Flexibles Rechnen

Ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts – nicht nur in der Grundschule – besteht darin, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, Rechenanforderungen mit einem gewissen Maß an *Flexibilität* zu bewältigen. Mit Blick auf diese Zielsetzung werde ich in diesem Beitrag zunächst auf die Hauptmethoden des Rechnens (schriftlich, halbschriftlich, mündlich) sowie im zweiten Abschnitt auf verschiedene Strategien des halbschriftlichen bzw. mündlichen Rechnens eingehen. Im Einzelnen stelle ich jeweils *Forschungsergebnisse* dar, formuliere *Leitideen* für die unterrichtliche Behandlung und beschreibe ein *Unterrichtsbeispiel*.

1 Methoden des Rechnens

Bekanntlich unterscheidet man zwischen *mündlichem* Rechnen, bei dem sämtliche Schritte zur Lösung einer Aufgabe ohne Notation erfolgen, *halbschriftlichem* Rechnen, bei dem die Teilrechnungen aufgeschrieben, sowie *schriftlichem* Rechnen, bei dem die Ergebnisse nach festgelegten Regeln (Algorithmen) ziffernweise ermittelt werden. Alle drei Methoden haben ihre Vor- und Nachteile. Schülerinnen und Schüler sollten im Verlauf der Grundschulzeit lernen, sie abhängig vom Zahlenmaterial, aber auch von eigenen Präferenzen *flexibel* einsetzen zu können. Im Folgenden berichte ich über Resultate von Untersuchungen, die Beiträge zur Beantwortung der Frage liefern, inwieweit diese Zielsetzung tatsächlich erreicht wird.

1.1 Forschungsergebnisse

In einem schriftlichen Test wurden rund 300 Schülerinnen und Schülern mehrfach Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000 vorgelegt: im Februar des dritten Schuljahres vor der Einführung der schriftlichen Rechenverfahren, im Juni unmittelbar nach deren Behandlung sowie zu Beginn des vierten Schuljahres (vgl. Selter 2000). Die zwölf Aufgaben waren so ausgewählt, dass bei acht von ihnen eine Kopfrechenlösung trotz der Größe der Zahlen gut möglich war.

Rechenmethoden bei der Aufgabe 701–698: Unter anderem wurde festgehalten, wie viel Prozent der Kinder mündlich, halbschriftlich bzw. schriftlich rechneten oder eine Mischform dieser Methoden anwendeten, also z. B. einen Teil der Aufgabe mündlich und den Rest mit Hilfe des schriftlichen Standardverfahrens bearbeiteten.

Eine der Aufgaben lautete 701–698. Hier würde man sich eigentlich wünschen, dass viele Schülerinnen und Schüler im Kopf durch Ergänzen von 698 zu 701 (oder von 701 zu 698) zur Lösung kommen würden. Es ergab sich allerdings eine andere Verteilung.

	Kopfrechnen	halbschriftlich	schriftlich	Mischformen
Februar	52,9 %	35,2 %	6,5 %	5,4 %
Juni	29,1 %	6,0 %	61,9 %	3,0 %
Oktober	33,1 %	8,6 %	53,4 %	4,9 %

Die Aufgabe 701-698 wurde nach der Einführung des schriftlichen Normalverfahrens im 3. Schuljahr von mehr als 60% und zu Beginn des 4. Schuljahres von 53 % der Kinder mit Hilfe des schriftlichen Algorithmus gelöst. Auch bei den anderen Aufgaben neigten die Schülerinnen und Schüler dazu, das schriftliche Normalverfahren anzuwenden – auch wenn eine Kopfrechenlösung gut möglich erschien.

Offensichtlich tragen die schriftlichen Normalverfahren außerdem dazu bei, dass das Vertrauen der Schüler(innen) in ihre mündlichen Rechenkompetenzen schwindet. Ein Beispiel dafür ist Malte, der schriftlich das falsche Resultat 197 erzielte und dann noch einmal mündlich nachrechnete und als Ergebnis 3 erzielte, ist hier aufschlussreich: Als er gefragt wurde, welche seiner beiden Antworten korrekt sei, entschied er sich für 197, weil er dabei "richtig gerechnet", während er sich das Resultat 3 "nur hopp-di-hopp im Kopf überlegt" habe (vgl. Spiegel & Selter 2003, 24f.).

