



Sachinfo Modul 3.2: „Mathe in den Kopf?!“ – Wie geht das eigentlich?

Ziel des heutigen Mathematikunterrichts in der Grundschule ist, dass jedes Kind sicher Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren lernt. Dabei muss jeder Schüler die Zeit und die Möglichkeit erhalten, eine tragfähige Zahl- und Operationsvorstellung aufzubauen. Beide bilden die Grundlage, um später flexibel rechnen zu können.

Zahlvorstellung entwickeln heißt:

- Beziehungen zwischen Zahlen kennen: Positionen von Zahlen richtig bestimmen können, Vorgänger, Nachfolger, Nachbarzehner kennen.
- Bedeutung von Zahlen kennen: Zahlen richtig lesen können, wissen, dass sich z.B. die Zahl 12 aus einem Zehner und zwei Einern zusammensetzt.

Operationsvorstellung z.B. für die Addition entwickeln heißt:

- Wissen, was das „Plus“ in unterschiedlichen Kontexten bedeuten kann: *dazutun, dazukommen, auftauchen, hinzukaufen, einfüllen, anzünden, aufkleben, herzaubern, dazulegen, geschenkt bekommen,...*
- Sowohl eine Vorstellung des Hinzufügens als auch eine Vorstellung des Zusammenfügens entwickeln.

Mathematik ist darüber hinaus viel mehr als nur Rechnen. Mathematik ist genauso Entdecken, Begründen und Beschreiben. Das Kind soll z.B. Aufgaben des kleinen 1+1 nicht bloß auswendig lernen, sondern auch verstehen und begründen können, warum es so rechnet. Das kann in einem Unterricht erreicht werden, der den individuellen Entwicklungsprozess des Kindes berücksichtigt.

Mathematik in den Kopf?! – Versuch einer Prozessbeschreibung

Handeln

Im Unterricht wird an das angeknüpft, was das Kind schon kann.

Einige Kinder handeln anfangs noch mit den Fingern oder anderen Objekten.

Andere haben bereits Einblicke in mathematische Strukturen und rechnen kleine Aufgaben teilweise im Kopf.

„Geschickt“ Handeln und innere Bilder von mathematischen Strukturen im Kopf aufbauen

Das Kind lernt Handlungen zunehmend „geschickt“ auszuführen.

Durch Beobachtung, Handlung und Reflektion lernt das Kind z.B. Mengen mithilfe von Bündeln und Abzählen in 2-er, 5er, 10er Schritten „schlau“ zu ermitteln. Es lernt auch einen Term auf didaktisches Material (z.B. Rechenrahmen) zu übertragen und so innere Bilder von Strukturen und Mustern aufzubauen. Dabei wird es angehalten über seine Handlungen zu sprechen.

Ablösen vom Material und flexibel im Kopf rechnen

Das Kind ist in der Lage flexibel im Kopf zu rechnen.

Es greift dabei nicht mehr auf didaktische Materialien zurück.

Es hat mittlerweile innere Vorstellungsbilder von Zahlen und Operationen aufgebaut. Sie helfen ihm ohne Abzählen einzelner Mengen ein Ergebnis zu berechnen.

Es kann im Nachhinein erklären, wie es gerechnet hat.

Der Prozess von der Aneignung innerer Bilder bis zum flexiblen Rechnen im Kopf, geschieht selten linear, wie das Modell oben zu suggerieren scheint. Kinder machen Fortschritte und auch mal wieder Rückschritte und bilden Vorstellungsbilder in sehr unterschiedlichen Zeitfenstern aus.

Werden Kinder zu früh aufgefordert, sich von Darstellungsmitteln zu lösen und im Kopf zu rechnen, wird ihnen die Chance genommen, mathematische „wenn-dann-Beziehungen“ und Operationen zu erforschen. Sie rechnen dann weiterhin „zählend“ und haben oft keine Vorstellung davon, was sie beim Rechnen eigentlich tun.

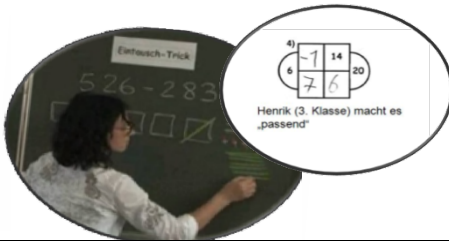
Sie greifen dann gezwungenermaßen auf Darstellungsmittel zurück, die ihnen natürlich gegeben sind. Zum Beispiel auf ihre Finger oder andere Objekte, die sie bei sich haben wie z.B. Stifte in ihrem Mäppchen. Dabei spricht erst einmal nichts gegen das Fingerrechnen, denn ein geschickter Einsatz von Fingern kann Kindern helfen, sicher und schlau zu rechnen. Unreflektiert verführen die Finger oft zum zählenden Rechnen, was häufig auch sehr fehleranfällig ist.

„Langfristig nämlich werden sich Erfolge nur einstellen, wenn Arbeitsmittel und Veranschaulichungen bewusst ausgewählt und eingesetzt werden und sie den Kindern so lange wie nötig zur Verfügung stehen.“ (Scherer 1999, 23).

Darstellungsformen und Darstellungsmittel

Mathematik kann mithilfe von verschiedenen **Darstellungsformen** (Handlungen, Bilder, Symbole und Sprache) und **Darstellungsmitteln** (didaktische Materialien, Alltagsmaterialien, Zeichnungen, Erklärungen und Begründungen) im Unterricht „begreifbar“ werden. Kinder nutzen Darstellungsmittel so lange, bis sie in der Lage sind, geschickt im Kopf zu rechnen. Einige Beispiele:

Darstellungs- Formen	Darstellungsmittel	Beispiele aus dem Unterricht
Handlung (Handeln in Situationen und mit Material)	Handlungen werden z.B. ausgeführt zu Termen oder Gleichungen und zu Rechengeschichten. Häufig werden dazu didaktische Materialien benutzt (20er Feld und Plättchen, Rechenrahmen, ...). Handlungen können aber auch spielerisch dargestellt werden (Rollenspiel). Hier geht es nicht nur darum, selbst aktiv zu sein und das eigene Handeln zu beobachten und zu reflektieren. Es geht auch darum, passiv zu handeln. D.h., die Handlung anderer zu beobachten und nachzuvollziehen.	 
Bild (Bilder malen und deuten)	Bilder werden selbst gemalt oder skizziert um - einen Sachverhalt einer Rechengeschichte darzustellen (z.B. Kinderzeichnung), - Mengen, Terme und Gleichungen zu verdeutlichen (z.B. Strichliste, Oehl'sche Darstellung, ...).	

	Außerdem werden Bilder gedeutet und Terme daraus abgelesen.	
Symbole („Mathesprache“ benutzen)	Mathematische Symbole (also Zahlen, Terme, Gleichungen, ...) werden genutzt, um Rechengeschichten, Bildern und Handlungen auszudrücken.	
Sprache (Sprechen, Zuhören, Nachfragen, Erklären, Begründen)	Mithilfe von Sprache können z.B. - Rechengeschichten erzählt/ aufgeschrieben werden, - Sachverhalte und Rechenwege mündlich und/oder schriftlich erklärt werden - Begründungen und Beweise mündlich und/oder schriftlich beschrieben werden Die Sprache bildet in unserem Schaubild das Zentrum, da sie für uns ein zentrales Medium ist, um in den Kopf des Kindes hinein blicken zu können. Sprache bezieht sich für uns auf Kommunikation miteinander sowie auf Erklärungen oder Rückfragen, die ich innerhalb meines individuellen Lernprozess entwickle. Mit der richtigen Sprache kann auf verschiedenen Ebenen die „Sache geklärt“ und der „Mensch gestärkt“ werden (vgl. Hentig 1985).	 

Dabei ist es von zentraler Bedeutung, *Darstellungswechsel* zu forcieren, d.h. die Schülerinnen und Schüler aufzufordern, zwischen verschiedenen Darstellungsformen und –mitteln zu „übersetzen“, damit ein mathematisches Muster z. B. einen lebensweltlichen Bezug und somit einen „Sinn“ für die Kinder bekommt.

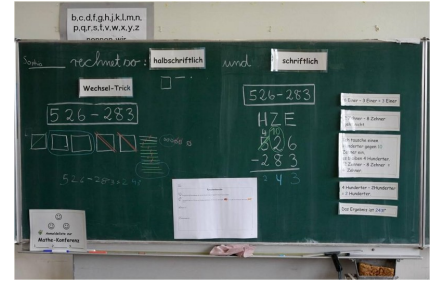
Anhand der Fotos sieht man, dass solche „Übersetzungen“ beim gemeinsamen Lernen oft ganz automatisch passieren. In einer Partnerarbeit z.B. vermischen sich fast alle Darstellungsformen miteinander, da Kinder sich austauschen (Sprache), ihre Lösungen notieren (Symbol und Bild) und evt. didaktisches Material zur Vorstellung oder zum Überprüfen der Lösung benutzen (Handlung am Material).

Darstellungsmittel - *nicht nur im Förderunterricht einsetzen!!!*

Wir plädieren deutlich für den Einsatz von Darstellungsmitteln für ALLE Kinder. Denn Darstellungsmittel sind mehr als nur Hilfsmittel zum Rechnen! Ihr Einsatz im Unterricht wird

leider oft als **Zeichen von Lernschwäche** interpretiert („Die Plättchen können dir helfen!“). Und sie führt zuweilen zur **Abwertung** von erbrachten Leistungen („Du hast den Zahlenstrahl als Hilfe verwendet!“).

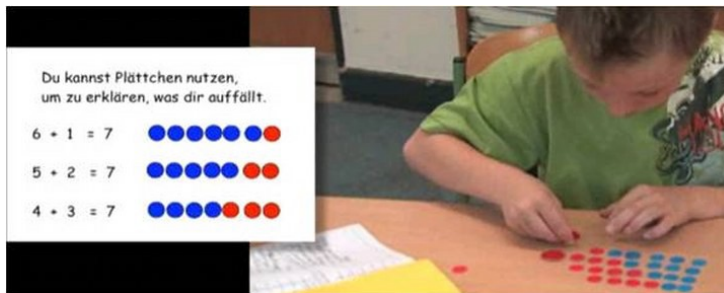
Mithilfe von Darstellungsmitteln können die Kinder aber eigene Rechenwege entwickeln und andere Rechenwege nachvollziehen. Mit Darstellungsmitteln lassen sich z.B. die schriftlichen Verfahren (s. Abb. zur Einführung der schriftl. Subtraktion) so einführen, dass sie für alle Kinder auf unterschiedlichen Ebenen erfahrbar werden und die einzelnen Schritte nicht nur auswendig gelernt werden.



Darüber hinaus dienen Darstellungsmittel zur Veranschaulichung mathematischer Strukturen. Sie können somit ein „**Instrument des Erkennens**“ sein.

Im heutigen Mathematikunterricht geht es nicht nur darum richtig zu rechnen, sondern darüber hinaus, mathematische Zusammenhänge zu entdecken, zu beschreiben und zu

begründen. Auch hier kommen Darstellungsmittel zum Einsatz. Ein Beispiel:



Mithilfe von Plättchen können Muster sichtbar gemacht werden. Die Plättchen helfen dem Kind zu erkennen, was in der Aufgabe genau passiert. Seine Beobachtung kann es dann auch vielleicht mit eigenen Worten

beschreiben.

Darstellungsmittel können auch als „**Instrument des Kommunizierens**“ fungieren.

Überall da wo Worte fehlen, wo Kinder Schwierigkeiten haben, sich anderen mitzuteilen, können sie die Gedanken der Kinder, die entdeckten Strukturen und Muster sichtbar machen und die Kinder dabei unterstützen, anderen ihre Entdeckungen und Erkenntnisse nachvollziehbar zu beschreiben.

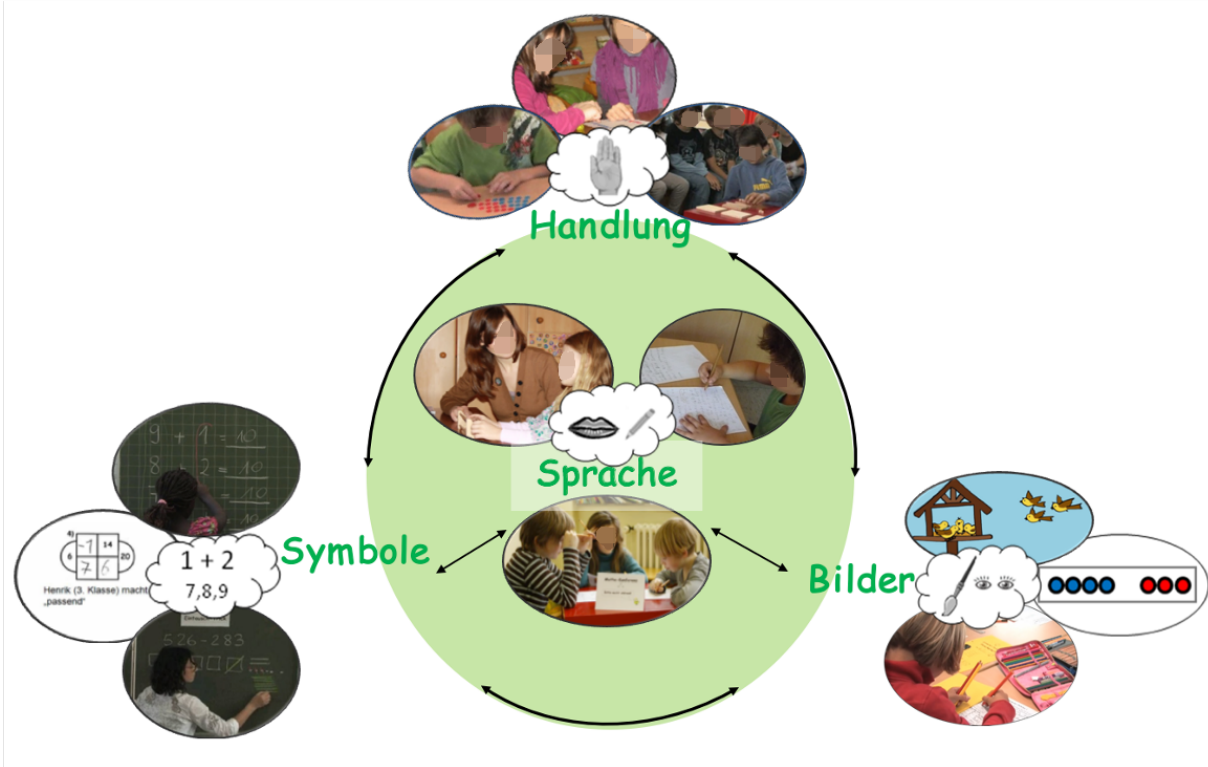
Aber: Der Umgang mit ihnen muss gelernt werden!

(Vgl. Sachinfo „Einführung von Darstellungsmitteln – aber wie?“)

„Mathe in den Kopf?!“ – Ein Merkplakat

Das zum Thema „Mathe in den Kopf?!“ entwickelte Plakat, versucht die recht abstrakten Begriffe und komplexen Zusammenhänge zu vereinfachen und mithilfe von Fotos aus dem Unterrichtsalltag zu konkretisieren.

Dabei stellen wir die Sprache in den Mittelpunkt des Lernprozesses. Die Sprache nimmt nicht nur im Hinblick auf die Vermittlung von fachlichen Inhalten eine wesentliche Rolle im Unterricht ein. Sie kann darüber hinaus ein Instrument sein, mit dem wir näher an die Köpfe der Kinder kommen



„Mathe in den Kopf?!“

„Mathe in den Kopf?!“ - bei Kindern mit Rechenschwierigkeiten

Der Lernprozess vom Beobachten, zum Handeln und Übersetzen mathematischer Sachverhalte in Bilder, Sprache und Symbole bis hin zum Verinnerlichen ist sehr individuell. Warum einige Kinder diesen Prozess schnell durchlaufen und schon in sehr jungem Alter mathematische Vorstellungsbilder entwickelt haben, während andere Kinder große Schwierigkeiten haben, sich die Mathematik vorzustellen, kann nicht ganz beantwortet werden.

Das, was im Kopf des Kindes tatsächlich passiert, kann ein Außenstehender besser einschätzen, wenn er das Kind danach fragt, was es „im Kopf“ hat. Doch nicht selten ist das Beschreiben dessen, was da im Kopf ist schwierig genug in Worte zu fassen.

Selbst wenn eine Lehrperson ein didaktisches Material (z.B. das 20er Feld) sehr intensiv eingeführt hat, heißt es nicht, dass alle Schülerinnen und Schüler gleichermaßen geschickt damit umgehen können, bzw. es als hilfreich für den eigenen Erkenntnisprozess empfinden. Auch wenn ein Kind genau beschreibt was es meint, umfasst diese Beschreibung unter Umständen nicht das, was es tatsächlich an Wissen in seinem Kopf abgespeichert, verinnerlicht hat.

Für viele Lehrer scheint es ein Dilemma zu sein, nicht wirklich in den Kopf eines Kindes hineinschauen zu können, um genaue Information darüber zu erhalten, „wo das Kind gerade steht“ und „was“ es genau braucht.

An dieser Stelle wird deutlich, dass Lernen offensichtlich nicht nur sehr individuelle Wege nimmt, sondern aufmerksam und sensibel zu begleiten ist. Versucht man als Lehrperson vorbeugend mithilfe von Darstellungsmitteln stark an dem Aufbau von inneren Bildern zur Zahl- und Operationsvorstellung zu arbeiten, kann man Rechenschwierigkeiten jedoch positiv entgegen wirken.

(Mathematik-) Lernen und Emotionen

Erinnert man sich an die Grundidee von Pestalozzi und seiner Forderung nach einem Lernprozess in dem der Kopf, das Herz und die Hand gleichermaßen beteiligt sind, so scheint es neben der Hand und dem Kopf eine weitere ‚Ebene‘ zu geben, die vielleicht deshalb weniger Beachtung findet, weil sie so schwer greifbar ist.

