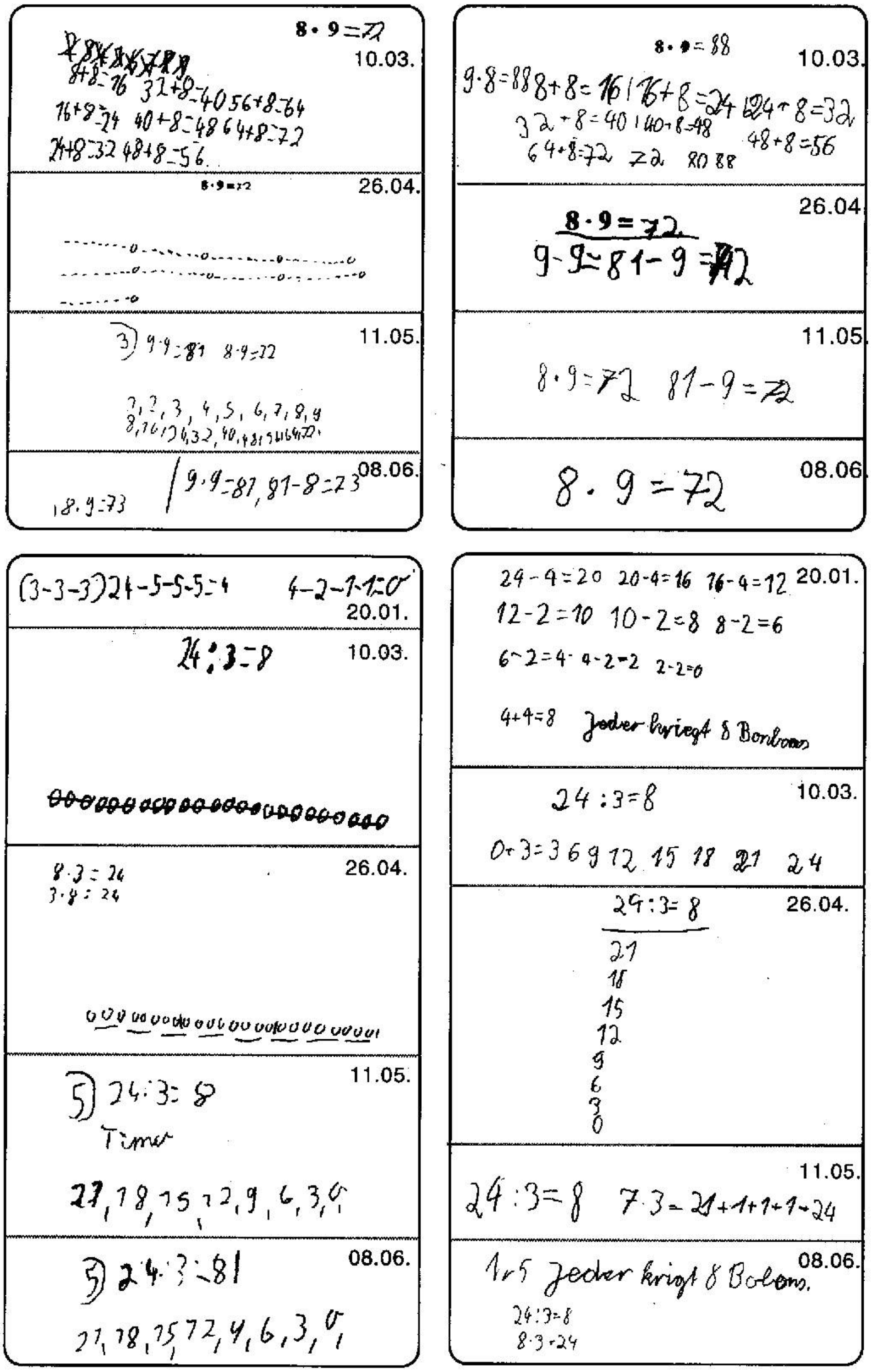
Zunehmende Mathematisierung – das Ich-Du-Wir-Prinzip am Beispiel des 1x1

In mehrwöchigem Abstand wurden während der zweiten Hälfte des 2. Schuljahres in Einzelinterviews mit Achim (unten links) und Marc-André (unten rechts) deren Lösungswege zu der kontextfrei dargebotenen Aufgabe 8*9 (in vier Interviews) sowie zu der Textaufgabe „In einer Tüte sind 24 Bonbons. Drei Kinder teilen sich die Bonbons“ (in fünf Interviews) erhoben.