In die gleiche Richtung gehen auch die Ergebnisse der Amerikaner Davis & McKnight (1980), die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe 7002–25 sowohl im Kopf als auch schriftlich rechnen ließen. Dann gaben sie denjenigen Schüler(inne)n, die im Kopf *richtig* und schriftlich *falsch* gerechnet haben, die Information, genau eines ihrer Resultate sei fehlerhaft. Nahezu ohne Ausnahme gaben die Kinder an, dabei müsse es sich um die Kopfrechenlösung handeln.

Einfluss des Unterrichts: Bei diesen etwas ernüchternden Ergebnissen sollte nicht außer Acht gelassen werden, dass natürlich sowohl der Unterricht als auch das soziale Umfeld einen nicht geringen 'Einfluss' auf das Verhalten der Kinder haben. Wenn diese die schriftlichen Normalverfahren hier wie dort als 'Krönung' des Rechenunterrichts kennenlernen, dann werden sie verständlicherweise dazu neigen, diese auch anzuwenden. Wenn sie aber die Strategien des mündlichen bzw. des halbschriftlichen Rechnens als prinzipiell gleichberechtigte Lösungsmethoden erfahren, denen auch nach der Einführung der Normalverfahren angemessen viel Zeit zukommt, können die Lösungswege der Schülerinnen und Schüler sich durchaus anders verteilen.

Das zeigt eine Untersuchung, bei der rund 100 niederländische und 100 deutsche Kinder am Ende des 4. Schuljahres die Aufgabe *Eine Farbdose kostet 4,95 Gulden (DM). Wie viel kosten 7 Dosen?* bearbeiteten (Selter 1999a). Der Anteil korrekter Lösungen in den Niederlanden (62 %) und in Deutschland (64 %) war in etwa vergleichbar. Deutliche Unterschiede ergaben sich allerdings bei den Vorgehensweisen.

	Deutschland	Niederlande
schriftliche Addition	15 %	18 %
schriftliche Multiplikation	57 %	6 %
35 – 0,35 ('geschickt')	0 %	10 %
Kopfrechnen	15 %	52 %

Die schriftliche Addition und die schriftliche Multiplikation waren in beiden Ländern behandelt worden. Die niederländischen Kinder wendeten die schriftliche Multiplikation jedoch so gut wie gar nicht an und rechneten im Gegenzug viel häufiger im Kopf bzw. nutzten eine geschickte halbschriftliche Strategie (35-0,35).

Vor dem Hintergrund der Unterrichtsrealität in unserem Nachbarland überraschen diese Resultate nicht: Die schriftlichen Verfahren werden dort weniger ausführlich behandelt, als es in Deutschland der Fall ist, dafür werden das mündliche und das halbschriftliche Rechnen als zentrale Unterrichtsinhalte kontinuierlich gepflegt (vgl. van den Heuvel-Panhuizen 2001).

1.2 Leitideen für den Unterricht

In Übereinstimmung mit diesen Forschungsergebnissen und mit den Beiträgen etwa von Krauthausen (1993), Selter (1999) oder Wittmann (1999) möchte ich die folgenden Leitideen formulieren.

- Das *mündliche* und *das halbschriftliche Rechnen* werden sowohl für lebensweltliche Erfordernisse als auch für den weiterführenden Mathematikunterricht als *zentrale Rechenmethoden* angesehen. Die Normalverfahren des schriftlichen Rechnens sind nach wie vor bedeutsam, ihre Beherrschung gilt allerdings nicht als Krönung des Unterrichts. Verständnis ist dabei genauso wichtig wie Sicherheit.
- Als echte Konkurrenz für das schriftliche Rechnen und seine Ökonomie wird neben dem mündlichen (keine Notizen, hoher Merkaufwand) und dem halbschriftlichen Rechnen (vollständige Notation der Rechenwege, hoher Schreibaufwand) eine *informelle Arithmetik* etabliert, bei der lediglich Zwischenergebnisse oder Teilrechnungen notiert werden.
- Die Schüler(innen) werden zum Nachdenken über die Eignung der Methoden für bestimmte Rechenanforderungen angeregt. Neben 'objektiven' Kriterien – wie Zahlbeziehungen oder Zahlengröße – sind dabei auch 'subjektive' Kriterien relevant – wie individuelle Präferenzen oder Lernmöglichkeiten.