Das Herz ist an dieser Stelle sicher eher bildlich zu betrachten und könnte umschrieben werden mit Begriffen wie „Emotion“, „Motivation“, „Lernfreude“ o. ä.

Die Hirnforschung zeigt in neueren Untersuchungen, wie maßgeblich die Emotionen zum Erfolg oder Misserfolg beim Lernen beitragen. Wer z. B. unter von Angst erzeugtem Stress lernt, hat langfristig Probleme damit, neu Gelerntes zu behalten und zu verinnerlichen (Spitzer: „Lernen“, S. 171f).

Kurzzeitiger Stress kann zwar punktuell zu verbessertem Lernen führen, langfristiger Stress verursacht jedoch aus neuropsychologischer Sicht, dass die Energiezufuhr von Neuronen im Hippokampus (aktivste Struktur im Zentralen Nervensystem) abnimmt. Das hat eine Leistungsminderung zu Folge, woraus sich zahlreiche Stresskrankheiten entwickeln können. Auf den Mathematikunterricht bezogen kann sich daraus folgende Situation entwickeln:

„Wer sich wenig zutraut, vertraut eher auf Mechanismen als auf eigenes Denken, und wird so immer abhängiger vom Denken anderer. Die mathematische Hilflosigkeit wächst und wächst. Das Zutrauen in die eigenen Lernmöglichkeiten wird dadurch immer geringer. Ein *Teufelskreis Versagen in Mathematik - Angst vor Mathematik* kann so entstehen.“
(Spiegel/ Selter 2007, S. 64)

Eine Sachinfo, die sich intensiver mit dem Thema „Förderung von Kindern mit Rechenschwierigkeiten“ beschäftigt, finden Sie in Modul 3.3 (Haus 3 – UM – Modul 3.3: Diagnose und Förderung).

Informationen für Eltern zum Thema „Mathe in den Kopf?!“ befinden sich im Informationsmaterial in Haus 3. Hier werden auch Hinweise gegeben, wie Eltern ihr Kind zu Hause sinnvoll – unter Einsatz von Darstellungsmitteln - beim Rechnen lernen unterstützen können.



Info-Papier für Eltern

„Mathe in den Kopf ?!“ – Wie geht das eigentlich?

Ziel des heutigen Mathematikunterrichts der Grundschule ist es, dass jedes Kind sicher **Rechnen** (Plus, Minus, Mal und Geteilt) lernt. Darüber hinaus ist Mathematik aber viel mehr als Rechnen. Mathematik ist genauso **Entdecken, Begründen und Beschreiben**. Heute soll ein Kind Aufgaben nicht nur auswendig lernen, sondern auch verstehen und begründen können, warum es so rechnet. Aber was passiert eigentlich im Kopf Ihres Kindes, bis es „richtig“ im Kopf rechnen kann? Und wie können Sie Ihr Kind dabei unterstützen, dass es sicher und schnell zum richtigen Ergebnis kommt?

So hat Ihr Kind vor Schuleintritt gelernt

Wenn Sie daran denken, wie Ihr Kind gelernt hat als es noch sehr klein war, so erinnern Sie sich sicher daran, dass es ganz viel mit den Händen angefasst hat, um die Dinge zu „begreifen“. Im Kindergarten hat es viele Dinge im Spiel und durch Ausprobieren mit konkreten Gegenständen erfahren. Angefangen zu zählen hat es vielleicht beim Treppensteigen, als es bei jedem Schritt mitgezählt hat (eins, zwei, drei, vier). Auch in der Schule gilt dieses Prinzip „von der Hand in den Kopf“ zu lernen weiterhin. Und es ist sehr wichtig, dass Ihr Kind so lange mit konkretem Material, also im weitesten Sinne mit den Händen lernen darf, bis es sich Zahlen und Rechnungen im Kopf vorstellen kann.

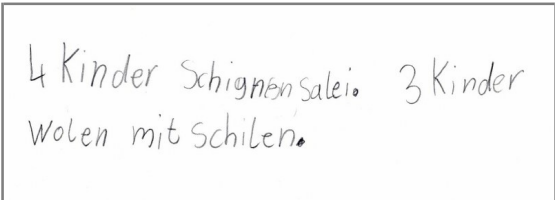
Rechnen mit Darstellungsmitteln

Für den Mathematikunterricht wurden in den vergangenen Jahrhunderten so genannte **Darstellungsmittel** erfunden, um Zahlen und Rechnungen als eine Art Bild darstellen zu können. Sie kennen z.B. einen Rechenrahmen, auf dem man Kugeln hin und her schieben kann oder Punktfelder, in die man Plättchen hinein legt. Man kann aber auch Zeichnungen erstellen, um sich etwas besser vorstellen zu können. Solche Darstellungsmittel sind wichtig, damit sich Ihr Kind die Welt der Mathematik überhaupt vorstellen kann.

Versuchen Sie selbst die Aufgabe $7 + 8$ im Kopf zu rechnen. Das geht sicher sehr schnell, da Sie schon viele Erfahrungen sammeln konnten und bereits seit Jahren rechnen können! Versuchen Sie sich aber mal genau vorzustellen, WIE sie im Kopf gerechnet haben. Einige von Ihnen sagen vielleicht: „Das war eine leichte Aufgabe, da ist das Ergebnis vor meinen Augen direkt „aufgeblitzt“. Andere würden vielleicht beschreiben, dass sie einen Zahlenstrahl sehen, an dem sich das Ergebnis abbildet oder sie machen zunächst die „10 voll“, rechnen also $7+3+5$. Vielleicht haben Sie aber auch etwas ganz anderes vor Ihrem „inneren Auge“ gesehen. So wie Sie viele unterschiedliche Wege finden, so tun das auch Ihre Kinder.

Die Lehrerin Ihres Kindes versucht mit ihm zu erarbeiten, auf welchem Weg es am besten eine Aufgabe berechnen kann. Nicht für jeden ist der gleiche Weg der Richtige! Dabei stellen sich einige Kinder Zahlen sehr schnell im Kopf vor, während andere länger daran arbeiten, eine Vorstellung von Zahlen in ihrem Kopf zu entwickeln. Wenn Ihr Kind z.B. noch nicht weiß, was Plusrechnen eigentlich bedeutet, so kann es die Aufgabe $4 + 3$ auch nicht lösen. Es kann sich die Zahlen einfach noch nicht im Kopf vorstellen und braucht Hilfe, um sich Bilder von Zahlen in seinen Kopf zu holen.

So lässt sich die Aufgabe **4 + 3** beispielsweise besser vorstellen, wenn sie diese...

... als Zeichnung aufmalen 	Ihr Kind versteht besser, was „Plus-rechnen“ ist, wenn Sie eine Situation aus seinem Lebensalltag beschreiben, die es kennt. Diese Situation kann es aufmalen oder kurz skizzieren! <i>Etwas zusammen fügen, dazutun, auftauchen, hinzukaufen, einfüllen, aufkleben, herzaubern, dazulegen, geschenkt bekommen...</i>
... beschreiben (schriftlich oder mündlich) 	Ihr Kind kann eine solche Situation auch erzählen oder aufschreiben.
... mit Plättchen legen 	Es kann Material (<i>wir sagen Darstellungsmittel</i>) benutzen, das die Lehrerin auch im Unterricht benutzt, um Mathematik zu erklären. Solche Darstellungsmittel werden auch im Mathebuch Ihres Kindes verwendet.

Mithilfe solcher Darstellungsmittel lässt sich zeigen, was beim Plusrechnen (oder Minus-, Mal-, Geteiltrechnen) eigentlich passiert. Im heutigen Unterricht spielt es eine große Rolle, alle diese Möglichkeiten einzuüben. Also Mathematik aufzumalen, mit Material zu legen und über Mathematik zu sprechen. Erst dann wird die Mathematik richtig verstanden und bekommt einen Sinn für die Kinder. Und das sollte die ganze Schulzeit über passieren!

Vorsicht mit Ratschlägen

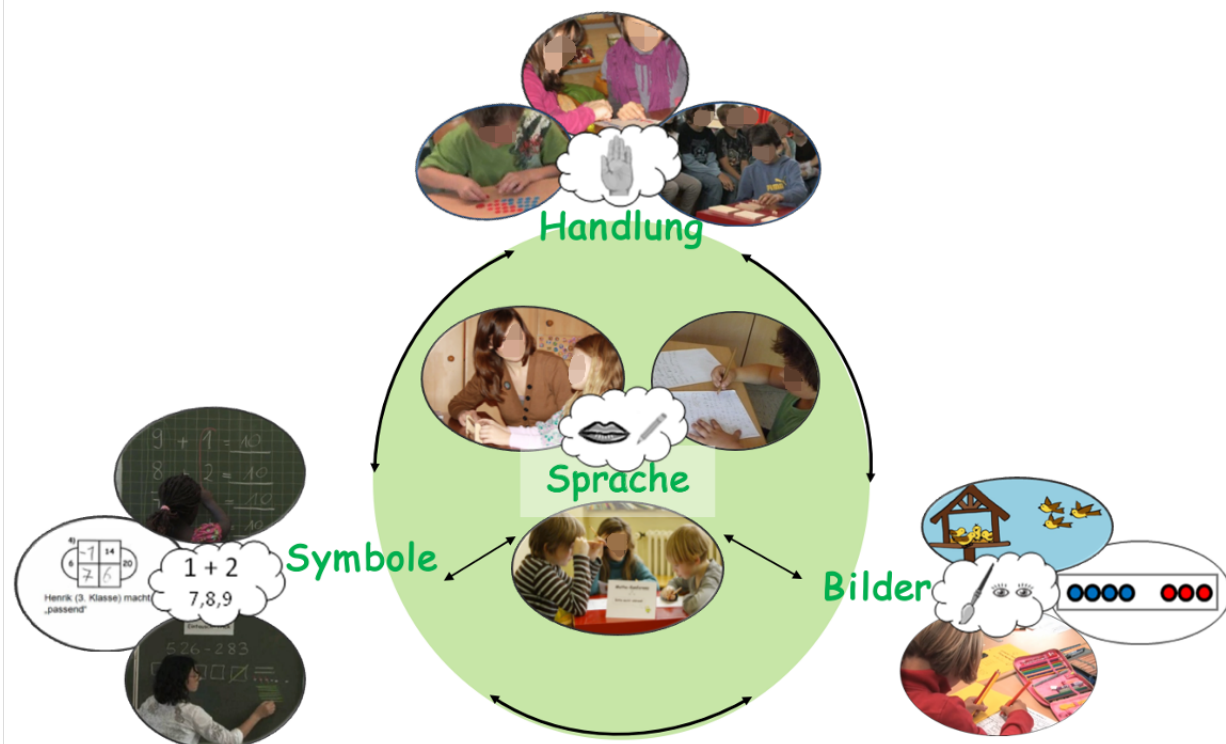
Wenn Kinder Materialien benutzen, um sich die Mathematik besser vorstellen zu können, dann sagen Erwachsene oft: „Mensch, kannst du das nicht im Kopf rechnen? Ist doch einfach! Ist doch viel schneller!“

Wenn sich Ihr Kind die Zahlen aber einfach noch nicht im Kopf vorstellen kann, dann kann es sehr verunsichert sein durch das was Sie sagen. Sie sollten hier sehr vorsichtig sein und mit der Lehrerin ihre Beobachtungen und Sorgen besprechen. Nehmen Sie Ihrem Kind zu früh das Material weg, dann greift es vielleicht gezwungenermaßen auf Dinge zurück, die es sonst dabei hat. Beispielsweise seine Finger oder Stifte in seinem Mäppchen. Es spricht nichts gegen das

Rechnen mit den Fingern, wenn es „schlau“ gemacht wird. Wird aber nicht darüber gesprochen, dann zählen viele Kinder immer wieder die einzelnen Finger von vorne ab. Das ist auch später beim Rechnen mit großen Zahlen sehr mühselig und fehleranfällig. Und es wird immer schwieriger schnell im Kopf rechnen zu lernen.

„Mathe in den Kopf?!“ – Ein Merk- und Lernplakat

Sie sehen in unserem Merkplakat Fotos aus dem Mathematikunterricht, in dem Kinder ganz verschiedene Dinge tun, um Mathematik zu begreifen. Meistens rechnen sie dabei nicht einfach nur Aufgaben im Heft aus. Sie handeln (Tun etwas Konkretes und meistens mit Ihren Händen!), sie malen Bilder (Kinderzeichnungen, Strichlisten, ...), sie schreiben in der Mathesprache (das sind Zahlen, Rechnungen, mathematische Zeichen wie =, +, -, ...) und sie sprechen (mündlich oder schriftlich, z.B. wenn sie eine Erklärung aufschreiben) über das was sie tun. Solche Übungen, vor allem das Gespräch über das, was ihr Kind denkt, sind auch für zu Hause sehr wichtig!



„Mathe in den Kopf?!“

Zu Hause üben

Viele Eltern sagen, dass Mathematik üben zu Hause sehr schwierig ist, da es häufig Streit beim Rechnen gibt. Manchmal ist es dann besser, erstmal gar nicht mehr zu üben oder ein Geschwisterkind, die Nachbarin oder eine Freundin zum Üben zu bestellen. Üben bringt gar nichts, wenn sich Ihr Kind beim Üben unwohl und unter Druck gesetzt fühlt. Und für Sie als Eltern ist das auch keine angenehme Zeit. Beraten Sie sich hier mit der Lehrerin Ihres Kindes und suchen Sie gemeinsam nach Lösungen.

„Goldene Regeln“, damit das Üben zu Hause gelingt!

1. Üben in Absprache mit der Lehrerin!

Üben hat nur dann Erfolg, wenn alle Personen, die mit einem Kind üben, voneinander wissen, was sie tun! Wird im Unterricht etwas anderes geübt, oder Rechenwege ganz anders erklärt als Sie das zu Hause tun, dann kann das zu großen Verwirrungen bei Ihrem Kind führen! Außerdem sollten Sie dieselben Darstellungsmittel benutzen, die auch im Unterricht und im Mathematikbuch verwendet werden!

2. Fragen Sie nach, was Ihr Kind „im Kopf“ hat!

Sprechen Sie über das, was Ihr Kind rechnet und dabei denkt. Geben Sie nicht gleich Hilfestellungen oder verraten sie nicht, wie es „leichter“ gehen könnte. Bleiben Sie bei dem Rechenweg Ihres Kindes und fragen Sie nach, was es sich dabei gedacht hat!

3. Üben soll Freude machen!

Emotionen und Gefühle nehmen einen wesentlichen Einfluss auf unsere Lernprozesse. Dabei wirken sich Motivation und Spaß am Lernen positiv auf den Lernerfolg aus und können Lernblockaden vorbeugen. Machen Sie Ihrem Kind Mut und fördern Sie seine Freude am Lernen! Dabei ist es wichtig, dass Sie es immer wieder ermuntern und auch für kleine Lernerfolge loben!

4. Geben Sie Ihrem Kind Zeit!

Denken Sie daran, dass es auch eine längere Zeit dauern kann, bis sich Ihr Kind die Mathematik im Kopf richtig vorstellen kann! Lassen Sie ihm die Zeit die es braucht, um mit Darstellungsmitteln Rechnungen zu lösen (Materialien wie Rechenrahmen, Zeichnungen, Skizzen, ...). Lernen ist ein Prozess, in dem jedes Kind Schritte „vor“ und auch „zurück“ macht und ein unterschiedliches Lerntempo an den Tag legt. Das ist völlig normal! Setzen Sie Ihr Kind nicht unter Druck, wenn es mehr Zeit braucht!

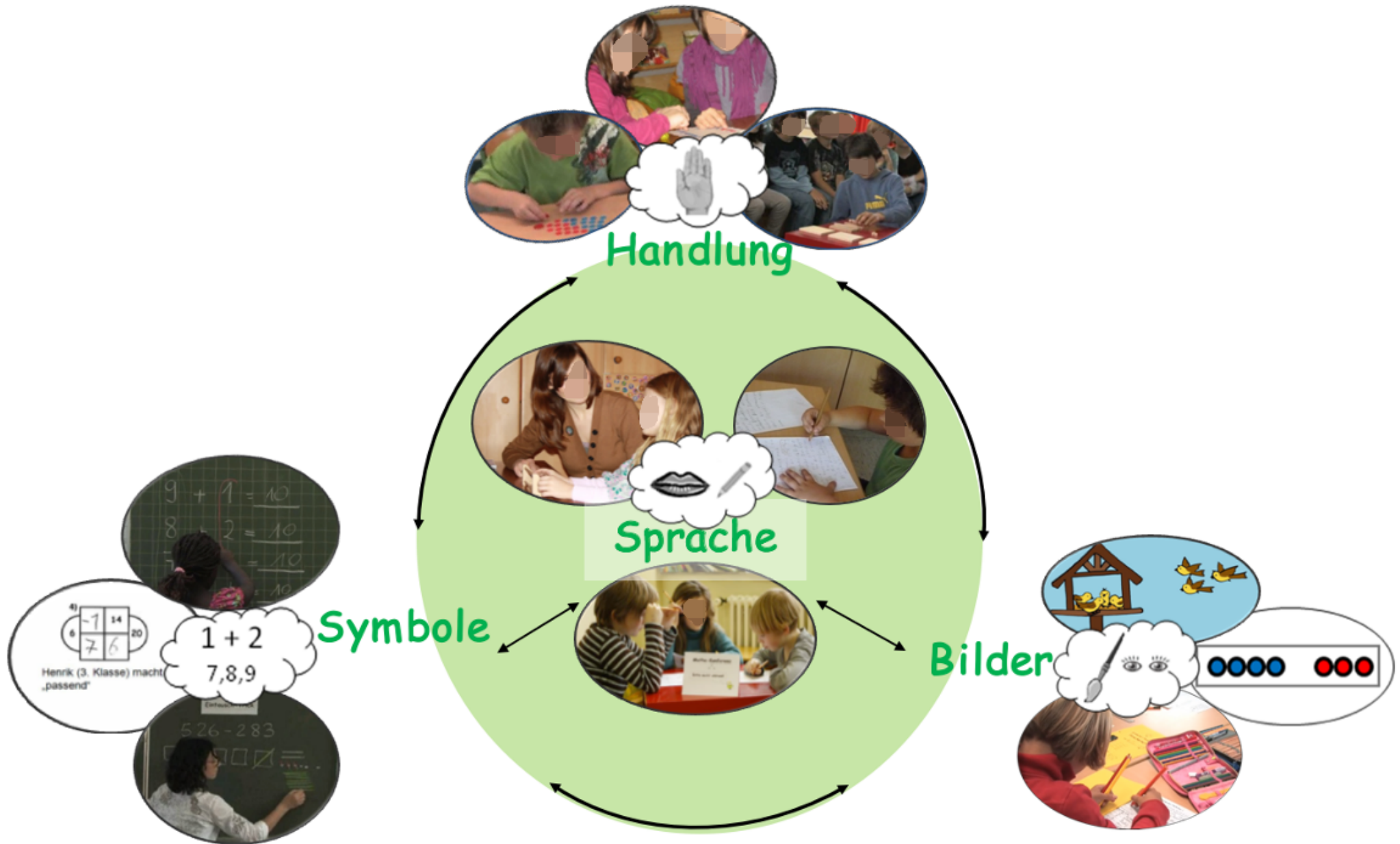
5. Üben Sie nicht zu lange!

