



Sachinfo Modul 3.2:

„Mathe in den Kopf?!“ – Wie geht das eigentlich?

Ziel des heutigen Mathematikunterrichts in der Grundschule ist, dass jedes Kind sicher Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren lernt. Dabei muss jeder Schüler die Zeit und die Möglichkeit erhalten, eine tragfähige Zahl- und Operationsvorstellung aufzubauen. Beide bilden die Grundlage, um später flexibel rechnen zu können.

Zahlvorstellung entwickeln heißt:

- **Beziehungen** zwischen Zahlen kennen: Positionen von Zahlen richtig bestimmen können, Vorgänger, Nachfolger, Nachbarzehner kennen.
- **Bedeutung** von Zahlen kennen: Zahlen richtig lesen können, wissen, dass sich z.B. die Zahl 12 aus einem Zehner und zwei Einern zusammensetzt.

Operationsvorstellung z.B. für die Addition entwickeln heißt:

- Wissen, was das „Plus“ in unterschiedlichen Kontexten bedeuten kann: *dazutun, dazukommen, auftauchen, hinzukaufen, einfüllen, anzünden, aufkleben, herzaubern, dazulegen, geschenkt bekommen,...*
- Sowohl eine Vorstellung des **Hinzufügens** als auch eine Vorstellung des **Zusammenfügens** entwickeln.

Bei der Frage wie die Mathematik eigentlich in die Köpfe der Kinder kommt, geht es im Wesentlichen um die Überlegung, wie sich Vorstellungsbilder von mathematischen Mustern und Strukturen in den Köpfen aufbauen können, damit jedes Kind am Ende flexibel im Kopf rechnen kann.

Lernen durch Handeln

„Seit Jahrhunderten ist man sich in der Mathematikdidaktik einig, dass Kinder günstigerweise durch Handlungen lernen“ (Lorenz 2011, S. 39).

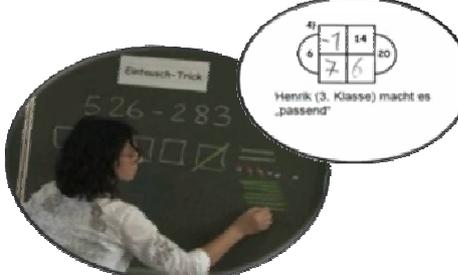
Wie sehen aber solche Handlungen genau aus? Worauf sollte im Mathematikunterricht geachtet werden, damit jedes Kind die Chance hat, am Ende flexibel Rechnen zu können? Diese Fragen sollen im Folgenden genauer betrachtet werden.

Im Laufe der vergangenen Jahrhunderte wurden verschiedene **Darstellungsmittel** erfunden, mit deren Hilfe mathematische Strukturen veranschaulicht werden sollten. Die Bilder, die mit einem Darstellungsmittel (didaktischem Material) erzeugt werden, sollte ein Kind verinnerlichen, damit sie später zum Rechnen im Kopf abrufbar sind. Von „flexiblem Rechnen“ spricht man dann, wenn ein Kind im Kopf, ohne Hilfsmittel, sondern lediglich durch die in der Vorstellung entstandenen Bilder, rechnen kann.

Darstellungsformen und Darstellungsmittel

Mathematik kann also mithilfe von verschiedenen **Darstellungsmitteln** (didaktische Materialien, Alltagsmaterialien, Zeichnungen, Erklärungen und Begründungen) im Unterricht „begreifbar“ werden. Kinder sollen Darstellungsmittel so lange benutzen, bis sie in der Lage sind, geschickt im Kopf zu rechnen.