1.3 Unterrichtsbeispiel **Im Kopf oder schriftlich?**

Die kurze Beschreibung eines Unterrichtsbeispiels soll das bisher Ausgeführte ausschnitthaft illustrieren. Bei dem folgenden, schwerpunktmäßig auf die dritte Leitidee bezogenen Unterrichtsbeispiel sollten die Kinder entscheiden, *welche* Aufgaben sie *warum* mündlich bzw. schriftlich rechneten.

Zunächst wurden den Kindern folgende fünf Aufgaben zur Addition im Zahlenraum bis 1000 präsentiert.

1) 278+199 2) 340+250 3) 280+200 4) 138+133 5) 721+247

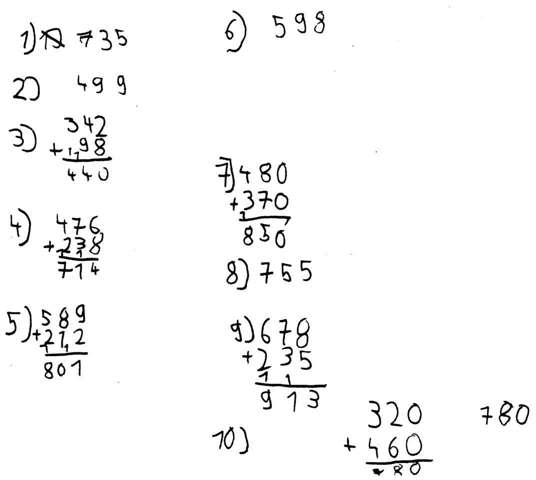
Die Schülerinnen und Schüler sollten im Unterrichtsgespräch für sich begründet bzw. für andere nachvollziehbar entscheiden, welche der folgenden Aufgaben sie im Kopf bzw. schriftlich rechnen würden. Kriterien, die hier genannt wurden, waren Nullen an der Einer- bzw. der Zehnerstelle ("glatte Zahlen"), die Anzahl der Überträge oder die Nähe zu einer 'glatten Zahl'.

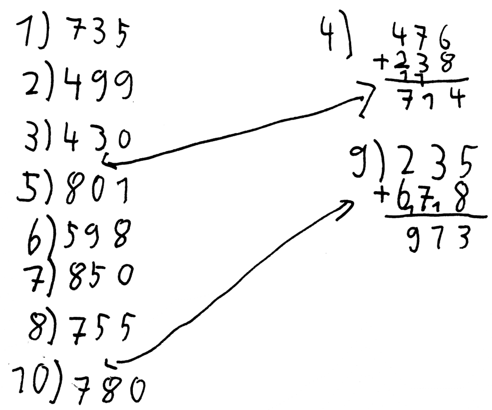
Entscheide selbst: im Kopf oder schriftlich?

Dann erhielten die Schülerinnen und Schüler zehn weitere Aufgaben, die sie allein oder in Partnerarbeit lösten. Sie sollten dabei jeweils entscheiden, ob sie schriftlich oder mündlich rechneten. Da manche Kinder dazu neigten, sämtliche Aufgaben entweder so oder so zu rechnen, gab es eine Zusatzbedingung: Jeweils mindestens zwei Aufgaben waren im Kopf bzw. schriftlich zu rechnen.

1) 700+ 35 2) 249+250 3) 342+ 98 4) 476+238 5) 589+212
6) 500+ 98 7) 480+370 8) 720+ 35 9) 235+678 10) 320+460

Dabei ergaben sich erwartungsgemäß unterschiedliche Verteilungen: Kinder, die jeweils die Hälfte der Aufgaben mit einer Methode lösten, solche, die fast alles schriftlich, aber auch solche, die nahezu alles im Kopf rechneten.