Am besten sind kurze Übungseinheiten, die fest in den Tagesablauf eingeplant sind (z.B. immer vor oder nach dem Abendessen). Hier kann „weniger“ manchmal „mehr“ helfen!





„Mathe in den Kopf?!“





„Mathe in den Kopf?!“



Symbole

Was? Mathematische Symbole benutzen (Zahlen, Terme, Gleichungen etc.).

Wozu? Rechengeschichten, Bilder oder Handlungen in mathematische Symbole übersetzen.

Sprache

Was? Über die Sache kommunizieren (mündlich und schriftlich): sprechen, aufschreiben, zuhören, nachfragen, erklären, begründen.

Wozu? Mathematische Sachverhalte ausdrücken (durch Terme/Gleichungen, Handlungen, Bilder, Rechenwege).

Wer? Kommunikation miteinander (Schüler-Schüler, Schüler-Lehrer, Schüler-Lehrer-Eltern) und Selbstreflexion innerhalb des eigenen Lernprozesses.

Wie? Im Einzel-, Partner-, Gruppengespräch, im Plenum, in der Mathekonferenz, am Sprechtag und in Selbsteinschätzungsbögen,

Rechengeschichten, Beschreibungen, Erklärungen, Beweise.



Handlung

Was? Mit didaktischem Material oder mit Alltags- und Naturmaterial handeln, spielerische Darstellung (z. B. Rollenspiel), aktives und passives Handeln.

Wozu? Handeln zu Rechengeschichten, Bildergeschichten, Termen/Gleichungen.



Bilder

Was? Bilder (Zeichnungen, Skizzen,

Mengenbilder etc.) malen und deuten.

Wozu? Handlungen oder Rechengeschichten darstellen, Gleichungen/Terme oder Mengen verdeutlichen (z. B. durch Strichlisten, Punktebilder). Und aus Bildern zu lebensweltlichen Situationen oder aus didaktischem Material Terme ablesen.



Sachinfo Modul 3.2 - „Darstellungsmittel! Welche sollen ausgewählt werden?“

Bevor sich die Frage stellt, WIE Darstellungsmittel eingeführt werden sollen, damit alle Kinder die Struktur des Materials durchdringen und zielführend einsetzen können, muss die Lehrerin zuvor überlegen, WELCHE Darstellungsmittel überhaupt zum Gebrauch in der Klasse bereit stehen sollen.

Betrachtet man die Einrichtung und Gestaltung heutiger Klassenräume, so stellt man fest, dass sie häufig mit einer Vielzahl von *didaktischen Materialien* ausgestattet sind.

Didaktisches Material und Veranschaulichungen als bildliche Darstellungen mathematischer Sachverhalte sind aber immer auch zusätzlicher Lernstoff. Sie „wirken“ zudem nicht für alle Schüler in gleicher Weise. Daraus ergeben sich für den Unterricht Konsequenzen, insbesondere zur Unterstützung für Kinder mit Schwierigkeiten beim Rechnen lernen (vgl. Scherer 1999, S. 18).

Wir schlagen **4 Kriterien zur Auswahl didaktischer Materialien** vor:

1. „**Weniger ist mehr!**“ (Wittmann 1993)
2. **Didaktische Materialien, deren Vor- und Nachteile überdacht wurden und die zum jeweiligen Lerninhalt passen.** (Vgl. „Stiftung Warentest“).
3. **Didaktische Materialien, die fortsetzbar für alle Schuljahre sind.**
4. **Didaktische Materialien, die dem Lehrwerk entsprechen.**

Zu 1. „Weniger ist mehr!“ (Wittmann 1993)

Auf dem Weg zum flexiblen Rechnen sollen Kinder Vorstellungsbilder aufbauen, damit sie am Ende ohne Material im Kopf rechnen können. Damit sich solche Vorstellungsbilder aufbauen, ist es wichtig, die Repräsentanten, an denen mathematischen Strukturen aufgezeigt werden, bewusst auszuwählen.

Da Darstellungsmittel nicht „einfach so“ und ebenso wenig „unmissverständlich“ Wirkungen erzielen, ist es wichtig, dass jedes einzelne Kind die Möglichkeit erhält, durch eigenes Tun das einzelne Darstellungsmittel in seiner Handhabung kennen zu lernen, um sich entscheiden zu können, a) welches ihm liegt und b) welches sich vor allem für eine bestimmte Handlung eignet. „Außerdem ist zu beachten, dass der Lernerfolg nicht mit der Masse der Materialien, sondern mit der Reichhaltigkeit und Intensität der Schüleraktivitäten steigt.“ (Müller/ Wittmann 1993, S. 8.)

Zu 2. Darstellungsmittel, deren Vor- und Nachteile ich kenne und die zu meinem Lerninhalt passen.

Zur intensiveren Auseinandersetzung mit den einzelnen didaktischen Materialien haben wir einen „**Stiftung Warentest zur Beurteilung von didaktischen Materialien für den Mathematikunterricht**“ (siehe Modul 3.2., FM) entwickelt.

Diesen finden wir deshalb besonders sinnvoll, da er nicht nur praktische und didaktische Kriterien in Bezug auf ein bestimmtes Material in den Blick nimmt, sondern darüber hinaus in einem 2. Teil die Möglichkeit bietet zu analysieren, ob sich das Material nicht nur zur Darstellung von Zahlen, sondern darüberhinaus genauso gut zur Darstellung von Operationen eignet. Denn: Nicht jedes Material kann alles!

Am Beispiel des Rechenrahmens lässt sich gut aufzeigen, dass er sich für Rechnungen mit $ZE \pm E$ gut eignet. Das Kind kann z.B. bei der Aufgabe $43+5$ den ersten Summanden einstellen und mit

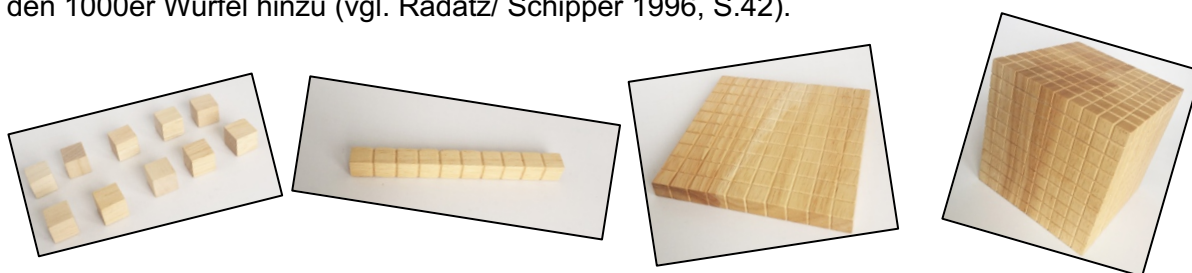


einem „Fingerstreich“ 5 Perlen hinzuschieben, um dann das Ergebnis abzulesen. Auch bei Aufgaben mit Zehnerübergang, bspw. $43-5$ oder $43+8$, kann der Rechenweg durch Weg- oder Hinzuschieben des Subtrahenden oder des 2. Summanden gut dargestellt werden. Schwierig werden allerdings die Darstellungen bei der Addition und Subtraktion voller oder gemischter Zehner ($ZE \pm Z$, $ZE \pm ZE$).

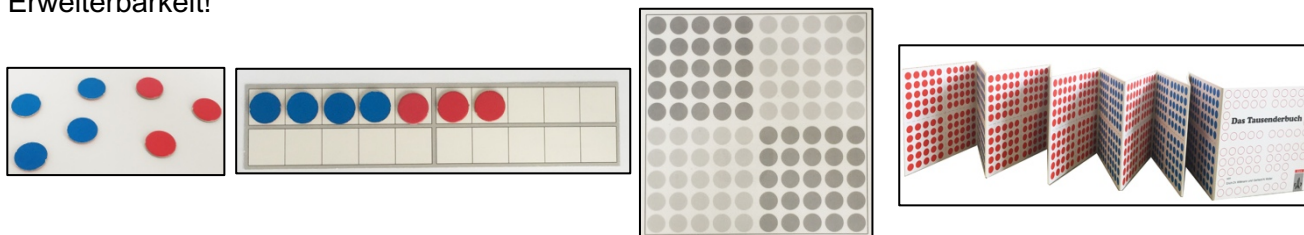
Für den Unterricht lohnt es sich, die Kinder selbst solche Erfahrungen machen zu lassen und darüber zu diskutieren. „Erst wenn das Kind viele Materialien in ihrer Handhabung kennen würde, wäre eine Entscheidung für oder gegen eines möglich“ (Lorenz 2011, S. 40).

Zu 4. Darstellungsmittel, die **fortsetzbar** für alle Schuljahre sind.

Kinder sollen kontinuierlich lernen ohne immer wieder *umlernen* zu müssen. Deshalb ist es sinnvoll Material für die Klasse 1 auszuwählen und einzuführen, das erweiterbar ist. Positives Beispiel für die Ausbaufähigkeit ist zum Beispiel das 10er Systemmaterial. In der Eingangsphase arbeiten die Kinder mit Einer-Würfeln, 10er Stangen und 100er Platten, im dritten Schuljahr nehmen sie dann den 1000er Würfel hinzu (vgl. Radatz/ Schipper 1996, S.42).

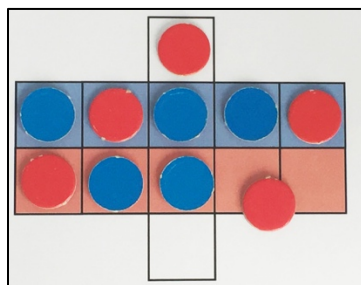


Auch das „mathe 2000“ Material vom 20er Feld bis zum 1000er Buch bietet den Aspekt der Erweiterbarkeit!



In diesem Zusammenhang stellt sich auch die Frage, ob zu den ausgewählten Materialien passendes Demonstrationsmaterial (große Version der Schülermaterialien) vorhanden ist! Nicht nur für Einführungsphasen ist es unerlässlich, sondern vor allem auch zur Reflektion und im Gespräch über die Sache. Es sollte genauso aussehen wie das Schülermaterial.

Zu 5. Darstellungsmittel, die dem **Lehrwerk** entsprechen.



Fredo & Co 1, S. 48

Unterschiedliche Lehrwerke benutzen unterschiedliche Darstellungsmittel. Im Lehrwerk Fredo 1 werden z.B. im Unterschied zum Zahlenbuch 1 farbige Holzwürfel und keine farbigen Wendeplättchen zur Darstellung benutzt. Wird in der „Fredo-Klasse“ parallel mit dem 20er Feld und den Wendeplättchen gearbeitet, weil diese etwa noch aus früheren Zeiten vorhanden sind, so muss dieser Darstellungswechsel erklärt und begründet werden, damit keine Missverständnisse entstehen.



Literatur

Lorenz, Jens Holger: Die Macht der Materialien (?) – Anschauungsmittel und Zahlenrepräsentanten. IN: Mathematik Grundschule. Medien + Materialien. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2011. Hrsg. von Anna Susanne Steinweg.

Müller/ Wittmann: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1. Leipzig 1993.

Radatz/ Schipper: Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr. Hannover 1996.

Scherer, Petra: Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern durch Fordern. Band 1: Zwanzigerraum. Leipzig 1999.





„Stiftung Warentest“ zur Beurteilung von didaktischen Materialien für den Einsatz im Mathematikunterricht

Im vorliegenden „Warentest“ sollen didaktische Materialien daraufhin überprüft werden, ob sie sich

- a) zur **Zahldarstellung**, aber auch
- b) zur **Darstellung von Operationen** eignen!

Denn: *Nicht jedes Material kann alles!*

Für den Unterricht bedeutet das am Ende, Materialien auszuwählen und einzuführen, die für alle Schuljahre und Zahlräume zielführend eingesetzt werden können.

Aufgabe:

- Nehmen Sie die didaktischen Materialien zur Hand, die Sie im Unterricht einsetzen möchten.
- Füllen Sie für jedes einzelne Material beide Teile des „Stiftung Warentest“ aus.



Diskutieren Sie anschließend mit einem Kollegen oder dem ganzen Stufenteam Ihre Ergebnisse. Finden Sie gemeinsam eine Entscheidung für Material, das den „Warentest“ gut bestanden hat, das aber auch zu ihrem Buch und ihrem Unterricht passt.



Überlegen Sie, ob nicht auch ihre Schüler den „Warentest“ zur Darstellung von Operationen (Teil 2) im Unterricht durchführen können, um selbst über die Vor- und Nachteile ins Gespräch zu kommen.

Literatur

Radatz/ Schipper: Handbuch für den Mathematikunterricht 1. Schuljahr. Hannover 1996.



„Stiftung Warentest zur Beurteilung von didaktischen Materialien“

(In Anlehnung an Radatz/ Schipper: Handbuch für den Mathematikunterricht 1. Schulj.)

Name des didaktischen Materials: _____

Praktische Kriterien

	Ist das Material...	voll zu- treffend	weit- gehend	teil- weise	nicht zu- treffend
1	... für Kinder leicht handhabbar?				
2	... haltbar?				
3	... seinen Preis wert?				

Didaktische Kriterien Teil 1

	Können mithilfe des Materials...	voll zu- treffend	weit- gehend	teil- weise	nicht zu- treffend
1	... Mengen simultan (bis 4) erfasst werden?				
2	... Mengen quasi-simultan erfasst werden, weil das Material eine klare 5er- und 10er Struktur aufweist?				
3	... vermeidet das Material „zählendes Rechnen“? ¹				
4	... Zusammenhänge zwischen Handlung, Bild, Symbol und Sprache hergestellt werden? ²				
5	... ordinale (Zahl in der Reihe) UND kardinale (Zahl als Menge) Zahlaspekte dargestellt werden? ³				
	Ist das Material...				
6	... fortsetzbar in höheren Zahlräumen? ⁴				
7	... einsetzbar für andere Unterrichtsinhalte?				

¹ Hinweis: Abgezählt werden kann prinzipiell immer. Jedoch bieten bestimmte Materialien durch farbliche Gestaltung und bestimmte Anordnung schneller die Möglichkeit, Anzahlen mit einem Blick zu erkennen!

² Ein Beispiel: Handlung am 20er Feld: Summe addieren durch legen des 1. Summanden und Dazulegen des 2. Summanden mit Wendepflichtchen/ Bild: beide Summanden mit 2 Farben in 20er Feld einzeichnen/ Symbol: Mengen beider Summanden ermitteln und als „Plusaufgabe“ notieren/ Sprache: Kind erklärt seine Handlung. Vgl. auch Sachinfo „Mathe in den Kopf?!“.

³ Zum Aufbau der Zahlvorstellung ist es unerlässlich, die kardinale Sicht auf Zahlen im Unterricht zu eröffnen. Dies kann am selben Material gezeigt werden, erfordert nur „anderes Gucken“ (vgl. Sachinfo „Wie führe ich DM ein?“). Am Bsp. der Zahl 8 ist das zum Einen mit dem Blick auf eine bestimmte „Stelle“ in der Zahlenreihe schauen, zum Anderen mit dem Blick auf die gesamte Menge 8 blicken.

⁴ Bsp.: 20er-Feld/ 100er-Feld/ 1000er-Buch.



Didaktische Kriterien Teil 2

	Können mithilfe des Materials folgende <u>Aufgaben</u> dargestellt werden?	voll zutreffend	weitgehend	teilweise	nicht zutreffend	Notizen
1	$15 - 8 =$					
2	$39 + 50 =$					
3	$83 - 29 =$					
4	$47 + \underline{\quad} = 63$					
5	$465 - 227 =$					

Gesamturteil

(Zählen Sie in jedem Teil des Stiftung Warentest aus, welche Einschätzung am häufigsten vorkommt. Notieren sie diese hier. Dabei können Sie nicht Zutreffendes streichen.):

1. Das didaktische Material erfüllt die **praktischen Kriterien** voll / weitestgehend / teilweise / nicht.
2. Das didaktische Material erfüllt die **didaktischen Kriterien** in Teil 1 voll / weitestgehend / teilweise / nicht.
3. Das didaktische Material erfüllt die **didaktischen Kriterien** in Teil 2 voll / weitestgehend / teilweise / nicht.

Begründung/ Bemerkung:



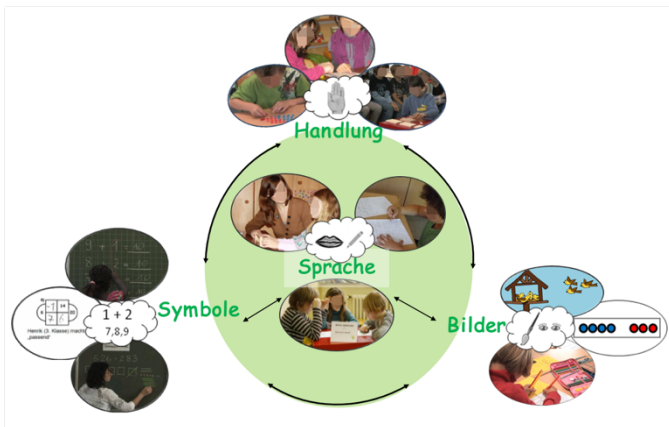
Anmerkung: Die folgende Planung ist eine Kurzübersicht mit dem Schwerpunkt der **Übung des Darstellungswechsels**.