So genannte **Darstellungsformen** (Handlungen, Bilder, Symbole und Sprache) beschreiben unterschiedliche Möglichkeiten, in die Mathematik sozusagen „übersetzt“ werden kann. Einige Beispiele:

Darstellungs- Formen	Darstellungsmittel	Beispiele aus dem Unterricht
<p>Handlung (Handeln in Situationen und mit Material)</p>	<p>Handlungen werden z.B. ausgeführt zu Termen oder Gleichungen und zu Rechengeschichten.</p> <p>Hierzu werden unterschiedliche didaktische Materialien benutzt (z.B. 20er Feld und Plättchen, Rechenrahmen, ...). Handlungen können aber auch spielerisch dargestellt werden (Rollenspiel). Hier geht es nicht nur darum, selbst aktiv zu sein und das eigene Handeln zu beobachten und zu reflektieren. Es geht auch darum, passiv zu handeln. D.h., die Handlung anderer zu beobachten und nachzuvollziehen.</p>	
<p>Bild (Bilder malen und deuten)</p>	<p>Bilder werden selbst gemalt oder skizziert um</p> <ul style="list-style-type: none"> - einen den Sachverhalt einer Rechengeschichte darzustellen (z.B. in einer Kinderzeichnung), - Mengen, Terme und Gleichungen zu verdeutlichen (z.B. in Strichliste, Oehl'sche Darstellung, ...). <p>Umgekehrt werden Bilder auch gedeutet und Terme daraus abgelesen.</p>	
<p>Symbole („Mathesprache“ benutzen)</p>	<p>Mathematische Symbole (also Zahlen, Terme, Gleichungen, ...) werden genutzt, um Rechengeschichten, Bilder und Handlungen auszudrücken.</p> <p>Und umgekehrt werden Symbole entwickelt durch Handlungen, und Bilder.</p>	

<p>Sprache (Sprechen, Zuhören, Nachfragen, Erklären, Begründen)</p>	<p>Mithilfe von Sprache können z.B.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Rechengeschichten erzählt/ aufgeschrieben werden, - Sachverhalte und Rechenwege mündlich und/oder schriftlich erklärt werden - Begründungen und Beweise mündlich und/oder schriftlich beschrieben werden <p>Sprache bezieht sich für uns auf die Kommunikation miteinander sowie auf Erklärungen oder Rückfragen, die ich innerhalb meines individuellen Lernprozess entwickle. Mit der richtigen Sprache kann auf verschiedenen Ebenen die „Sache geklärt“ und der „Mensch gestärkt“ werden (vgl. von Hentig 1985).</p>	
--	--	---

Werden Kinder zu früh aufgefordert, sich beim Rechnen von Darstellungsmitteln zu lösen und im Kopf zu rechnen, wird ihnen die Chance genommen, mathematische „wenn-dann-Beziehungen“ und Operationen zu erforschen. Sie rechnen dann weiterhin oft „zählend“ und haben keine Vorstellung davon, was sie beim Rechnen eigentlich tun.

Kinder greifen dann gezwungenermaßen auf Darstellungsmittel zurück, die ihnen natürlich gegeben sind. Zum Beispiel auf ihre Finger oder andere Objekte, die sie bei sich haben wie z.B. Stifte in ihrem Mäppchen. Dabei spricht erst einmal nichts gegen das Fingerrechnen, denn ein geschickter Einsatz von Fingern kann Kindern helfen, sicher und schlau zu rechnen. Unreflektiert verführen die Finger oft zum zählenden Rechnen, was häufig auch sehr fehleranfällig ist.

„Langfristig nämlich werden sich Erfolge nur einstellen, wenn Arbeitsmittel und Veranschaulichungen bewusst ausgewählt und eingesetzt werden und sie den Kindern so lange wie nötig zur Verfügung stehen“ (Scherer 1999, 23).

Mathematik erleben und Darstellungswechsel forcieren

In dem Prozess der Aneignung mathematischer Bilder ist es von zentraler Bedeutung, **Darstellungswechsel** zu forcieren. Erst dadurch wird Mathematik erlebbar. D.h. die Schülerinnen und Schüler sollen immer wieder aufgefordert werden, zwischen verschiedenen Darstellungsformen und –mitteln hin und her zu „übersetzen“, damit ein mathematisches Muster z. B. einen lebensweltlichen Bezug und somit einen „Sinn“ für die Kinder bekommt.