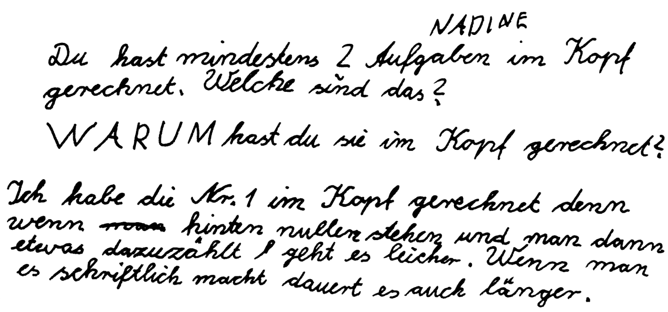


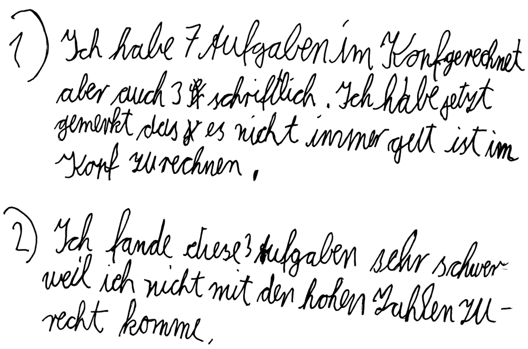


Warum im Kopf, warum schriftlich?

Die Schülerinnen und Schüler wurden auch gebeten, aufzuschreiben, warum sie welche Aufgaben mit welcher Methode gerechnet hatten. Die beiden Kommentare von Nadine und Victor verdeutlichen, dass einige Kinder eher global antworteten, während andere schon recht differenzierte Aufgabenkriterien als Entscheidungsgrundlage benannten.

Selbstverständlich wäre es auch möglich gewesen, die Kinder diese Äußerungen vollständig oder auch teilweise mündlich machen zu lassen, denn es geht im Unterricht ja sowohl um die Schulung der mündlichen als auch der schriftlichen Ausdrucksfähigkeit.





Stelle deine Arbeit vor

Im Anschluss an die Phase der Einzel- bzw. Partnerarbeit präsentieren und diskutieren die Schülerinnen und Schüler ihre Vorgehensweisen und ihre Texte in kleineren Gruppen. Ausgewählte Aspekte wurden danach auch im Klassenverband besprochen.

Erfinde eigene Aufgaben

Abschließend sollten die Kinder fünf Aufgaben, die sich gut für das Kopfrechnen, und fünf weitere, die sich gut für das schriftliche Rechnen eignen, erfinden. Diese Eigenproduktionen erforderten noch einmal aus einer anderen Perspektive das Nachdenken über Aufgabenmerkmale, aber auch über eigene Präferenzen.

im Kopf

1) 200 + 300 = 500
2) 401 + 37 = 438
3) 150 + 140 = 290
4) 127 + 700 = 827
5) 150 + 149 = 299

schriftlich

1) 237 + 588 = 825
2) 478 + 478 = 956
3) 483 + 216 = 699
4) 421 + 358 + 107 = 886
5) 153 + 264 = 417

2 *Strategien des Rechnens*

Nicht nur die bewusste oder intuitive Entscheidung für eine Rechenmethode, sondern auch die Auswahl einer geeigneten Strategie des mündlichen oder halbschriftlichen Rechnens gehört zum flexiblen Rechnen. Am Beispiel unserer Aufgabe 701–698 sollen die Hauptstrategien illustriert werden. Varianten dieser Strategien sind ebenso möglich wie weitere Mischformen.