Sie ist eng angelehnt an die Unterrichtsplanung in Haus 6 „Zahlen unter der Lupe“, die Sie dort als ausführliche Version herunterladen können.

Allgemeines vorab:

Das Format „Zahlen unter der Lupe“ lässt sich vielfältig im Unterricht einsetzen. So kann es nach einer intensiven Einführungsphase ritualisiert im Morgenkreis mit allen Kindern gemeinsam durchgeführt werden. In unseren Erprobungsklassen gab es am Ende einzelne Kinder, die auch alleine das Forschen zu einer Zahl angeleitet und mit den Kindern durchgeführt haben.

Das Aufgabenblatt enthält bestimmte Symbole, die aus unserem Plakat „Mathe in den Kopf?!“ hervorgehen und eine Art Merkhilfe sind, welche Aktivitäten die Kinder zum Erforschen einer bestimmten Zahl ausführen können.



Nach einiger Zeit fallen den Kindern zu jedem Wolkensymbol von alleine Ideen zum Üben und Forschen ein, so dass man sich nicht zwingend an den Ablauf des Arbeitsblattes halten muss (hierzu auch das Dokument „H3_Z_u_d_L_weiterf_Forscherauftrag“ im UM).

Das Format bietet sich auch an, um mit einer Kleingruppe oder in der Einzelsituation bestimmte Übungen zu wiederholen. Die Kinder können dann auch mehrere Aufgaben zu einer bestimmten Übung (Beispiel „Rechnen zu den Nachbarzählern“) im Heft bearbeiten.

Die Seiten sind so angelegt, dass auf Seite 1 stark zur Zahlvorstellung gearbeitet wird. Auf Seite 2 können dann auch Aufgaben gerechnet/erfunden werden. Außerdem können Zahlen- und Rechengeschichten entstehen oder ganz andere Ideen der Kinder. Wie ausführlich und intensiv die Bearbeitung der Schüler ausfällt hängt sicher sehr stark davon ab, wie viel Zeit diesem Format im Unterricht eingeräumt wird.

Lehrerinnen aus unseren Erprobungsklassen berichteten, dass nach wiederkehrender wöchentlicher Übung ein deutlicher Lernzuwachs auch in anderen Bereichen des Unterrichts zu erkennen war. Andere erzählten, dass sie die Symbole in den Wolken auch in ganz anderen Situationen im Mathematikunterricht einsetzten z.B. zum Lösen von Rechengeschichten. So konnten die Kinder zunächst eine Zeichnung anfertigen oder einen Lösungsweg auch schriftlich skizzieren, um dann eventuell in der „Mathesprache“ ihre Lösung zu notieren.



Unterrichtsplanung „Zahlen unter der Lupe ZR 20/100 – Zum Üben des Darstellungswechsels und zum Aufbau von Zahlvorstellung“

ZIELE	Schuljahr 1 oder 1/2
Die Schüler und Schülerinnen • führen verschiedene vorgegebene und freie Untersuchungen zu einer Zahl durch, • entwickeln und erweitern ihre Zahlvorstellungen (Darstellen von Zahlen, flexibles Wechseln zwischen unterschiedlichen Zahldarstellungen, Entdecken von Beziehungen zwischen Zahlen etc.), indem sie in Analogie zu unserem Matheplakat: „Mathe in den Kopf?!“ 1. eine gemischte zweistellige Zahl auswählen und das Zahlwort notieren 2. verschiedene Bilder der Zahl anfertigen (Mengenbilder, Würfelbilder, Strichlisten, Oehl'sche Darstellung, Eintrag in die Stellenwerttafel, ...) 3. aktiv handeln und z.B. in der Mathecke (evtl. an einem Materialtisch) die Möglichkeit haben, Mengen mit Alltagsmaterialien und/oder didaktischen Materialien zu legen, zeigen, schieben, ... 4. die Nachbarzahlen der Zahl finden (den Vorgänger links, den Nachfolger rechts eintragen und außen die jeweiligen Nachbarzehner) 5. die Zahl zunächst am Rechenstrich verorten und dann den genauen Ort an der Hundertertafel finden 6. die Zahl verdoppeln und wenn möglich halbieren, außerdem die Teilbarkeit durch 2 (gerade/ungerade Zahl) untersuchen 7. zu den Nachbarzehnern rechnen und die Zehnerzerlegung üben 8. eigene Rechnungen passend zu der Zahl aufschreiben 9. weitere Ideen erfinden und notieren Am Ende steht der Auftrag, mit anderen über die Ergebnisse und eigenen Ideen ins Gespräch zu kommen und diese darzustellen und ggf. zu erklären. ZEIT 1-2 Unterrichtsstunden zur Einführung des Formats. Der weitere Einsatz sollte dann möglichst regelmäßig mit allen Kindern stattfinden.	Lehrplan-Bezug <u>Inhaltsbez. Kompetenzen:</u> Zahlen und Operationen: Zahlvorstellungen <u>Prozessbez. Kompetenzen:</u> kreativ sein, Modellieren, Darstellen/Kommunizieren <u>Anmerkung:</u> Ob und wie stark die prozessbezogenen Kompetenzen angesprochen werden, liegt vor allem daran, wie stark das gemeinsame Gespräch zur Vorstellung eigener Ideen, zum Reflektieren, Nachfragen und Erklären genutzt wird. Dies muss anfangs stark durch die Lehrerin angeleitet werden. Nicht alle Kinder können alle vorgegebenen Untersuchungskriterien (1-10) direkt zu Beginn des 1. Schuljahres ausfüllen. Es muss deutlich gemacht werden, dass „Forschen“ ein „Herausfinden“ ist. Dies passiert nach und nach. Material im Klassenraum



Anregungen zu den einzelnen Aufgaben:			Im Kreis
Aufgabe	Versprachlichungen	Materialunterstützung	
1. Eine gemischte Zahl auswählen. Das Zahlwort schreiben.	„Wähle eine Zahl aus, die du interessant findest. Sie soll keine Zehnerzahl sein, sondern eine gemischte Zahl. Also mit einer Zehnerzahl und einer Einerzahl.“ <i>[Beispiel an der Tafel geben, am besten mit Zahlenkarten unterstützt, diese können im UM heruntergeladen werden.]</i>  „Schreibe die Zahl als Wort (in Buchstaben). Schreibe so, wie du sprichst.“	Es kann eine Dose mit Zahlenkarten vorbereitet werden, aus der die Kinder eine Zahl auswählen. Zum genaueren Verständnis der Stellenwerte bietet es sich an, Zahlenkarten ähnlich dem Montessorimaterial vorzubereiten. Dabei gibt es Karten mit vollen Zehnern (10, ... 90) und Ziffernkarten (1-9). Diese kann man übereinander legen und die gemischte Zahl ermitteln. (In unserem Materialteil in Modul 3.2 sprechen wir hier auch von „Rucksackzahlen“.) Erst Anlauttabelle, später Wörterbuch o.ä.	• Material zur Visualisierung Arbeitsblatt auf A3 kopiert • Einige mathematische Materialien als Demonstrationsmaterial im Kreis (Zur Einführung und Reflexion) <u>Mathematische Materialien</u> • unstrukturiertes Material (Alltagsmaterial) zum Zählen und Bündeln • 20er/100er Feld und Plättchen • Rechenrahmen • 10er System-Material (Dienes) • Zahlenband • Rechenstrich (blanko) • Zahlenstrahl • Spielgeld • Spiegel • verschiedene Mathebücher
2. Bilder zu einer Zahl aufmalen.	„Male verschiedene Bilder, die zu deiner Zahl passen.“ <i>[Zum Eintrag in die Stellenwerttafel sollte ausgehend von Bündel-Aktivitäten mit Wendeplättchen besprochen werden: „Wie viele Zehnerbündel sind es? Wie viele Einer/ einzelne Plättchen?“]</i>	Beispiele von Zahlenbildern an der Tafel wiederholen und die Zeichnungen als Tipps stehen lassen.	Weitere Materialien, die zum Beispiel in der Matheecke auf einem Tisch bereit liegen, um diverse Darstellungswechsel zu vollziehen.



Unterrichtsplanung „Zahlen unter der Lupe ZR 20/100 – Zum Üben des Darstellungswechsels und zum Aufbau von Zahlvorstellung“

3. Handlungen praktisch vollziehen.	„Geh zum Materialtisch. Lege dort deine Zahl als eine Menge von Steinen, als Würfelbild, stelle sie am Rechenrahmen ein, zeige sie am Zahlenstrahl, usw. Die Lehrerin oder ein anderes Kind soll das, was du gemacht hast anschließend ansehen und mit dir besprechen.“ <i>[Gemeinsam können weitere Ideen gesammelt werden.]</i>	Diverse unstrukturierte und strukturierte Materialien	<u>Zum Schreiben</u> • Anlauttabelle • Wörterbuch	
4. Die Zahl am Rechenstrich (leerer Zahlenstrahl) verorten.	„Überlege einmal, wie du die Zahl finden kannst, obwohl der Zahlenstrich keine Zahlen, noch nicht mal Striche hat, die dir helfen können, den richtigen Ort zu finden!“ <i>[Im Plenum werden Möglichkeiten diskutiert, wie man sich einem „Zahlort“ annähern kann: Anfang und Endpunkt bestimmen, Mitte finden, ...</i> <i>Man kann als Übung auch Zahlenkarten an einer lang ausgebreiteten Zahlenleine verorten lassen. Die passenden Zahlenkarten können auch im UM heruntergeladen werden. Die Übungen lassen sich auch für den ZR 1000 erweitern. Dann ist nur eine ungefähre Zuordnung möglich: die Striche und Zahlen müssen von den Kindern selbst eingetragen werden, ggf. helfen Orientierungszahlen (250, 500, 750). Mögl. Impulse: „Wo ist die 500? Warum?“ „Kommt deine Zahl vor oder nach 500?“]</i>	Rechenstrich (zur Visualisierung Leine und Zahlenkarten zum Verorten)		



Unterrichtsplanung „Zahlen unter der Lupe ZR 20/100 – Zum Üben des Darstellungswechsels und zum Aufbau von Zahlvorstellung“

Die Zahl am Hunderterfeld eintragen.	„Finde die Zahl auch im Hunderterfeld. Wie gehst du dabei vor, um die Zahl möglichst zügig zu finden?“ <i>[Es ist wichtig, die Zahl an einem linearen und einem flächigen Darstellungsmittel zu zeigen. Die Zahlorte können verglichen und beschrieben werden. Nicht für alle Kinder ist dieser Darstellungswechsel einfach!]</i>	Hunderterfeld/Plättchen oder großes 100er Feld an der Tafel mit Magnetplättchen oder Folienstift zum Verorten	
5. Nachbarzahlen finden!	„Welche Zahl kommt (beim Zählen) vor X? Das ist der Vorgänger deiner Zahl. Schreibe diese Zahl in das linke Kästchen. Welche Zahl kommt (beim Zählen) nach X?“ Das ist der Nachfolger. Schreibe diese Zahl in das rechte Kästchen.“ <i>[Für ZR 100/1000 entsprechend Nachbarzehner, Nachbarhunderter benennen lassen.]</i>		
6. Gerade/ Ungerade (Teilbarkeit durch 2 untersuchen) Verdoppeln/ Halbieren	„Nimm die Anzahl als Plättchen und verteile gerecht an zwei Kinder, so dass beide gleich viele Plättchen bekommen. Kannst du die Zahl so teilen, dass es gerecht ist?“ <i>Es sollte hier an die Ideen/Anregungen der Kinder angeknüpft werden. Mehrere Ansätze sind möglich: <u>Verdoppeln mit dem Spiegel:</u> „Lege die Anzahl/Zahl als Plättchen (ZR 100/1000: mit Mehrsystemblöcken/ Dienes-Material) und spiegele sie mit dem Spiegel. Jetzt siehst du das Doppelte. Wie viele Plättchen siehst du jetzt insgesamt?“ (Diese Variante ist gerade für den Schulbeginn sehr zu empfehlen.)</i>	Plättchen, Alltagsmaterialien (Muggelsteine, Kastanien, ...) Je nach Ansatz: Spiegel Wendeplättchen [Für ZR 100/1000: 10er System-Material (Dienes)]	



Unterrichtsplanung „Zahlen unter der Lupe ZR 20/100 – Zum Üben des Darstellungswechsels und zum Aufbau von Zahlvorstellung“

	<u>Additionsaufgabe:</u> „Verdoppeln kannst du mit den Verdopplungsaufgaben, das Doppelte von eins ist $1+1$. Was ist das Doppelte von 2?“ <u>Multiplikation:</u> „Verdoppeln kannst du mit den Mal-Aufgaben. Das Doppelte von X ist immer 2-mal X.“ (ggf. Hinweis auf die 2er-Reihe). <u>Halbieren:</u> „Nimm die Anzahl als Plättchen und verteile diese gerecht an zwei Kinder, so dass beide Kinder gleich viele Plättchen bekommen. Das, was jedes Kind bekommt, ist die Hälfte der Plättchen, die wir verteilt haben. Kannst du die Anzahl der Plättchen so verteilen, dass es gerecht ist?“ (Später kann der Zusammenhang zu der Aufgabe 2 – gerade/ungerade Zahlen – besprochen werden.)		
7. Zum Nachbarzehner rechnen!	„Deine Zahl hat zwei Nachbarzehner. Die hast du in Aufgabe 5 schon gefunden. Nun ist die Frage, wie weit deine Zahl vom kleinen und vom großen Nachbarzehner entfernt wohnt. Das kannst du mit einer Plusaufgabe und mit einer Minusaufgabe herausfinden.“ <i>[Gemeinsam werden Beispiele dazu visualisiert und berechnet. Die Ergänzung bis zur 10 bzw. bis zum nächsten Zehner ist ein wichtiges Übungsformat für alle Kinder und sollte daher von Anfang an mit in „Zahlen unter der Lupe“ aufgenommen und wiederholt thematisiert werden. Evtl. kennen die Kinder für diese Aktivität andere Formulierungen oder Darstellungen aus ihrem Schulbuch oder der Unterrichtspraxis (z.B. Zerlegung an den Händen, verliebte Herzen, Partnerzahlen etc...)].</i>		



Unterrichtsplanung „Zahlen unter der Lupe ZR 20/100 – Zum Üben des Darstellungswechsels und zum Aufbau von Zahlvorstellung“

8. Mehr eigene Aufgaben finden!	„Überlege, was dir für Aufgaben einfallen, die mit deiner Zahl etwas zu tun haben. Denke dabei daran, dass diese Aufgaben auch interessant und knifflig sein sollen. Vielleicht sind deine Aufgaben schwere Aufgaben oder Knobelaufgaben. Vielleicht erfindest du ein Zahlenrätsel oder eine Denkaufgabe.“ <i>[An dieser Stelle sollte wiederholt werden, was „leichte“ und was „schwere“ Aufgaben sind. Was macht eine Aufgabe zu einer „schweren“ Aufgabe. Die Kriterien können dabei von Kind zu Kind unterschiedlich sein. Aufgabenformate wie Zahlenmauern, Zahlentreppen, Kettenaufgaben, Zauberdreiecke, usw. können an dieser Stelle auch wiederholt werden. Die Lehrerin kann mit den Kindern parallel ein Tipp-Plakat entwickeln, das an der Tafel hängen bleiben kann].</i>	Das, was die Kinder benötigen, finden sie in der Regel im Matheregal oder sie bitten die Lehrerin um Hilfe. Es könnten unterschiedliche Mathematikbücher unterschiedlicher Schuljahre zur Ansicht ausgestellt werden, in denen Kinder nach Ideen für unterschiedliche Aufgaben suchen können.	
9. Eigene Ideen!	<i>[Piko gibt Tipps, die die Lehrperson mit den Kindern besprechen kann. Es bietet sich hier insbesondere an, die Kinder in gemeinsamen Gesprächen ihre Ideen vorstellen und austauschen zu lassen].</i>	Das, was die Kinder benötigen, finden sie in der Regel im Matheregal oder sie bitten die Lehrerin um Hilfe.	
10. Ergebnisse und Ideen austauschen, erklären und diskutieren!	<i>[Erst wenn ich über die Dinge spreche und das Gedachte verbalisieren und erklären kann, scheinen Dinge verstanden worden zu sein. Der Austausch über das Handeln und das Denken der Kinder muss in einem guten Mathematikunterricht immer wieder im Zentrum des Alltags stehen.]</i>		



Demopapier „Zahlen unter der Lupe“

„Zahlen unter der Lupe“ bis 100

Name: Hanne Datum: 31.5.2012

1. Meine Zahl: 47

Schreibe das Zahlwort: Sebenvundregig

3. Anzahl zählen, legen, schieben, zeigen, ...!

Geh in die Matthecke!
Arbeite mit Material!

Zeige einem Kind oder deiner Lehrerin was du gemacht hast!

2. Male Zahlenbilder!

4. Zeichne ein!
Am Rechenstrich:

Am 100er Feld:

5. Nachbarzahlen finden!

Nachbarzehner Vorgänger Zahl Nachfolger Nachbarzehner

40 46 47 48 50

6. Überlege!

☐ gerade ☒ ungerade

verdoppelt 92 94

halbiert 23 24

7. Zum Nachbarzehner rechnen!

Zahl 47 + 3 = Nachbarzehner 50

Zahl 47 - 7 = Nachbarzehner 40

8. Mehr eigene Aufgaben finden!

(Z.B. auch Zerlegungshäuser, Zahlenmauern, Kettenaufgaben, Aufgaben mit dem Ergebnis deiner Zahl,...!)