Bevor die Lösungswege näher analysiert werden, um die Grundideen der zunehmenden Mathematisierung zu illustrieren (vgl. IM zu diesem Thema in Haus 5) sollen zunächst noch einige Informationen gegeben werden, warum die Aufgabe 8·9 im ersten Interview nicht behandelt wurde:

Eine Reihe von empirischen Untersuchungen lässt vermuten, dass Schüler häufig in der Lage sind, Textaufgaben zu lösen, während sie kontextfrei dargebotene Aufgaben noch nicht bewältigen können (vgl. beispielsweise Carpenter & Moser 1984). Im *ersten* Interview, das vor der Behandlung des multiplikativen Rechnens stattfand, wurden daher lediglich Textaufgaben gestellt, beispielsweise die hier dargestellte Bonbonaufgabe.

Da die Eigenproduktionen von Achim und Marc-André nicht immer zweifelsfreie Rückschlüsse auf deren Denkwege zulassen, werden ihre Vorgehensweisen im folgenden etwas ausführlicher erläutert.

Achim und die Bonbonaufgabe

Wir beginnen mit einigen Hintergrundinformationen zu Achims Rechenwegen bei der Bonbonaufgabe. Im *Januar* begann er, jedem Kind drei Bonbons zu geben; diesen Ansatz drückte er mit Hilfe des Zahlensatzes ‚3–3–3‘ aus, den er jedoch umgehend einklammerte. Daraufhin gab er jeder Person fünf Bonbons, wobei er allerdings einen Fehler beging: Er zählte von ‚24‘ um ‚5‘ rückwärts bis zur ‚19‘ und notierte den Zahlensatz ‚24–5‘. Dann zählte erneut um ‚5‘ rückwärts, setzte seine schriftlichen Aufzeichnungen fort (‚24–5–5‘) und hatte sich dabei das Zwischenresultat ‚14‘ durch vier abgespreizte Finger der linken Hand gemerkt. Anschließend nahm er die auf die gleiche Weise zu repräsentierende ‚9‘ als Ausgangspunkt des nächsten rückwärtigen Zählprozesses und vollendete die Gleichung ‚24–5–5–5=4‘. Die restlichen vier Bonbons verteilte er so gerecht wie möglich (‚4–2–1–1=0‘). Ein Kind, so Achim, bekäme somit sieben Bonbons, den anderen beiden stünden jeweils sechs zu.

Sowohl im *März* als auch im *April* malte er in linearer Anordnung vierundzwanzig Kreise. Er verband stets drei von ihnen, indem er sie mit Hilfe von Durch- bzw. Unterstreichungen markierte. In den *folgenden beiden* Interviews setzte er die Strategie ein, Geteiltaufgaben durch die wiederholte Subtraktion gleichgroßer Zahlen zu lösen und die Zwischenergebnisse jeweils zu notieren. In den Aufzeichnungen zum fünften Interview heißt es allerdings nicht, wie man vermuten könnte, ‚24:3=81‘: Hinter der ‚8‘ hatte Achim einen senkrechten Strich gezogen, der andeuten sollte, dass er die Lösung im Kopf berechnet und die ‚Merkzahlen‘ im nachhinein zur Erklärung seines Rechenweges notiert hatte.

Achim und 8·9

Nun zu seinen Lösungen zu der Aufgabe 8·9: Im *März* ermittelte er zunächst das Resultat von ‚8+8‘ zählend. Er schrieb über den entsprechenden Zahlensatz eine ‚2‘ als Merkzahl und strich diese direkt anschließend durch. Dann vermerkte Achim die Gleichung ‚16+8=24‘ unterhalb der ersten; das Ergebnis hatte er dabei durch Weiterzählen von ‚16‘ aus erhalten. Nun notierte er neben der durchgestrichenen ‚2‘ eine ‚3‘ und strich diese ebenfalls durch. Diese Prozedur wiederholte er, bis er das Endergebnis ‚72‘ erhalten hatte.

Im *April* hatte er zuvor die Aufgaben ‚6·3‘ und ‚7·7‘ gelöst, indem er gegliederte Punktreihen gezeichnet und die Anzahl der Kreise einzeln abgezählt hatte. Für die Aufgabe ‚8·9‘ erschien ihm dieses Verfahren dann als zu aufwendig. Daher meinte er, es reiche vollkommen aus, kleine *Striche* zu nehmen, von denen jeweils acht durch nicht mitzuzählende Kreise abgetrennt würden. Interessanterweise ermittelte er das *richtige Endergebnis*, obwohl der zweite ‚Achter‘ lediglich aus sieben Strichen bestand. Er zählte jedoch den zweiten Kreis gegen seine ursprüngliche Intention mit, was wahrscheinlich darauf zurückzuführen ist, dass ihm das Ergebnis von ‚8+8‘ bereits bekannt war.