Stellenweise	Schrittweise	Stellen- & Schrittweise	Ergänzen	Hilfsaufgabe	Vereinfachen
Hunderter (H), Zehner (Z) und Einer (E) werden getrennt voneinander subtrahiert.	Vom Minuenden werden nacheinander H, Z und E des Subtrahenden subtrahiert.	Zuerst H minus H, dann werden schrittweise Z und E des Minuenden addiert bzw. des Subtrahenden subtrahiert.	Der Unterschied zwischen Subtrahend und Minuend wird ergänzend ermittelt.	Eine leichtere Aufgabe wird herangezogen, anschließend erfolgt der notwendige Ausgleich.	Zu Minuend und Subtrahend wird die gleiche Zahl addiert bzw. von ihnen subtrahiert
700-600=100 0- 90=(-)90 1- 8=(-)7 100-90-7=3	701-600=101 101- 90= 11 11- 8= 3	700-600=100 100+ 1=101 101- 90= 11 11- 8= 3	698+ 2=700 700+ 1=701	701-700= 1 1+ 2= 3	703-700= 3

Die ersten drei Strategien eignen sich für jede Minusaufgabe, während die anderen drei sinnvoller Weise nur verwendet werden, wenn das Zahlenmaterial dieses hergibt. Eine *Hilfsaufgabe* oder die Strategie des *Vereinfachens* zu verwenden, bietet sich nur an, wenn eine der beiden Zahlen in der Nähe einer 'glatten' Zahl liegt. Das Ergänzen scheint dann sinnvoll zu sein, wenn Minuend und Subtrahend nahe beieinander liegen – wie es bei 701-698 der Fall ist. Jedoch: Haben die Schülerinnen und Schüler hier in der überwiegenden Zahl ergänzt?

2.1 Forschungsergebnisse

Eine erste Antwort auf diese Frage gibt eine Teiluntersuchung im Rahmen des eingangs erwähnten Forschungsprojekts.

Rechenstrategien bei der Aufgabe 701–698: Hier wurden 36 der 300 Schülerinnen und Schüler, die die Aufgaben im Rahmen des Tests bearbeitet hatten, zusätzlich noch in Einzelinterviews zu ihren Vorgehensweisen befragt. Vor der Einführung der schriftlichen Normalverfahren im Februar rechneten 27 von ihnen die Aufgabe 701-698 mündlich oder halbschriftlich. Keines dieser Kinder löste sie allerdings durch Ergänzen.

Bevorzugte Strategien waren hingegen das *schrittweise* (14 Kinder) und das *stellenweise* Rechnen (8 Kinder) sowie die Mischform aus beidem (5 Kinder). Bei den folgenden beiden Untersuchungszeitpunkten im Juni und im Oktober rechneten zwar weniger Kinder mündlich oder halbschriftlich – an der vergleichsweisen Dominanz der Hauptstrategien änderte sich jedoch nichts.

Diese Tendenz wird auch durch die Auswertung der vorliegenden halbschriftlichen Lösungen im Rahmen des Tests bestätigt. Über die mündlichen Strategien, die hier gewählt wurden, liegen verständlicher Weise keine gesicherten Informationen vor. Es ist jedoch eine durchaus plausible Hypothese, dass die in den Interviews zu beobachtende Verteilung ebenfalls festzustellen gewesen wäre.

Außerdem wurden die Vorgehensweisen bei den ebenfalls – aus Erwachsenensicht – 'geschickt' lösbaren Aufgaben 610–590, 845–399 und 649–347 analysiert. Dabei bearbeiteten 17 der 27 Kinder alle vier Aufgaben mit derselben Strategie (8 *schrittweise*, 8 *stellenweise*, 1 *Mischform*). Sechs weitere Kinder verwendeten bei drei der vier Aufgaben ihre Hauptstrategie. 'Geschickte' Rechenwege waren hingegen äußerst selten zu beobachten.

Interessanter Weise war im Unterricht aller beteiligten Klassen nur das *schrittweise* Rechnen, nicht aber die anderen Strategien behandelt worden. Das erklärt möglicher Weise die Nichtanwendung der Strategien *Ergänzen* und *Hilfsaufgabe*, nicht aber den häufigen Einsatz von *Stellenweise* und der *Mischform*.