$30 + 17 = 47$
 $40 + 7 = 47$
 $50 - 3 = 47$
 $60 - 13 = 47$
 $100 - 53 = 47$
 $0 + 47 = 47$

9. Eigene Ideen!!

Geldbetrag
Was kannst du kaufen, wenn du so viele Euro hast?

Findest du diese Zahl im Kalender?

Findest du die Zahl auf der Uhr? Zeichne auf!

Warum magst du diese Zahl?

Schreibe eine Zahlen- oder Rechengeschichte die zu der Zahl passt!

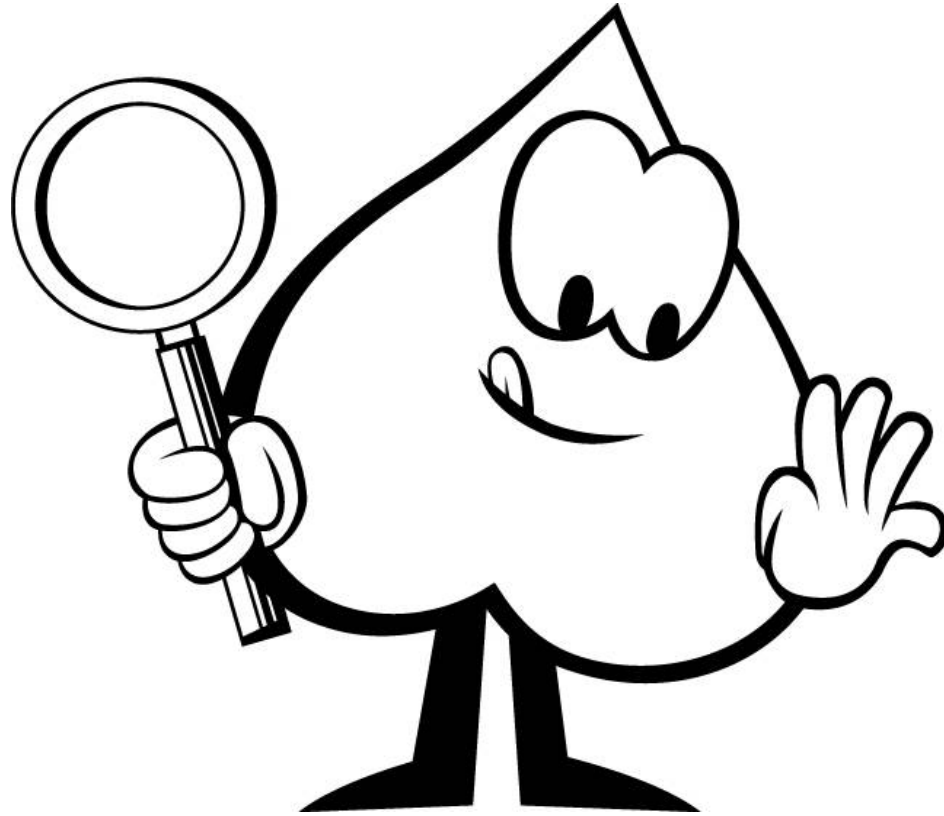
Überlege weiter!!!

Schreibe die Ideen in dein Heft!

10. Sprich mit anderen Kindern über deine Ideen!

Name: Jana und Alia

Erkläre, was du dir dabei gedacht hast! 1 / 7



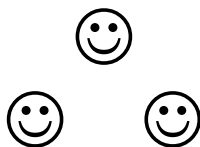
„ZAHLEN unter der Lupe“

Die ZAHL des TAGES:

A large, empty rounded rectangle box with a black outline, intended for writing the number of the day.

----- bitte hier nach hinten falten -----

Mathe-Konferenz

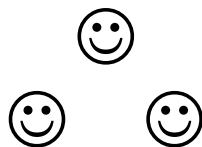


Bitte nicht stören!!

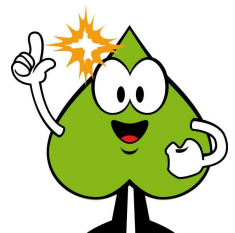


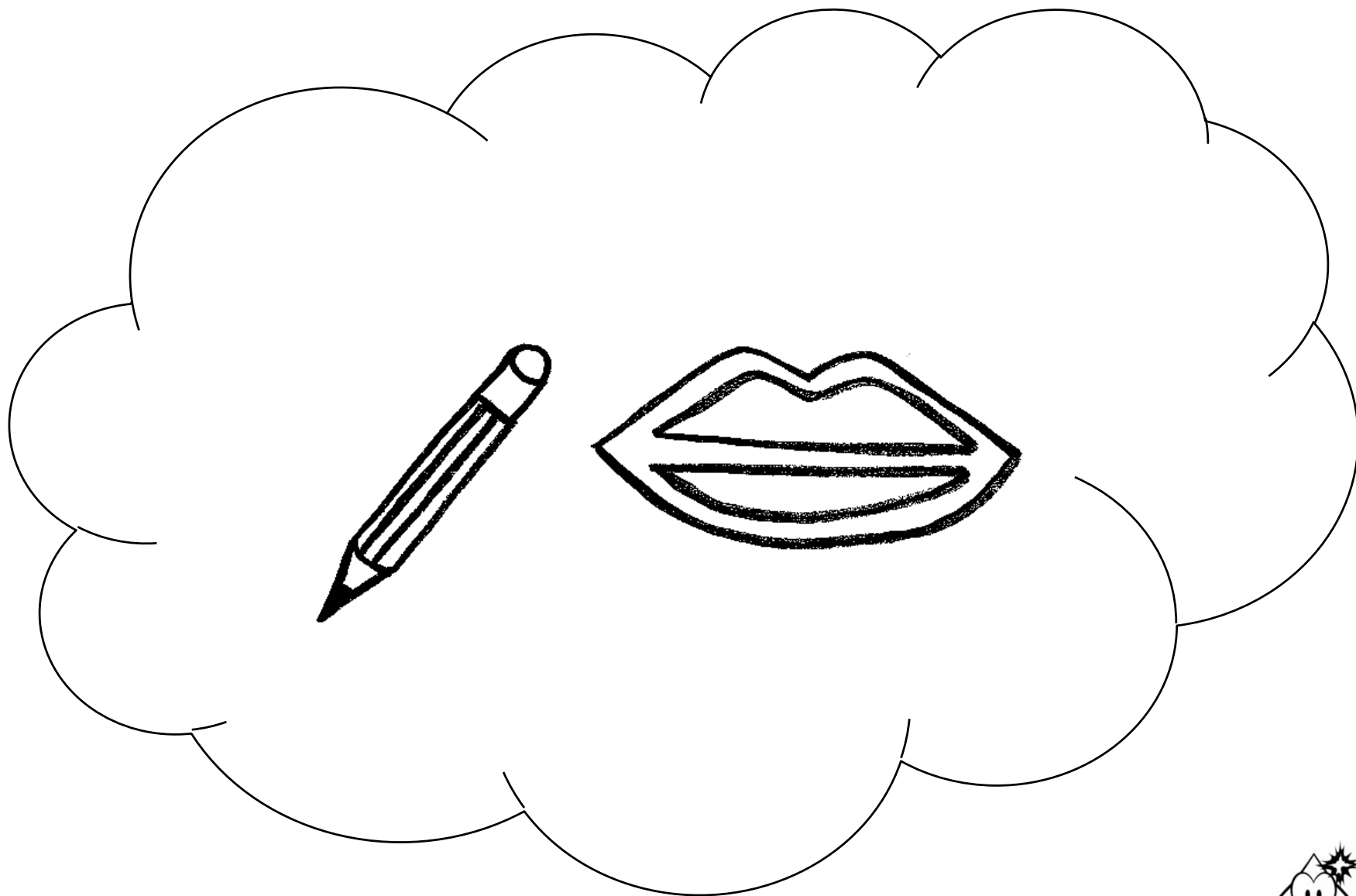
----- bitte hier nach hinten falten -----

Besprechungs-Zeit



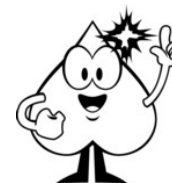
Bitte nicht stören!!

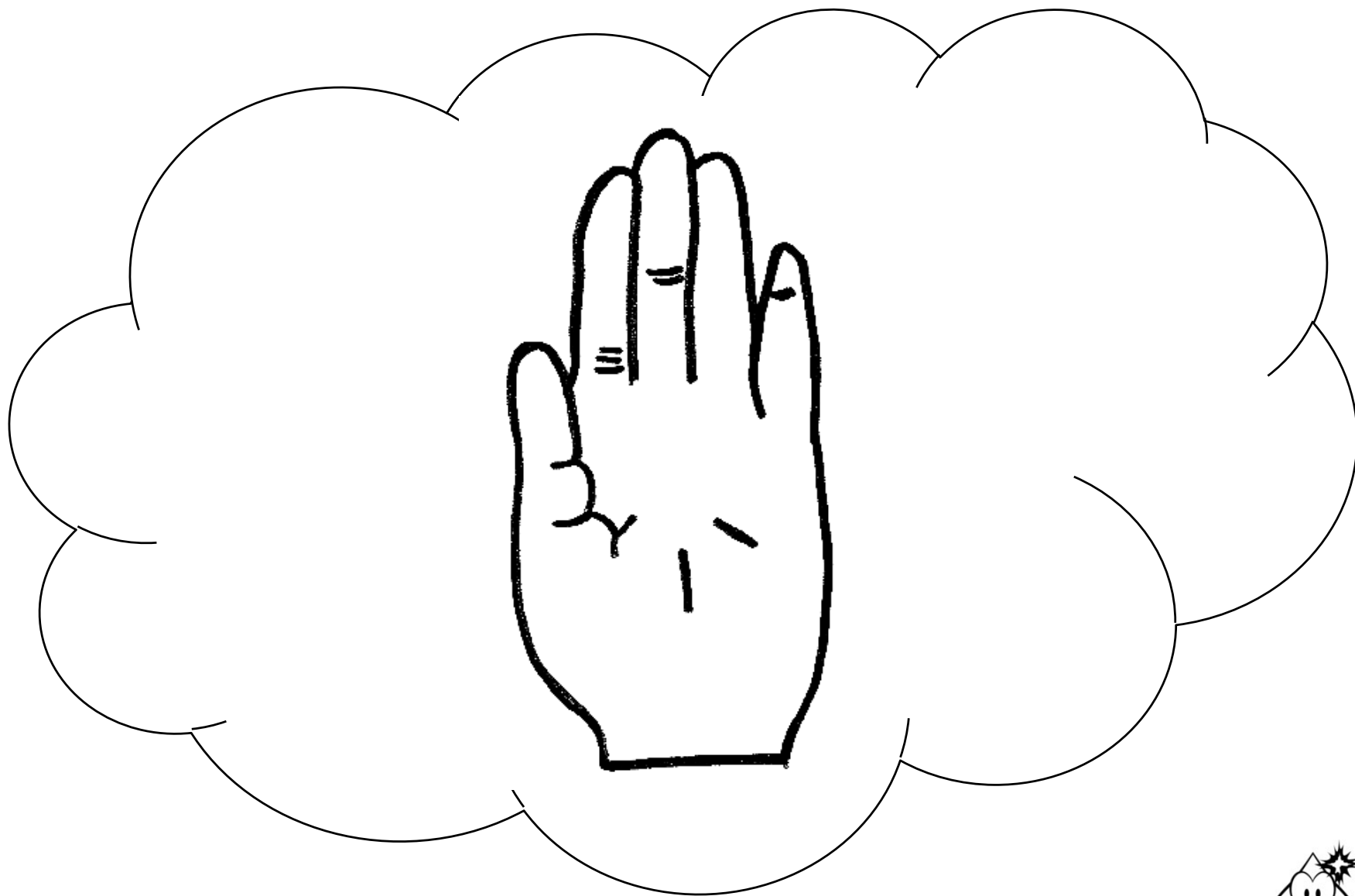


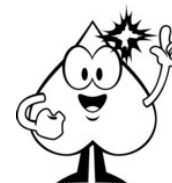
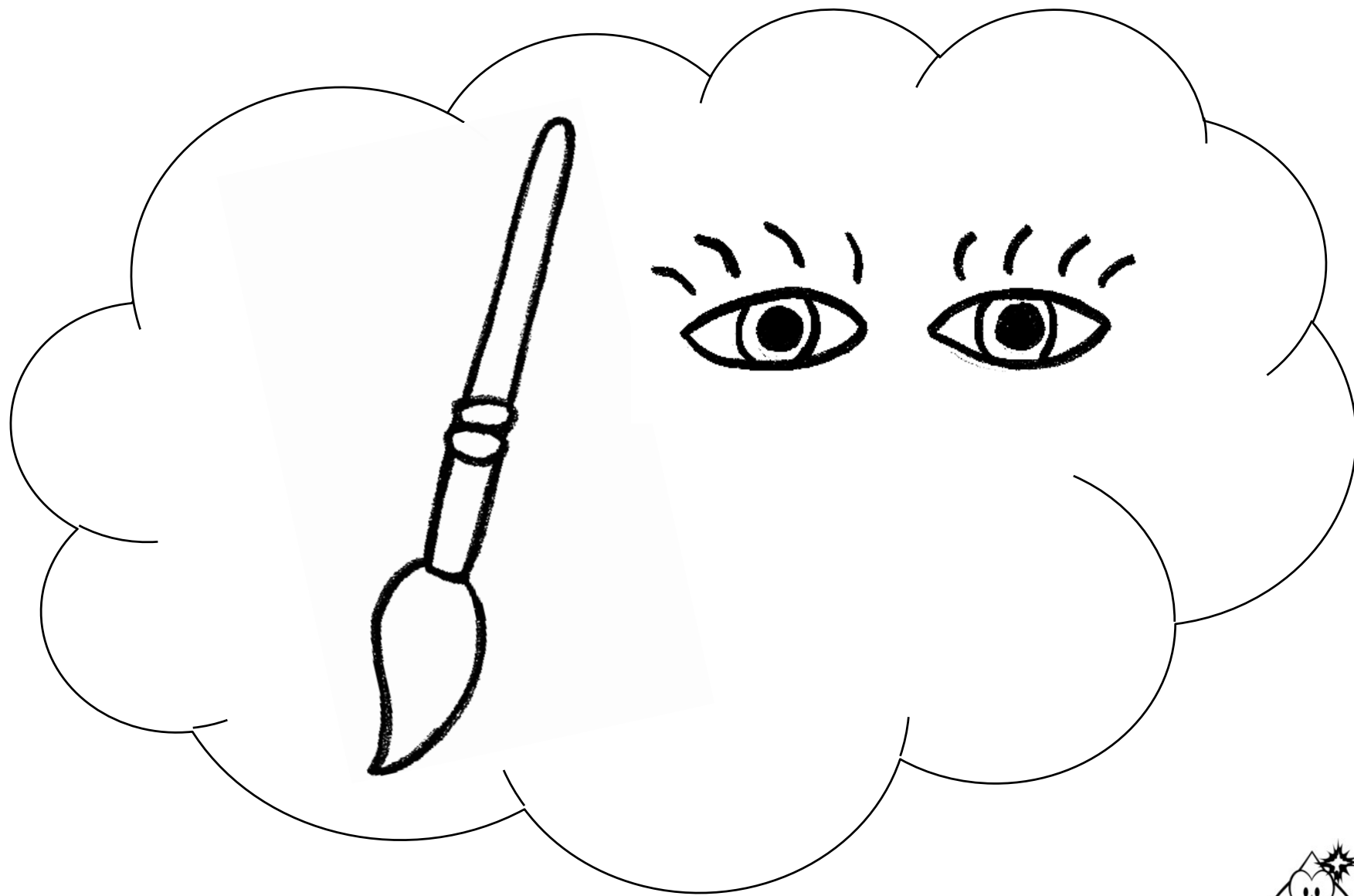


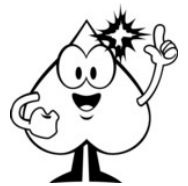
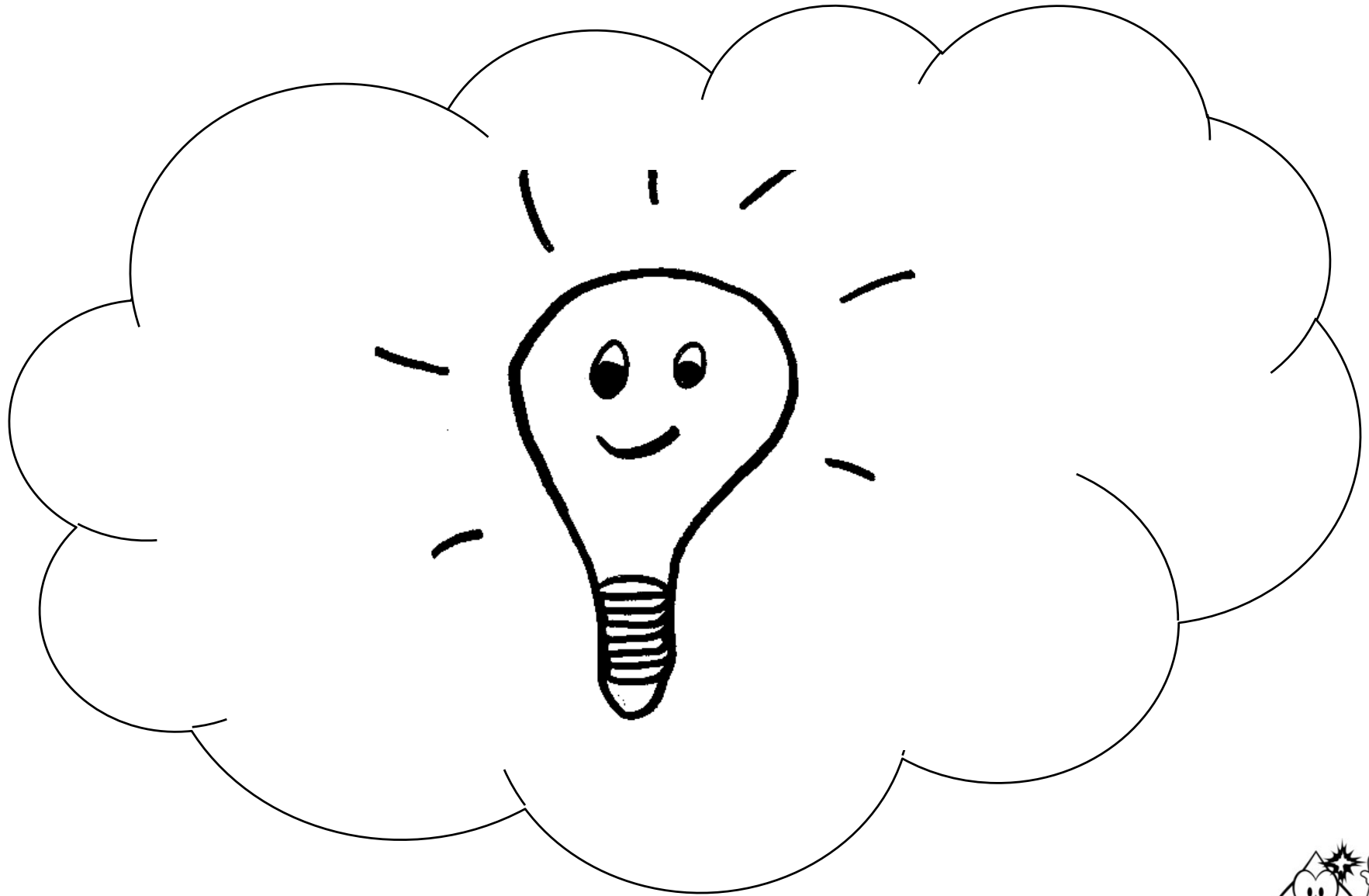
$$1 + 2$$