Anhand der Fotos oben sieht man, dass solche „Übersetzungen“ beim gemeinsamen Lernen oft ganz automatisch passieren. In einer Partnerarbeit z.B. vermischen sich fast alle Darstellungsformen miteinander, da Kinder sich austauschen (Sprache), ihre Lösungen notieren (Symbol und Bild) und evt. didaktisches Material zur Vorstellung oder zum Überprüfen der Lösung benutzen (Handlung am Material). Umso wichtiger ist es, über diese Handlungsabläufe und individuellen Denkprozesse zu kommunizieren. „Gerade das bildliche und sprachliche Darstellen von mathematischen Beziehungen hilft dahinter liegende Vorstellungen bewusst(er), sichtbar und kommunizierbar zu machen, mögliche

Fehlvorstellungen aufzudecken und neue Vorstellungen in das eigene Wissensnetz einzubauen“ (Kuhnke 2012, S. 7).

Darstellungswechsel werden im Unterricht häufiger auf der Ebene der Zahlvorstellung – vornehmlich in der Schuleingangsphase - vorgenommen. Weniger jedoch um Operationen zu verdeutlichen. Auch in Schulbüchern wird der Bereich Darstellungswechsel bei Operationen eher implizit thematisiert (vgl. Kuhnke, ebd.). Hier liegt ein großer Handlungsbedarf vor!

„Mathe in den Kopf?!“ – Ein Merkplakat

Das zum Thema „Mathe in den Kopf?!“ entwickelte Plakat versucht die recht abstrakten Begriffe und komplexen Zusammenhänge zu vereinfachen und mithilfe von Fotos aus dem Unterrichtsalltag zu konkretisieren.

Dabei stellen wir die Sprache („Sprechen“) in den Mittelpunkt des Lernprozesses. Die Sprache nimmt nicht nur im Hinblick auf die Vermittlung von fachlichen Inhalten eine wesentliche Rolle im Unterricht ein. Sie kann darüber hinaus ein Instrument sein, mit dem wir näher an die Köpfe der Kinder kommen.

„Das Kind entwickelt Strukturen im Kopf durch Nachdenken über Zahlbeziehungen, durch Reflexion. Aus diesem Grund wird im Unterricht und in der Förderung sinnvoller Weise die jeweilige Handlung unterbrochen, und das Kind ist aufgefordert, den Fortgang der Handlung und das Handlungsergebnis zu beschreiben und aufzumalen. Die Handlung wird von der Tischplatte in den Kopf verlegt, dort muss sie stattfinden. Dies mag ein schwieriges Unterfangen sein, aber die Erfahrung zeigt, dass Manipulation des Materials nur der Ausgangspunkt, nicht aber der Weg zum Zahlverständnis ist“ (Lorenz 2011, S. 42).



„Mathe in den Kopf?!“ - bei Kindern mit Rechenschwierigkeiten

Der beschriebene Lernprozess vom Beobachten, zum Handeln und Übersetzen mathematischer Sachverhalte in Bilder, Sprache und Symbole bis hin zum Verinnerlichen mathematischer Zusammenhänge, ist sehr individuell.

Warum einige Kinder diesen Prozess schneller durchlaufen und schon in sehr jungem Alter mathematische Vorstellungsbilder entwickelt haben, während andere Kinder große Schwierigkeiten haben, sich die Mathematik vorzustellen, kann nicht ganz beantwortet werden.

Das, was im Kopf des Kindes tatsächlich passiert, kann ein Außenstehender besser einschätzen, wenn er das Kind danach fragt, was es „im Kopf“ hat. Doch nicht selten ist das Beschreiben dessen, was da im Kopf ist schwierig genug in Worte zu fassen. Selbst wenn ein Kind genau beschreibt was es meint, umfasst diese Beschreibung unter Umständen nicht das, was es tatsächlich an Wissen in seinem Kopf abgespeichert, verinnerlicht hat.