Einfluss der Lernumgebung: Die Vorgehensweisen der Kinder andererseits vom bisherigen Lernangebot nicht unabhängig, wie das folgende Beispiel illustriert. In einer weiteren Untersuchung wurden mit 60 Viertklässlern aus 10 verschiedenen Klassen die Vorgehensweisen *Hilfsaufgabe* (bei 353+299 bzw. 217+698) und *Ergänzen* (bei 802–798 bzw. 310–290) in Einzelinterviews thematisiert (Pregler 2002). Dann wurden den Schülerinnen und Schülern weitere Aufgaben vorgelegt, die sich für diese Strategien unterschiedlich gut eigneten. Die Tabelle gibt wieder, wie viele Kinder die behandelte Strategie bzw. eine andere Vorgehensweise anwendeten und dabei ein richtiges (+) bzw. falsches Resultat (–) erzielten.

	572+299	354+516	**398+227**	**701–698**	792–217	**603–498**
Strat., +	51	1	17	59	7	30
Strat., –	5	0	2	1	2	8
anders, +	3	54	30	0	40	19
anders, –	1	5	11	0	11	3

Die Auseinandersetzung mit den beiden Strategien führte zumindest kurzfristig dazu, dass die Kinder diese bei 572+299 bzw. 701–698 in großer Zahl erfolgreich nutzten und bei 'ungeeigneten' Aufgaben kaum einsetzten. Die Übertragung auf ähnliche Fälle (398+227 bzw. 603–498) fand allerdings nur in eingeschränkterem Maße statt.

2.2 Leitideen für den Unterricht

In Übereinstimmung mit diesen Forschungsresultaten sowie den Beiträgen etwa von Klein (1998), Radatz u. a. (1999, 73 ff.) oder Schütte (2001) möchte ich folgende Leitideen formulieren.

- Da nicht wenige Kinder zur durchgängigen Anwendung ihrer persönlichen Rechenstrategie neigen, werden *verschiedene Hauptstrategien* im Unterricht *behandelt*. Hierbei sind auch solche Strategien einzubeziehen, die im gängigen Unterricht oft nicht vorkommen, jedoch von nicht wenigen Kindern trotzdem verwendet werden – wie die Mischform *Stellen-/Schrittweise* oder *Stellenweise* bei der Subtraktion.

- Für viele Kinder sind die nicht selbst entwickelten Strategien keineswegs selbst erklärend, sondern stellen potenziell neuen Lernstoff dar. Ihre gleichermaßen behutsame wie gründliche Behandlung bedarf daher eines hinreichenden Maßes an Unterrichtszeit.
- Anhand von geeigneten Aufgaben wird über *Besonderheiten* der verschiedenen *Rechenstrategien* und ihre objektive bzw. subjektive Angemessenheit reflektiert. Zentral ist hierbei die Entwicklung eines 'Zahlenblicks'.

2.3 Unterrichtsbeispiel Evas Rechentrick

Bei diesem schwerpunktmäßig auf die dritte Leitidee bezogenen Unterrichtsbeispiel sollten die Schülerinnen und Schüler die Strategie *Hilfsaufgabe* bei der Addition kennenlernen und bei geeigneten Aufgaben anwenden. Es macht m. E. Sinn, mit den Kindern pro Unterrichtsstunde nicht mehr als eine (für die meisten) neue Strategie zu thematisieren, da sie in der Regel Zeit brauchen, um genügend Beispiele rechnen und über diese nachdenken zu können.

Wie rechnest du?

Zunächst stellten die Kinder eigene Rechenwege für die Aufgabe 328+499 vor. Wie erwartet, verwendeten sie die drei Hauptstrategien. Die Strategie Hilfsaufgabe tauchte nicht auf.

328+499 = 700 + 110 + 17 = 827
300 + 400 = 700
20 + 90 = 110
8 + 9 = 17

328+499 = 827
728+90
818+9

328+499 = 827
700 + 28 = 728
728 + 99 = 827

Eva rechnet so!