7,8,9











Zahlenkarten 0-100

1



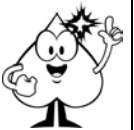
2



3



4



5



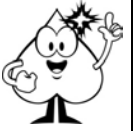
6



7



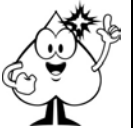
8



9



11



12



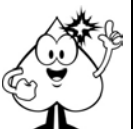
13



14



15



16



17



18



19



21



22



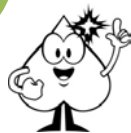
23



24



25



26



27



28



29



31



32



33



34



35



36



37



38



39



41



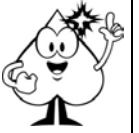
42



43



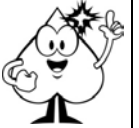
44



45



46



47



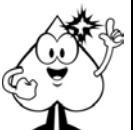
48



49



51



52



53



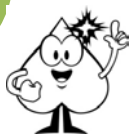
54



55



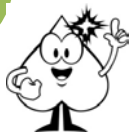
56



57



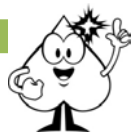
58



59



61



62



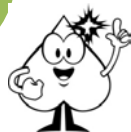
63



64



65



66



67



68



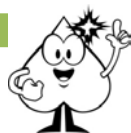
69



71



72



73



74



75



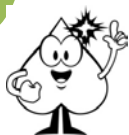
76



77



78



79



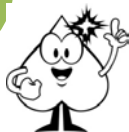
81



82



83



84



85



86



87



88



89



91



92



93



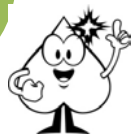
94



95



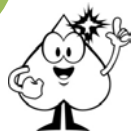
96



97



98



99



10



20



30



40



50



60



70



80



90



100





„Zahlen unter der Lupe“ bis 100

Name: _____

Datum: _____



1. Meine Zahl:

Schreibe das Zahlwort: _____



3. Anzahl zählen, legen, schieben, zeigen!

**Geh in die Matheecke!
Arbeite mit Material!**

Zeige einem Kind oder deiner Lehrerin was du gemacht hast!



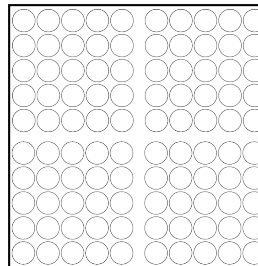
2. Male Zahlenbilder!

Zehner	Einer

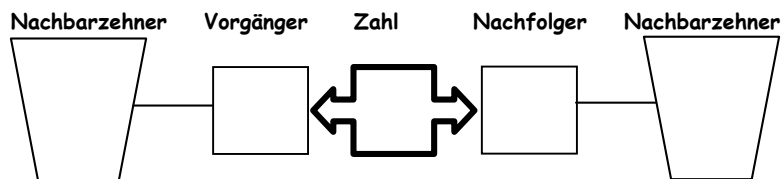


4. Zeichne ein!
Am Rechenstrich: _____

Am 100er Feld:



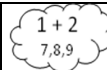
5. Nachbarzahlen finden!



6. Überlege!

- ☐ gerade
- ☐ ungerade

verdoppelt _____
halbiert _____



7. Zum Nachbarzehner rechnen!

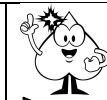
Zahl + _____ = Nachbarzehner

Zahl - _____ = Nachbarzehner



8. Mehr eigene Aufgaben finden!

(Z.B. auch Zerlegungshäuser, Zahlenmauern, Kettenaufgaben, Aufgaben mit dem Ergebnis deiner Zahl,...!)



9. Eigene Ideen!!



Geldbetrag
Was kannst du kaufen, wenn du so viele Euro hast?

Findest du diese Zahl im Kalender?

Findest du die Zahl auf der Uhr? Zeichne auf!

Warum magst du diese Zahl?

Schreibe eine Zahlen- oder Rechengeschichte die zu der Zahl passt!

Überlege weiter!!!

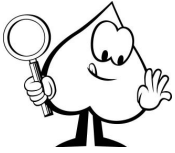
Schreibe die Ideen in dein Heft!



10. Sprich mit anderen Kindern über deine Ideen!

Erkläre, was du dir dabei gedacht hast!

Rechne mehr Aufgaben in deinem Heft!



„Zahlen unter der Lupe“ bis 100

Name:

Datum:



1. Meine Zahl:

Schreibe das Zahlwort:



2. Male Zahlenbilder!



3. Anzahl zählen, legen, schieben, zeigen, ... !

Geh in die Mathecke!
Arbeite mit Material!

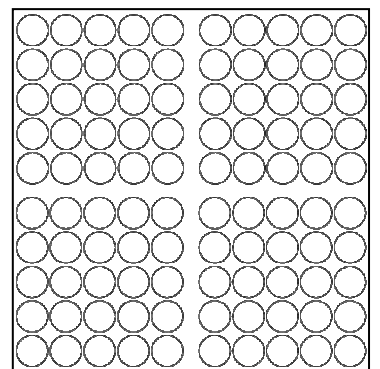
Zeige einem Kind oder deiner Lehrerin
was du gemacht hast!

Zehner	Einer



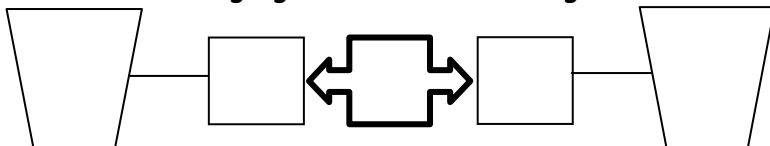
4. Zeichne ein!
Am Rechenstrich:

Am 100er Feld:



5. Nachbarzahlen finden!

Nachbarzehner Vorgänger Zahl Nachfolger Nachbarzehner



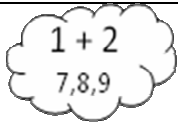
6. Überlege!

☐ gerade

☐ ungerade

verdoppelt _____

halbiert _____



7. Zum Nachbarzehner rechnen!

Zahl

+

=

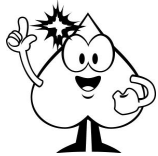
Nachbarzehner

Zahl

-

=

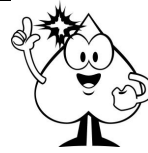
Nachbarzehner



8. Mehr eigene Aufgaben finden!

(Z.B. auch Zerlegungshäuser, Zahlenmauern, Kettenaufgaben, Aufgaben mit dem Ergebnis deiner Zahl,...!)

Rechne mehr Aufgaben in deinem Heft!



9. Eigene Ideen!!



Geldbetrag

Was kannst du kaufen, wenn du so viele Euro hast?

Findest du diese Zahl im Kalender?

Findest du die Zahl auf der Uhr? Zeichne auf!

Warum magst du diese Zahl?

Schreibe eine Zahlen- oder Rechengeschichte die zu der Zahl passt!

Überlege weiter!!!

Schreibe die Ideen in dein Heft!

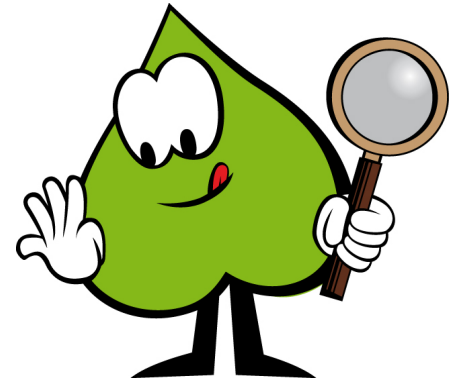


10. Sprich mit anderen Kindern über deine Ideen!

😊
😊 😊
Name:

Erkläre,
was du dir dabei gedacht hast!

Forscherauftrag:



Suche dir eine vorgegebene Zahl aus!
Klebe sie in dein Heft!

Nimm die Zahl genau „unter die Lupe“!

Was fällt dir zu dieser Zahl ein?
Schreibe alles genau auf.



Triff dich danach mit 1 oder 2 anderen
Kindern, die zu derselben Zahl geforscht
haben.

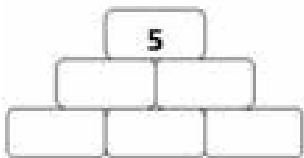
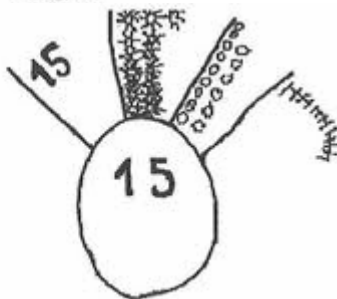
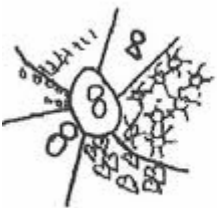
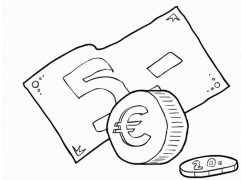
Erklärt euch gegenseitig eure Ideen.

PIKO' s Tipps

Erst schauen.  
Dann überlegen
und Ideen finden!



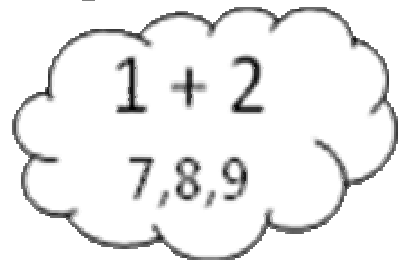
Solche Ideen hattest du auch:

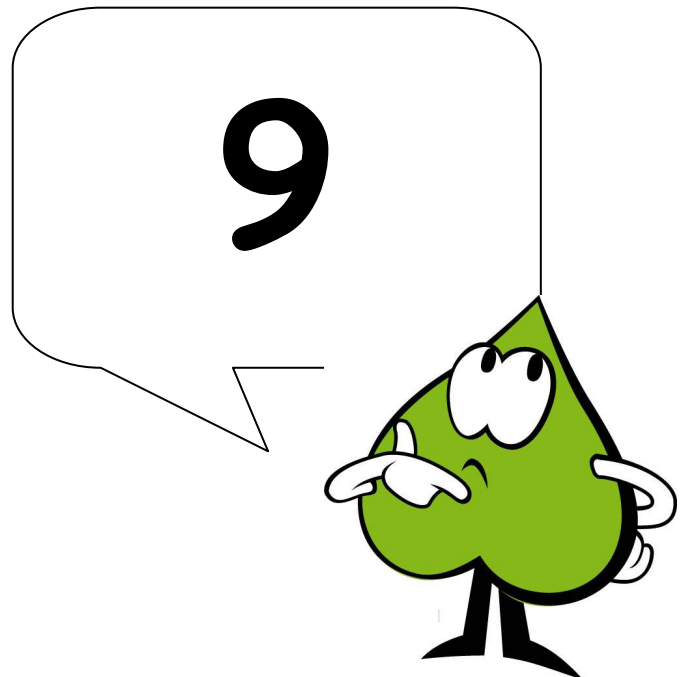
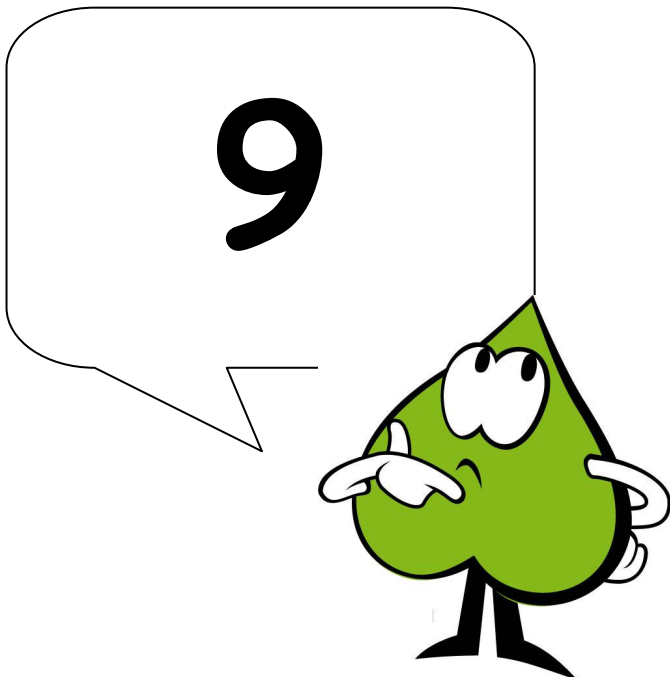
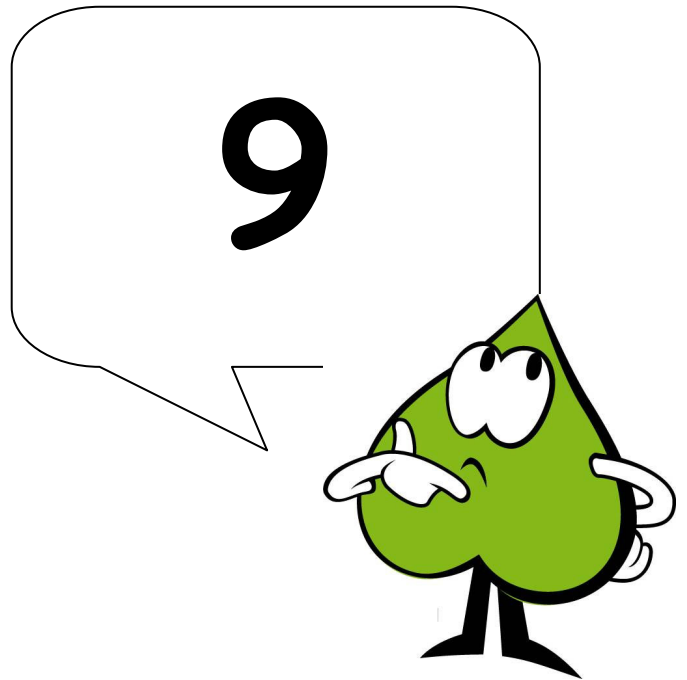
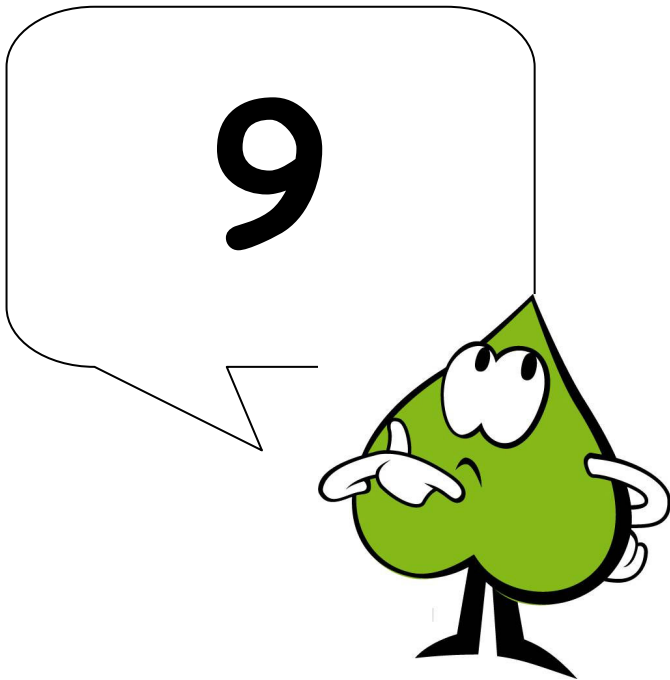


....?!?....

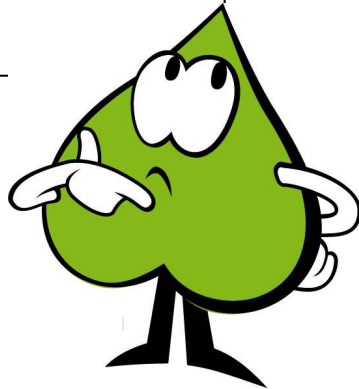
Zahlen- oder Rechengeschichte
aufschreiben!

Denke daran,
was du bei den
„Zahlen unter
der Lupe“ schon
erforscht hast!