Auch wenn eine Lehrperson ein didaktisches Material (z.B. das 20er Feld) sehr intensiv eingeführt hat, heißt es nicht, dass alle Schülerinnen und Schüler gleichermaßen geschickt damit umgehen können, bzw. es als hilfreich für den eigenen Erkenntnisprozess empfinden.

Für viele Lehrer scheint es ein Dilemma zu sein, nicht wirklich in den Kopf eines Kindes hineinschauen zu können, um genaue Information darüber zu erhalten, „wo das Kind gerade steht“ und „was“ es genau braucht.

An dieser Stelle wird deutlich, dass Lernen offensichtlich nicht nur sehr individuelle Wege nimmt, sondern aufmerksam und sensibel zu begleiten ist. Versucht eine Lehrperson mithilfe von Darstellungsmitteln stark an dem Aufbau von inneren Bildern zur Zahl- und Operationsvorstellung zu arbeiten, kann Rechenschwierigkeiten zumindest positiv entgegen gewirkt werden.

(Mathematik-) Lernen und Emotionen

Erinnert man sich an die Grundidee von Pestalozzi und seiner Forderung nach einem Lernprozess, in dem der Kopf, das Herz und die Hand gleichermaßen beteiligt sind, so scheint es neben der Hand und dem Kopf eine weitere ‚Ebene‘ zu geben, die vielleicht deshalb weniger Beachtung findet, weil sie so schwer greifbar ist.

Das Herz ist an dieser Stelle sicher eher bildlich zu betrachten und könnte umschrieben werden mit Begriffen wie „Emotion“, „Motivation“, „Lernfreude“ o. ä.

Die Hirnforschung zeigt in neueren Untersuchungen, wie maßgeblich die Emotionen zum Erfolg oder Misserfolg beim Lernen beitragen. Wer z. B. unter von Angst erzeugtem Stress lernt, hat langfristig Probleme damit, neu Gelerntes zu behalten und zu verinnerlichen (Spitzer: „Lernen“, S. 171f).

Kurzzeitiger Stress kann zwar punktuell zu verbessertem Lernen führen, langfristiger Stress verursacht jedoch aus neuropsychologischer Sicht, dass die Energiezufuhr von Neuronen im Hippokampus (aktivste Struktur im Zentralen Nervensystem) abnimmt. Das hat eine Leistungsminderung zu Folge, woraus sich zahlreiche Stresskrankheiten entwickeln können. Auf den Mathematikunterricht bezogen kann sich daraus folgende Situation entwickeln:

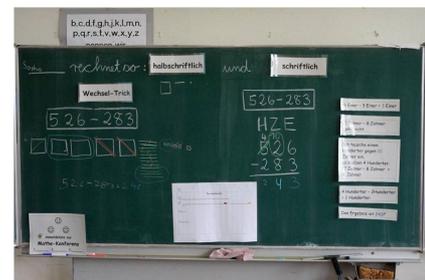
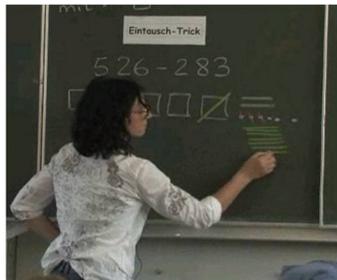
„Wer sich wenig zutraut, vertraut eher auf Mechanismen als auf eigenes Denken, und wird so immer abhängiger vom Denken anderer. Die mathematische Hilflosigkeit wächst und wächst. Das Zutrauen in die eigenen Lernmöglichkeiten wird dadurch immer geringer. Ein *Teufelskreis Versagen in Mathematik - Angst vor Mathematik* kann so entstehen“ (Spiegel/ Selter 2007, S. 64).

Darstellungsmittel - *nicht nur im Förderunterricht einsetzen!!!*

Mathematik ist darüber hinaus viel mehr als nur Rechnen. Mathematik ist genauso Entdecken, Begründen und Beschreiben. Das Kind soll z.B. Aufgaben des kleinen 1+1 nicht bloß auswendig lernen, sondern auch verstehen und begründen können, warum es so rechnet.