Im *Mai* sagte Achim auf Anhieb, dass er das Ergebnis zwar nicht kenne, aber wisse, dass ‚9·9=81‘ sei. Den entsprechenden Zahlensatz notierte er dann auf Bitten des Interviewers. Dessen Frage allerdings, ob er damit auch das Ergebnis der ursprünglichen Aufgabe ermitteln könne, verneinte er. Statt dessen notierte er die Achterreihe bis zu deren neuntem Glied, wobei er die Ergebnisse jeweils durch Weiterzählen ermittelte. Außerdem verwendete er Merkzahlen – wie bereits schon im März. Zum Schluss vermerkte er den Zahlensatz ‚8·9=72‘ neben der eingangs notierten Quadratzahlaufgabe. Achim hatte während des Interviews zwar eine vage Idee, es müsse eine Beziehung zwischen den beiden Aufgaben bestehen, benutzte diese jedoch nicht zur Ermittlung des Ergebnisses. Er war allerdings am Schluss in der Lage, den Zusammenhang zu verbalisieren („8·9=72', weil es ,9' weniger sind als ,81'").

Beim letzten Interview im *Juni* gab er zunächst die Lösung ,8·9=73' an und notierte anschließend hinter einem senkrechten Strich seinen Rechenweg: ,9·9' sei ,81'; davon müssten noch ,8' subtrahiert werden. Zwar erhielt er erstmals nicht die korrekte Lösung, doch zeugt sein Vorgehen von seinem wachsenden Bemühen, geschicktere Rechenwege einzuschlagen, und ist somit positiv zu beurteilen.

Marc-André und die Bonbonaufgabe

Nun zu Marc-Andrés Rechenwegen bei der Bonbonaufgabe: Im ersten Interview, das im Januar geführt wurde, notierte er ausführliche Zahlensätze zur Subtraktion. Diese sollten ausdrücken, dass er jedem Kind in einem ersten Schritt *vier* (erste Zeile), dann *zwei* und schließlich nochmals *zwei* Bonbons zuteilte (zweite und dritte Zeile). Er bildete also drei Teilmengen und ermittelte, wie viele Elemente diese jeweils hatten. Dieses Vorgehen können wir als *verteilnahes* Rechnen oder *Aufsplitten* bezeichnen.

In den beiden folgenden Interviews änderte sich seine Vorgehensweise: Nun bildete er Teilmengen der Mächtigkeit 3 und stellte fest, wie viele Teilmengen er auf diese Weise erhielt. Hierbei können wir von einer *aufteilnahen* Strategie oder vom *Bündeln* sprechen (vgl. Kap. 2.4). Allerdings lässt das bloße Schreibprodukt diesen Schluss nicht unmittelbar zu, denn genauso gut hätte Marc-André in jedem Schritt jedem Kind ein Bonbon geben und somit drei Teilmengen sukzessiv entstehen lassen können. Wie eine nähere Analyse der Interviewszene jedoch zeigte, hatte er die Aufgabe in der Tat weitgehend kontextgelöst durch die Bildung von 3er-Teilmengen gelöst.

Ein Unterschied zwischen beiden Interviews soll nicht unerwähnt bleiben: Im März löste Marc-André die Bonbonaufgabe mit Hilfe seiner begleitend entstehenden Aufzeichnungen additiv (,0+3=3; 6; 9; …') und verkürzte die symbolische Notation nach dem ersten Schritt. Im *April* hingegen bewältigte er das Problem subtrahierend, wobei er unterhalb des Striches sein Vorgehen im nachhinein dokumentierte.

In den letzten beiden Interviews ermittelte er dann die Resultate nicht länger mit Hilfe der Addition oder der Subtraktion, sondern durch Anbindung an die entsprechenden Zahlensätze der Multiplikation (24:3=8, weil 8·3=24). Allerdings bildete er im Mai nicht direkt die Umkehraufgabe ,8·3'. Zunächst sagte er, dass 21 Bonbons verteilt worden seien, wenn jedes Kind sieben bekommen habe; daher müsse man jeder Person noch eins geben (,7·3=21+1+1+1=24').

Marc-André und 8·9

Abschließend kommentieren wir Marc-Andrés Vorgehensweisen bei der Aufgabe ,8·9'. Im März addierte er die ,8' insgesamt elfmal, vermutlich weil er den Überblick über die Anzahl der bereits berücksichtigten Summanden verloren hatte. Er schrieb folgerichtig ,88' hin und betonte, dass er eigentlich nicht ,8·9', sondern ,9·8' gerechnet habe, was aber – so Marc-André – nicht von Belang gewesen sei.

Im *April* und im *Mai* machte er expliziten Gebrauch von Rechenstrategien, die er selbst entwickelt hatte: Er berechnete jeweils zunächst im Kopf die richtige Antwort, notierte diese und schrieb dann auf Nachfrage den jeweiligen Rechenweg auf, bei dem er sich jeweils die Stützpunktaufgabe ,9·9' zunutze gemacht hatte. Im *Juni* schließlich hatte er die Antwort dann auswendig parat.