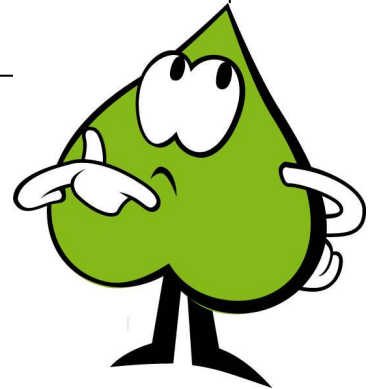




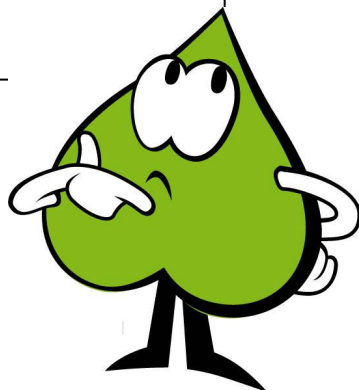
15



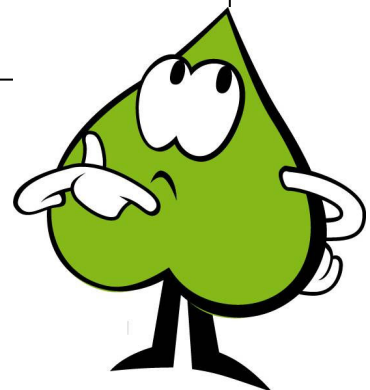
15



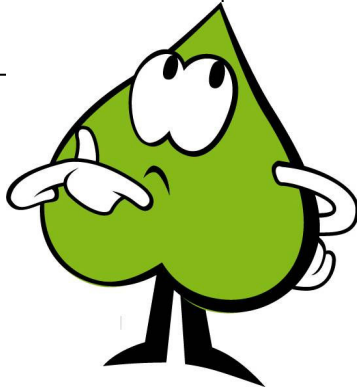
15



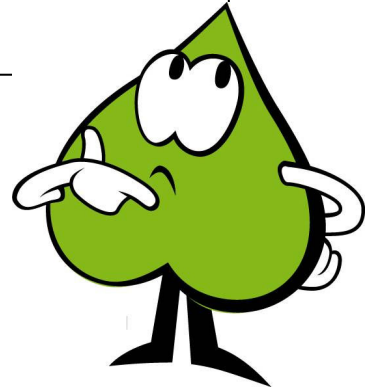
15



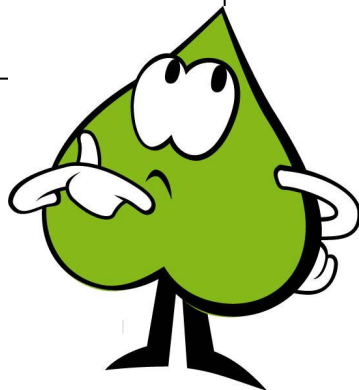
27



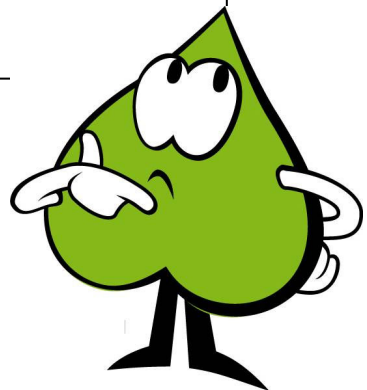
27



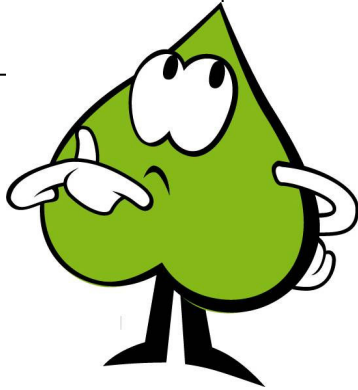
27



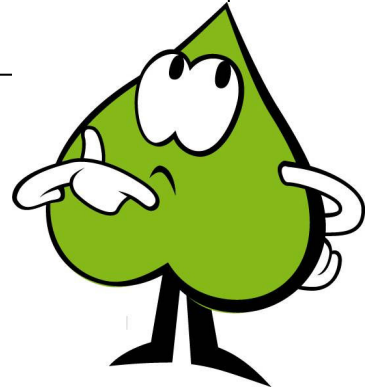
27



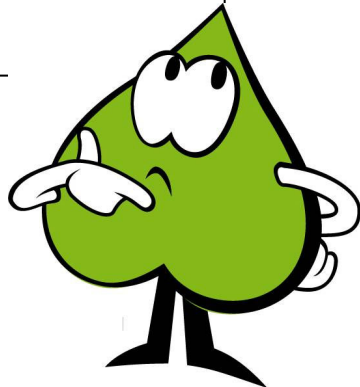
54



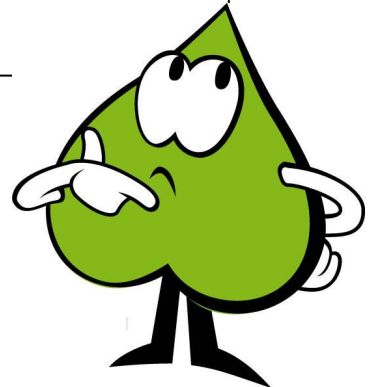
54



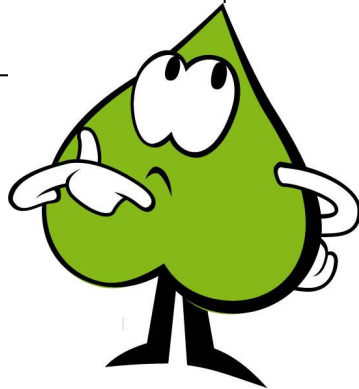
54



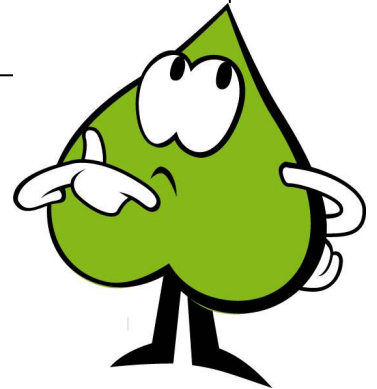
54



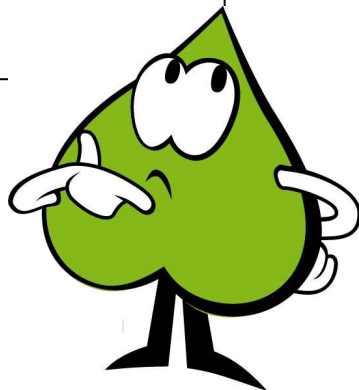
86



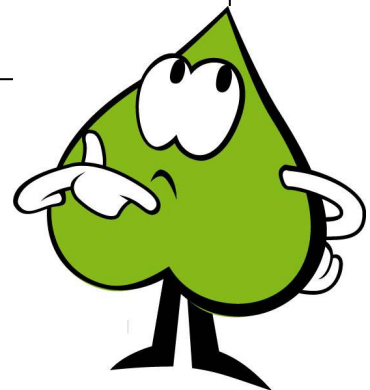
86

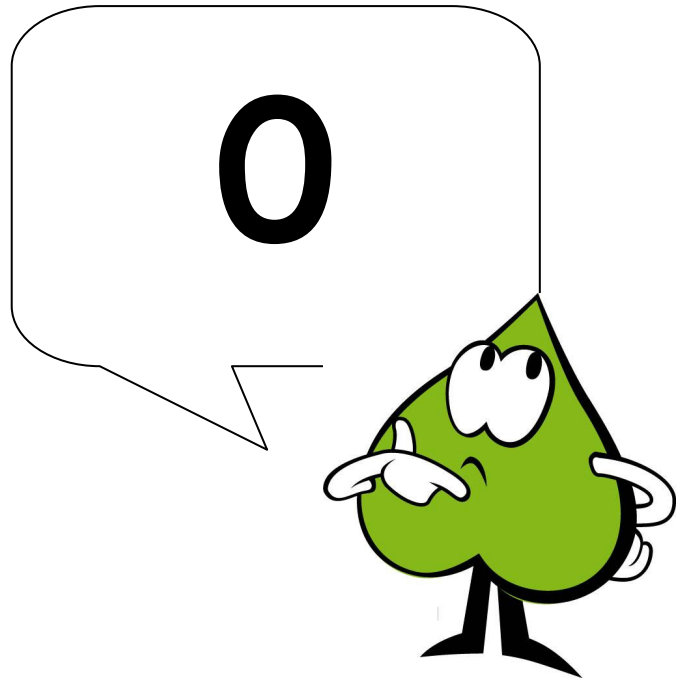
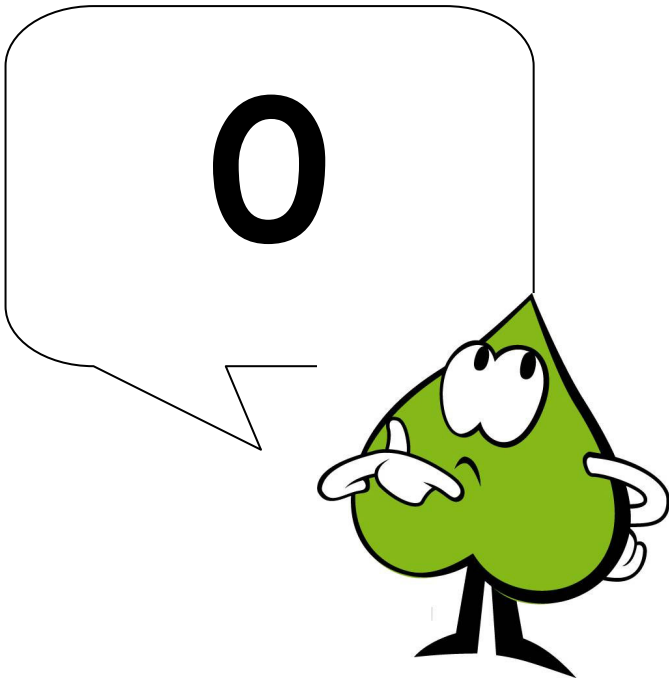
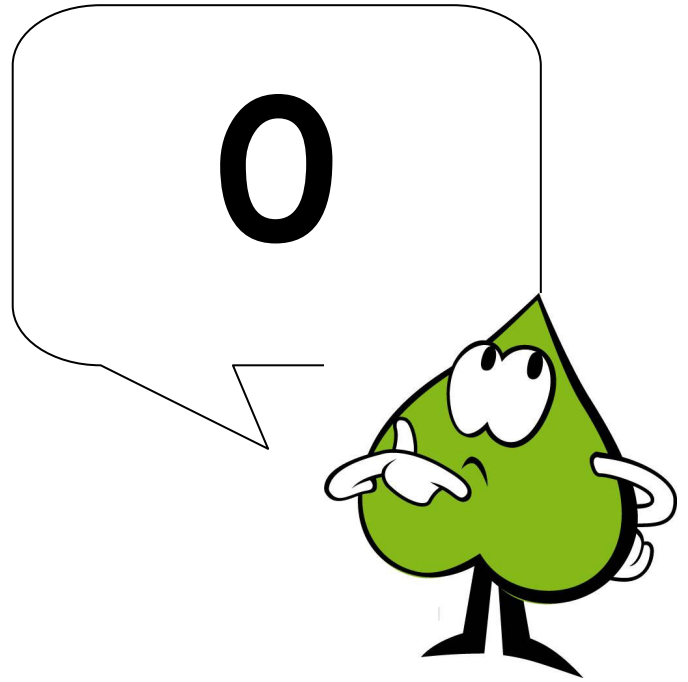
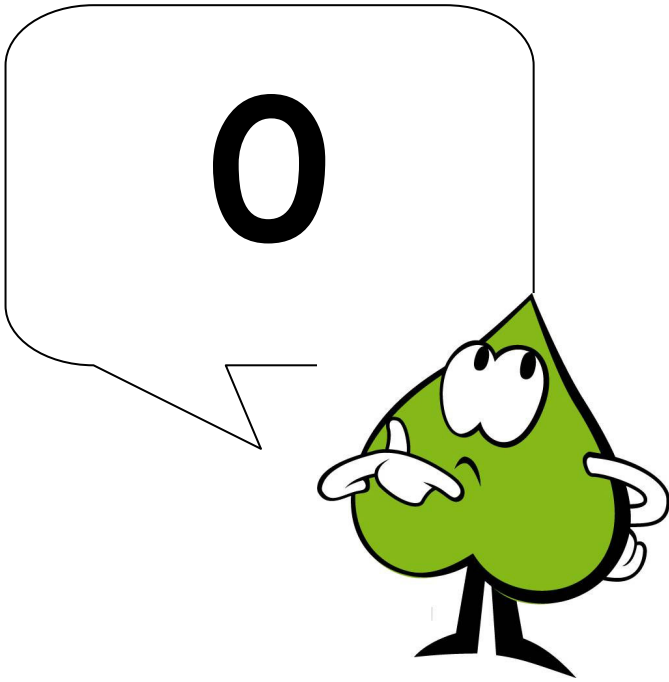


86

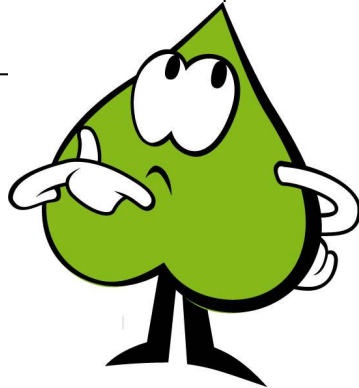


86

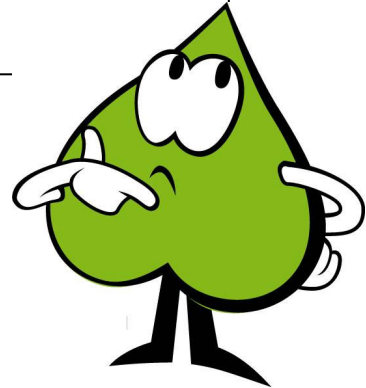




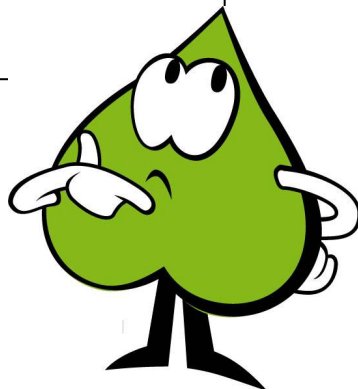
174



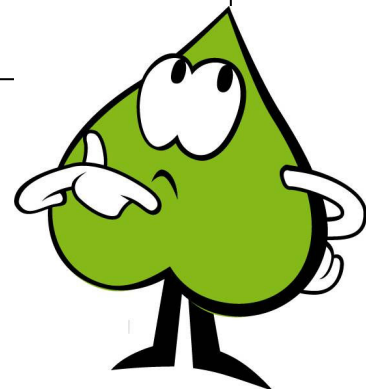
174

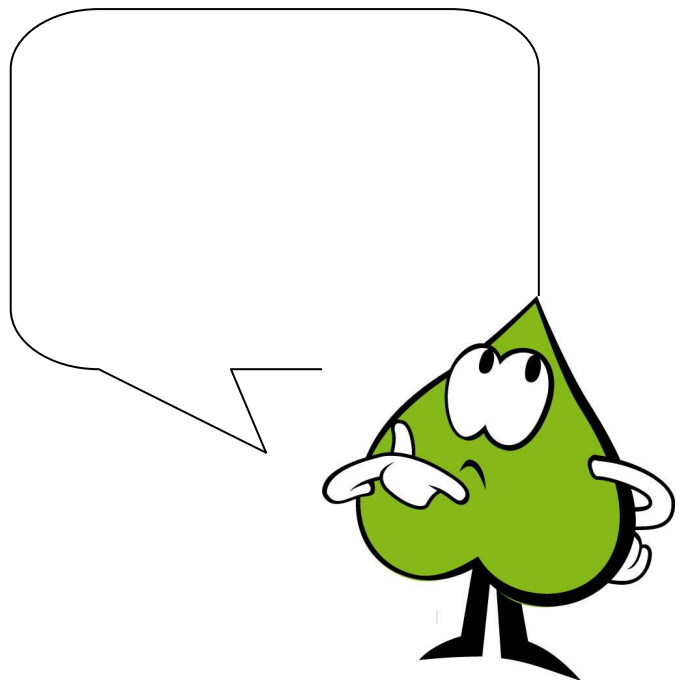
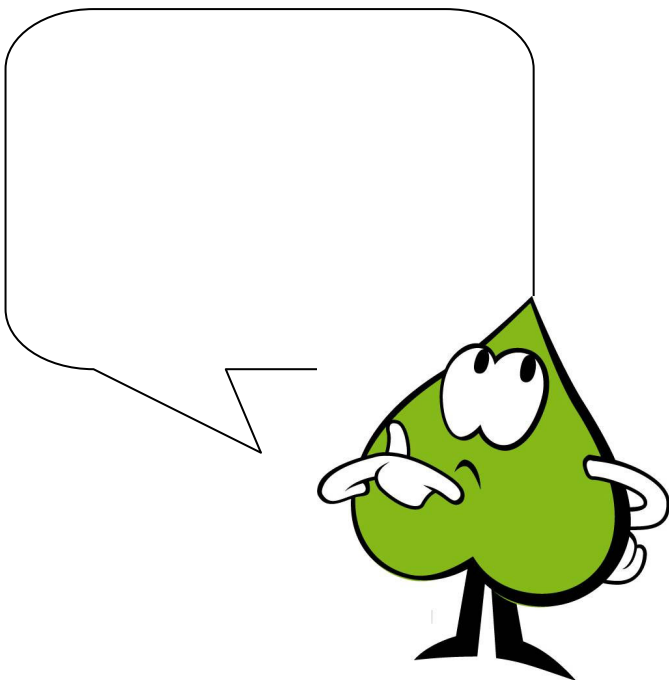
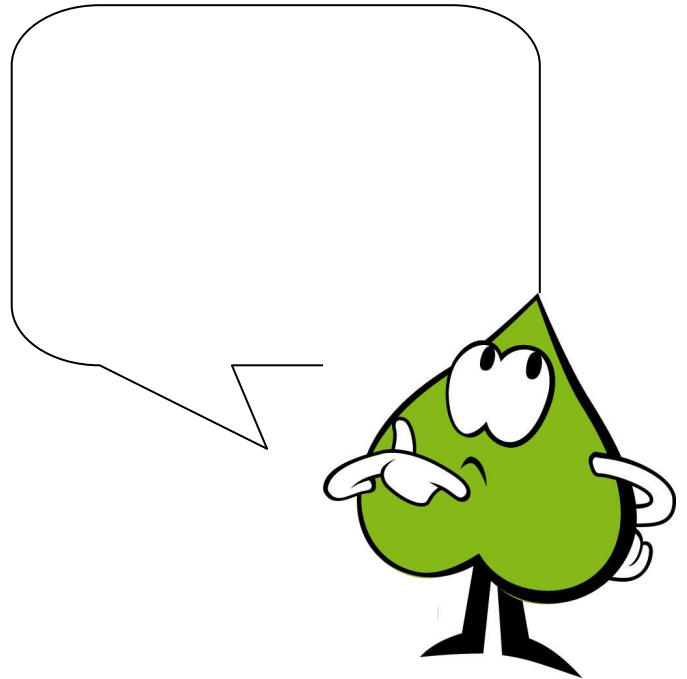
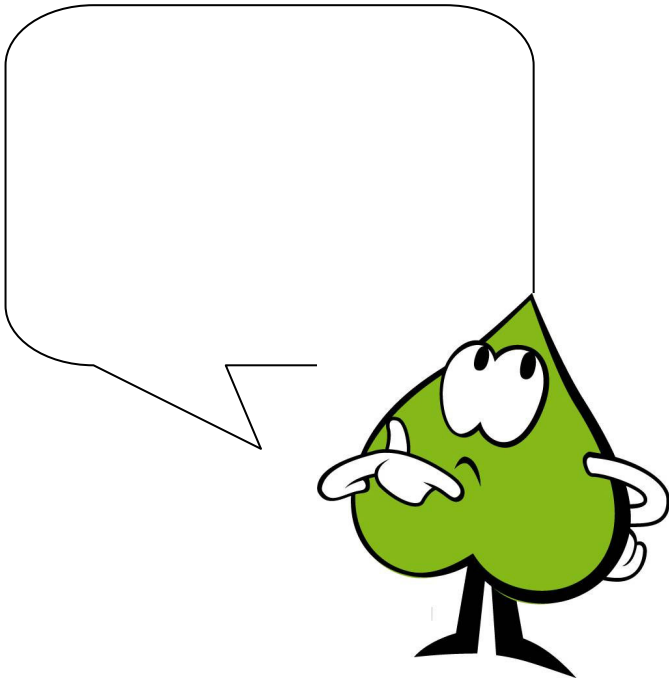