Der Rechenweg eines fiktiven Kindes wurde besprochen (328+500; –1). Ich empfehle – auch wenn Schülerinnen und Schüler dieser Klasse diese Lösung bereits angegeben hätten –bei der Bezeichnung Evas Rechentrick zu bleiben. Denn manche Kinder, deren Name der Trick dann trägt, neigen dazu, jede Aufgabe auf diese Weise zu rechnen, auch wenn diese zur Anwendung der Hilfsaufgaben-Strategie nicht geeignet zu sein scheint (278+437 wird gelöst durch 278+500; –63).

Eva rechnet nicht immer so!

Den Kindern wurden fünf Aufgaben präsentiert, bei denen die Anwendung von Evas Trick unterschiedlich sinnvoll war.

1) 215+599 2) 422+371 3) 198+576 4) 174+677 5) 453+297

Einige Schülerinnen und Schüler benannten das Kriterium der Nähe zu 'glatten' Zahlen und gaben auch an, wie jeweils der Ausgleich des zu viel Addierten zu vollziehen sei.

Löse nur die Aufgaben, die du mit Evas Rechentrick leicht rechnen kannst!

Den Schülerinnen und Schülern wurden daraufhin 22 Aufgaben vorgelegt, die sich in unterschiedlicher Weise zur Anwendung von Evas Trick eigneten (z. B. 447+499, 298+549, 438+325, 499+199). Sie sollten diejenigen Aufgaben ausrechnen, bei denen sich die Anwendung von Evas Trick lohnte, und ihren Rechenweg aufschreiben. Das diente in der Hauptsache dazu, dass die Vorgehensweisen für sich selbst und andere dokumentiert wurden und somit untereinander verglichen werden konnten. Mittelfristig wird natürlich der zunehmende Verzicht auf Notationen angestrebt.

Jedes Rechenpäckchen bestand aus 4 bzw. 5 Aufgaben. Die Schüler sollten insgesamt mindestens 8 Aufgaben mit Evas Trick lösen. Diese Rahmenbedingung sollte gewährleisten, dass die Kinder nicht pauschal sagten, keine der Aufgabe könne auf diese Weise angegangen werden. Alternativ wäre es möglich gewesen, die Anzahl der Aufgaben zu reduzieren und die einzelnen Aufgaben entweder – dort wo naheliegend – mit Evas Trick lösen zu lassen oder – wenn dieses nicht sinnvoll erschien – einen anderen Lösungsweg einzuschlagen.

Schreibe auf, wie du mit Evas Trick gerechnet hast.

Um die Schülerinnen und Schüler zum (weiteren) Nachdenken über diese Vorgehensweise anzuregen, wurden sie gebeten, einen kurzen Text darüber zu verfassen, wie sie vorgegangen waren. Diese Texte stellten die Kinder sich dann gegenseitig vor. Diejenigen von ihnen, die Schwierigkeiten hatten, einen Text zu verfassen, stellten ihre Überlegungen (zum Teil) mündlich dar.

Schreibe auf, wie du mit Evas Rechentrick gerechnet hast:

Ich rechne 499 + 337, so ist es aber etwas zu schwer denn wegen einer Zahl mache ich es mir nicht so schwer ich rechne deshalb

500 + 337 = 837 aber weil ich davor eine Zahl dazu gerechnet habe muss ich diese nun wieder abziehen. Deshalb rechne ich:
500 + 337 = 837 so habe ich das gleiche ergebnis wie
837 − 1 = 836 499 + 337 = 836.

Erfinde selbst mindestens 5 Aufgaben, die mit Evas Rechentrick leicht zu lösen

Erfinde fünf Aufgaben, die du mit Evas Trick leicht (nicht so gut) lösen kannst.

Abschließend sollten die Kinder jeweils Aufgaben erfinden, die zur Anwendung des Tricks gut bzw. nicht so gut geeignet waren. So wurden sie noch einmal dazu angeregt, über dessen Besonderheiten nachzudenken.