Wir plädieren daher deutlich für den Einsatz von Darstellungsmitteln für ALLE Kinder. Denn Darstellungsmittel sind mehr als nur Hilfsmittel zum Rechnen! Ihr Einsatz im Unterricht wird leider oft als **Zeichen von Lernschwäche** interpretiert („Die Plättchen können dir helfen!“). Und sie führt zuweilen zur **Abwertung** von erbrachten Leistungen („Du hast den Zahlenstrahl als Hilfe verwendet!“).

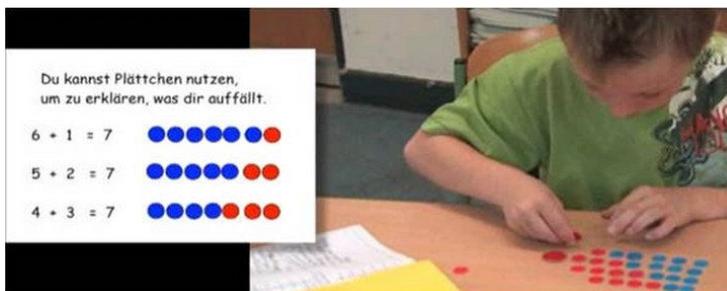
Mithilfe von Darstellungsmitteln können die Kinder aber eigene Rechenwege entwickeln und andere Rechenwege nachvollziehen. Mit Darstellungsmitteln lassen sich z.B. die schriftlichen Verfahren (s. Abb. zur Einführung der schriftl. Subtraktion) so einführen, dass sie für alle Kinder auf unterschiedlichen Ebenen erfahrbar werden und die einzelnen Schritte nicht nur auswendig gelernt werden.



Darüber hinaus dienen Darstellungsmittel zur Veranschaulichung mathematischer Strukturen. Sie können somit ein „**Instrument des Erkennens**“ sein.

Im heutigen Mathematikunterricht geht es nicht nur darum richtig zu rechnen, sondern darüber hinaus, mathematische Zusammenhänge zu entdecken, zu beschreiben und zu begründen. Auch hier kommen Darstellungsmittel zum Einsatz.

Ein Beispiel:



Mithilfe von Plättchen können Muster sichtbar gemacht werden. Die Plättchen helfen dem Kind zu erkennen, was in der Aufgabe genau passiert. Seine Beobachtung kann es dann auch vielleicht mit eigenen Worten

beschreiben.

Darstellungsmittel können auch als „**Instrument des Kommunizierens**“ fungieren.

Überall da wo Worte fehlen, wo Kinder Schwierigkeiten haben, sich anderen mitzuteilen, können sie die Gedanken der Kinder, die entdeckten Strukturen und Muster sichtbar machen und die Kinder dabei unterstützen, anderen ihre Entdeckungen und Erkenntnisse nachvollziehbar zu beschreiben.

Aber: Der Umgang mit ihnen muss gelernt werden!

Literatur

Kuhnke, Katharina: Unterrichtsanregungen zur Förderung des Darstellungswechsels. Am Beispiel der Multiplikation. Dortmund 2012 in H3-IM.

Lorenz, Jens Holger: Die Macht der Materialien (?). Anschauungsmittel und Zahlenrepräsentation. IN: Mathematikdidaktik Grundschule. Medien und Materialien. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2011, S. 39 – 53). Hrsg. Von Anna Susanne Steinweg.

Scherer, Petra: Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen. Fördern durch Fordern. Band 1: Zwanzigerraum. Leipzig 1999.

Schipper, Wilhelm: Vom Calculieren zum Kalkulieren – Materialien als Lösungs- und als Lernhilfe. IN: Mathematikdidaktik Grundschule. Medien und Materialien. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2011, S. 71 – 85). Hrsg. Von Anna Susanne Steinweg.

Spiegel, H. / Selter, Ch.: Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten. Seelze 2007.