Erfinde selbst mindestens 5 Aufgaben, die mit Evas Rechentrick leicht zu lösen sind und rechne:

499 + 272 = 771
500 + 272 = ~~773~~ 772
772 − 1 = 771

599 + 127 = 726
600 + 127 = 727
727 − 1 = 726

299 + 719 = 1018
300 + 719 = 1019
1019 − 1018

199 + 219 =
200 + 219 = 419
419 − 1 = 478

199 + 578 = 777
200 + 578 = 778
778 − 1 = 777

Erfinde mindestens 5 Aufgaben, die sich mit Evas Rechentrick nicht so gut lösen lassen:

127 + 127 =

379 + 707

479 + 329 =

3 Schlussbemerkungen

Die Schulung des flexiblen Rechnens bedarf – wie die beiden Unterrichtsbeispiele illustrieren – zweifelsohne von Zeit zu Zeit der individuellen und der gemeinsamen Reflexion über die eigenen und andere mögliche Rechenwege. Genauso wichtig wie das Nachdenken *über* ist aber auch die regelmäßige Übung *im* flexiblen Rechnen, um schließlich über das richtige Mischungsverhältnis von *Reflexion* und *Routine* verfügen zu können.

Notwendig für solches flexibles Rechnen sind zweifelsohne unmittelbar abrufbare Kenntnisse (wie die Aufgaben des Einspluseins) und schnell ausführbare Fertigkeiten (wie das Ergänzen zur nächsten Stufenzahl), die auf anschauungsgestützten Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen aufbauen (vgl. auch Müller & Wittmann 1997-99).

Das bedeutet allerdings nicht, dass flexibles Rechnen erst am Ende der Grundschulzeit angestrebt werden solle. Die Entwicklung des *flexiblen* und des *schnellen* Rechnens müssen vom 1. Schuljahr an Hand in Hand gehen.

Anmerkung

Bei diesem Papier handelt es sich um das Manuskript für einen Hauptvortrag von Christoph Selter anlässlich der Bundestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik im Jahr 2003 in Dortmund.

Literatur

Davis, Robert & Curtis McKnight (1980): The Influence of Semantic Content on Algorithmic Behavior. In: Journal of Mathematical Behavior, H. 1, S. 39-87.

Heuvel-Panhuizen, Marja van den (2001; Hrsg.): Children learn mathematics. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school. Utrecht: Freudenthal Institute.

Klein, Anton S. (1998): Flexibilization of mental arithmetic skills on a different knowledge base. Utrecht: CD-ß-Press.

Krauthausen, Günter (1993): Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. In: Journal für Mathematikdidaktik, H. 3/4, S. 189-219.

Müller, Gerhard N. & Erich Ch. Wittmann (1997-99): Mündliches Rechnen in Kleingruppen. Der Förderkurs. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag.

Pregler, Nina (2002): Analyse der Vorgehensweisen von Viertklässlern bei Aufgaben zum additiven Rechnen im Tausenderraum unter besonderer Berücksichtigung der Strategien ‚Hilfsaufgabe' und ‚Ergänzen'. Wissenschaftliche Hausarbeit. Heidelberg: Pädagogische Hochschule.

Radatz, Hendrik u. a. (1999): Handbuch für den Mathematikunterricht. 3. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Schütte, Sybille (2001): Von Musterlösungen über eigene Wege zum flexiblen Rechnen. Beobachtungen in einem 3. Schuljahr. In: Gabriele Kaiser (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2001, S. 556-559.

Selter, Christoph (1999): Flexibles Rechnen statt Normierung auf Normalverfahren! In: Die Grundschulzeitschrift, H. 125, S. 6-11.

Selter, Christoph (1999a): Mehr Offenheit bei schriftlichen Tests. In: Sache-Wort-Zahl, H. 25, S. 41-46.

Selter, Christoph (2000): Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. In: Journal für Mathematik-Didaktik, H. 3/4, S. 227-258.

Spiegel, Hartmut & Christoph Selter (2003): Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten. Seelze: Kallmeyer.

Wittmann, Erich Ch. (1999): Die Zukunft des Rechnens im Grundschulunterricht: Von schriftlichen Rechenverfahren zu halbschriftlichen Strategien. In: Elmar Hengartner (Hrsg.): Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht. Zug: Klett und Balmer, S. 88-93.