174



174







Informationspapier „Malquartett“

Ziele

Die Schülerinnen und Schüler können

- verschiedene Darstellungen von Multiplikationsaufgaben erkennen und zuordnen und üben sich auf diese Weise im Darstellungswechsel bei der multiplikativen Operation
- eigene Darstellungen anfertigen, indem sie eine vorgegebene Multiplikationsaufgabe in andere Darstellungen übertragen
- fachgerechte Begriffe für die Benennung der verschiedenen Darstellungen verwenden

Material

Das Malquartett besteht aus insgesamt 120 Karten – also 30 mal 4 Karten mit unterschiedlichen Darstellungen für 30 verschiedene Multiplikationsaufgaben des kleinen Einmaleins.

Die Karten sind in drei Differenzierungsstufen bezogen auf den Zahlenraum der Multiplikationsaufgabe unterteilt:

- Karten mit Multiplikationsaufgaben, deren Ergebnisse ≤ 20 sind
- Karten mit Multiplikationsaufgaben, deren Ergebnisse > 20 und ≤ 50 sind
- Karten mit Multiplikationsaufgaben, deren Ergebnisse > 50 und ≤ 100 sind

Ein Quartett setzt sich aus folgenden vier Darstellungen zusammen:



Schuljahr

2,3

Lehrplanbezug

Inhaltsbezogene Kompetenzen

Zahlen und Operationen

Schwerpunkte

- Zahlvorstellungen
- Operationsvorstellungen

Prozessbezogene Kompetenzen

Modellieren

Darstellen und Kommunizieren

Material

Malquartett demo

Wortspeicher (evtl. größer kopieren)

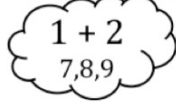
Malquartett

Pappe oder Laminierfolien

Wolken in groß

Es folgen einige Erklärungen zu den vier Darstellungen:

Rechenaufgabe



- **Rechenaufgabe:**

Die Multiplikationsaufgaben sind bereits vorgegeben. In das leere Feld sollen die Kinder die passende Additionsaufgabe schreiben. Kinder haben oft Schwierigkeiten, die Herleitung der Multiplikation aus der Addition vorzunehmen und zu begründen. Dies soll hier insbesondere angesprochen und vertieft werden. Die Lehrperson sollte darüber hinaus im Unterricht weitere Handlungsanlässe anbieten, um die Zusammenhänge zu verdeutlichen.

Rechengeschichte



- **Rechengeschichte:**

Hier sollen die Kinder eine passende Rechengeschichte zu der Multiplikationsaufgabe entwickeln und aufschreiben. Mit den Kindern sollte thematisiert werden, dass es für das spätere Spielen mit dem Quartett notwendig ist, dass die Rechengeschichte verständlich ist, eindeutig zu der Rechenaufgabe passt und ordentlich aufgeschrieben wird. Für die Kinder ist es eventuell leichter, zunächst eine kleine Skizze zu malen, zu der sie anschließend eine Rechengeschichte schreiben (siehe Malquartett demo). Für die Skizze ist oberhalb von den Zeilen noch Platz. Damit die Kinder die Rechengeschichte ordentlich auf das Quartett schreiben können, hat es sich als sinnvoll herausgestellt, dass die Kinder die Rechengeschichte zunächst auf einem separaten Papier vorschreiben und kontrollieren lassen, bevor sie diese übertragen.

Das Entwickeln von passenden Rechengeschichten ist anspruchsvoll und erfordert von der Lehrperson weitere Unterrichtszeit zur Thematisierung. Hier können die Kinder allerdings Mathematik in den Alltag übersetzen und umgekehrt. Es können Rollenspiele zu bestimmten Handlungen im Plenum gespielt werden oder Rechengeschichten können als Bildergeschichten aufgezeichnet werden.

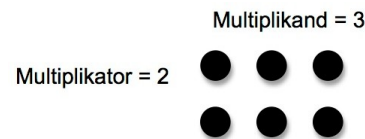
Bilder

• Bilder:



Die Kinder sollen im ersten Schritt die Multiplikationsaufgabe im Hunderterfeld einzeichnen, indem sie das zugehörige Punktfeld markieren – z. B. durch Umkreisen oder Einfärben des Punktfeldes. Es ist wichtig, dass der Unterschied zwischen Multiplikator und Multiplikand sichtbar wird.

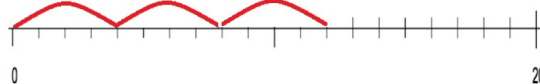
zum Beispiel: die Aufgabe 2×3 als Punktfeld



Wenn die Punktfelder noch nicht als Darstellungsmittel einer Multiplikationsaufgabe eingeführt wurden, sollte dies vor der Herstellung des Quartetts geschehen.

Im zweiten Schritt sollen die Kinder die Multiplikationsaufgabe als Sprünge am Zahlenstrahl eintragen. Hier gilt, dass der Zahlenstrahl gut eingeführt sein muss, damit alle Kinder ihre Darstellungen an ihm vollziehen können.

zum Beispiel: die Aufgabe 3×4 am Zahlenstrahl



Die Übertragung der Aufgabe in ein Punktfeld und auf den Zahlenstrahl unterstützt den Aufbau der Operationsvorstellung in zweierlei Hinsicht: Der kardinale Blick auf eine Menge wird geschult (Punktbild) und ebenso der linear ausgerichtete Blick am Zahlenstrahl. Gleichzeitig wird deutlich, mit welcher Darstellungsweise das einzelne Kind besser zurechtkommt.

eigene Idee

• eigene Idee:



Hier können die Kinder eigene Ideen passend zu der vorgegebenen Multiplikationsaufgabe entwickeln. Die Lehrperson kann die Kinder ggf. dazu anregen, hier ein Bild aus dem Alltag zu der



Kind zeichnet die Aufgabe 5×3 am großen Hunderterfeld an der Tafel ein



Kind zeichnet die Aufgabe 3×4 am großen Zahlenstrahl an der Tafel ein

Rechenaufgabe zu malen. Mögliche weitere Impulse:

- Zeitungsausschnitte von Verpackungen o.ä. ausschneiden und aufkleben
- Zeichnungen von konkretem Material (Bonbons, Tische und Stühle in der Klasse etc.)
- Zeichnungen von abstraktem Material (Punktebilder, Strichlisten etc.)

Dabei muss das Bild nicht zu der Rechengeschichte passen. Die Kinder sollten an dieser Stelle mindestens zwei eigene Ideen entwickeln, die sie aufmalen bzw. aufkleben (siehe Malquartett demo).

Handeln



Zusätzlich gibt es eine Wolke, auf der eine Hand abgebildet ist.

Diese steht für Handlungen, die das Kind mit didaktischem Material oder Alltagsmaterial ausführen kann. Die Handlungen am Material sind wichtig und können die Kinder überdies bei dem Finden von eigenen Ideen unterstützen. Dazu sollte man den Kinder genügend Materialien zur Verfügung stellen wie z. B. Wäscheklammern, Steckwürfel, Spielgeld, Spielwürfel etc.



Kind legt die Aufgabe $6 \cdot 2$ mit Steckwürfel

Kind legt die Aufgabe $5 \cdot 3$ mit Spielwürfel



Vorbereitung und Herstellung

Die beschriebenen Darstellungen müssen vor der Herstellung des Quartetts mit den Kindern besprochen werden. Anhand der Demoversion des Malquartetts und den großen Wolken

kann dies gut im Tafelkreis geschehen. Auf diese Weise erfahren die Kinder, was passende Darstellungen für eine Multiplikationsaufgabe sind und können dieses Wissen später auf andere Multiplikationsaufgaben übertragen. Ein Wortspeicher kann die Einführung der fachgerechten Begriffe erleichtern. Außerdem ist dieser sinnvoll, damit die im Folgenden vorgeschlagenen Spiele sprachbegleitend gespielt werden können. Der Wortspeicher ist so angelegt, dass dieser noch durch eigene Anmerkungen erweitert werden kann.

Das Malquartett wird ausgedruckt, die Karten werden ausgeschnitten und auf Blanko-Karten (aus Pappe) geklebt oder später laminiert. (Das Quartett kann auch direkt auf stärkeres Papier ausgedruckt und dann ausgeschnitten werden.)

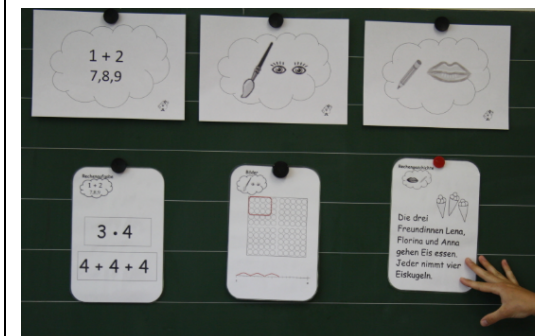
Die Kinder erhalten jeweils vier Karten, wobei die Multiplikationsaufgabe bereits vorgegeben ist. Die Lehrperson kann die unterschiedlichen Zahlenräume der Rechenaufgaben zur Differenzierung nutzen. Nun sollen die Kinder die eigenen Karten zunächst selbst gestalten. Anschließend treffen die Kinder sich in Kleingruppen und stellen sich gegenseitig ihre Arbeitsergebnisse vor und geben sich ggf. Tipps zur Verbesserung. Abschließend sollte die Lehrperson die Karten kontrollieren und die Kinder ggf. auf Verbesserungen hinweisen.

So kann es gehen – mögliche Spielanleitungen

Alle Spiele können mit beliebig vielen Quartetten gespielt werden, wobei darauf geachtet werden sollte, dass die Kinder ihre Karten so in der Hand halten bzw. so auf dem Tisch verteilen können, dass sie nicht den Überblick verlieren. Die Anzahl der Quartette ist natürlich auch immer abhängig von der Spieleranzahl.

Quartett ☺☺-☹☹☺☺

Die Karten werden zunächst gemischt und verdeckt an die Kinder verteilt. Dabei erhalten einige Kinder unter Umständen eine Karte mehr als andere. Wer ein passendes Quartett bei sich entdeckt, kann dieses direkt vor sich auf einem Stapel ablegen. Der Spieler links vom Kartengeber beginnt das Spiel und fragt einen beliebigen Mitspieler nach einer eindeutig bezeichneten Karte, die ihm zur Bildung eines Quartetts fehlt – z. B. „Lisa, hast du die Rechengeschichte, die zu der Aufgabe $3 \cdot 4$ passt?“. Wenn das angesprochene Kind die genannte Karte hat, muss es sie abgeben. Das angesprochene Kind ist



Einführung im Kreis anhand der großen Wolken und dem Demo Malquartett

als nächstes an der Reihe. Es wird so lange weiter gefragt, bis alle Quartette komplett sind. Wer die meisten Quartette vor sich liegen hat, hat gewonnen.

Karten zuordnen ☺/☺☺

Alle Karten werden gemischt und mit der Bildseite nach oben ausgelegt. Die Kinder suchen alleine oder zusammen bzw. abwechselnd mit einem Partner die passenden Quartette zusammen.

Wer hat die passende Karte ☺☺-☺☺☺☺☺☺ und ein Spielleiter

Ein Spielleiter behält alle Karten einer Darstellung (z. B. alle Karten mit der Rechengeschichte) und verteilt die übrigen Karten gleichmäßig an die Kinder. Jedes Kind legt seine Karten offen vor sich auf den Tisch. Nacheinander wird allen Kindern eine Karte gezeigt und z. B. gefragt „Wer hat eine Karte mit der passenden Malaufgabe?“. Da es nun sein kann, dass mehrere Kinder eine passende Karte haben, darf das Kind, das am schnellsten seine Karte zeigt, diese vor sich auf einen Stapel legen. Wenn der Spielleiter alle Karten einmal gezeigt hat, werden die Karten gemischt und erneut gezeigt. Das Spiel endet, sobald ein Kind alle Karten ablegen konnte.

Spielvariante: Der Spielleiter behält Karten mit unterschiedlichen Darstellungen, die übrigen Karten werden gleichmäßig verteilt. Es wird wie oben beschrieben gespielt.

Anmerkung: Um die Multiplikationsaufgaben möglichst schnell erkennen bzw. zuordnen zu können, bieten sich mehrere Möglichkeiten der Anordnung auf dem Tisch an. Die Kinder sollten dazu angeregt werden, zu überlegen und zu begründen, wie sie möglichst schnell eine Multiplikationsaufgabe erkennen können.

Weiterarbeit

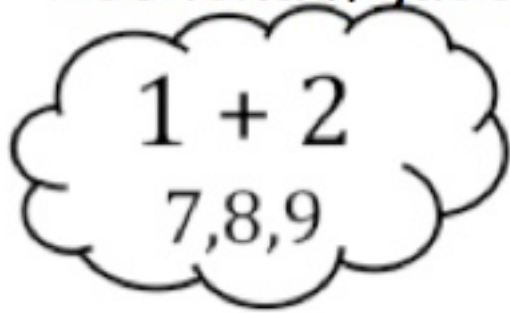
Das Malquartett wird in das Matheregal eingestellt und die Kinder können es in freien Arbeitsphasen spielen. Neben den vorgeschlagenen Spielvarianten können die Kinder eigene Spielideen entwickeln, ausprobieren, aufschreiben, diskutieren und überarbeiten.

Wie oben angedeutet wurde, sind bei der Thematisierung der Multiplikation das Üben des Darstellungswechsels und die Diskussion über die Zusammenhänge zur Addition besonders wichtig. Nimmt man sich die Zeit, die Multiplikation im Lebensalltag der Kinder zu suchen, so bringt das besonders viele Einsichten. Vor allem auch, um die unterschiedlichen Grundvorstellungen der Multiplikation herauszustellen (zeitlich-sukzessiver Aspekt, räumlich-simultaner Aspekt, Vergleichsaspekt, kombinatorischer Aspekt) (vgl. auch Radatz/Schipper: Handbuch für den Mathematikunterricht. 2. Schuljahr, S. 81ff).



Beispiel für ein fertiges Malquartett zu der Aufgabe $9 \cdot 6$

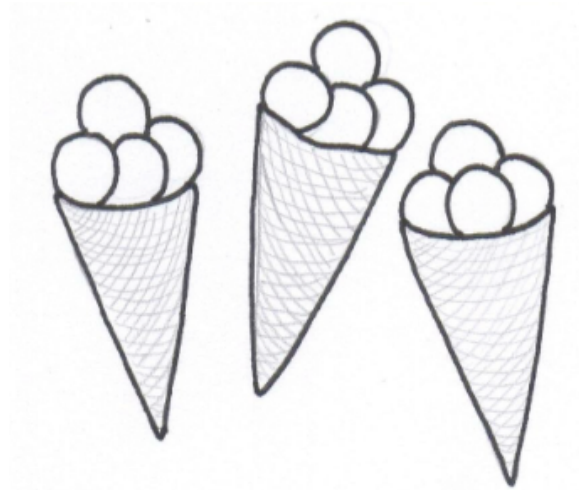
Rechenaufgabe



$$3 \cdot 4$$

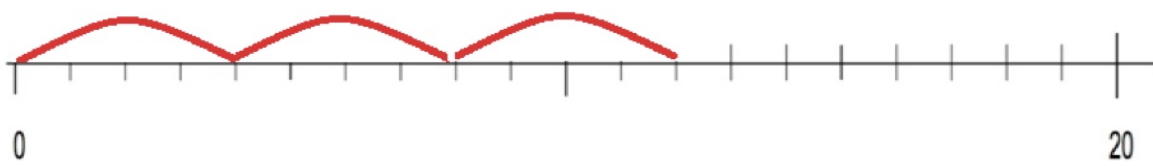
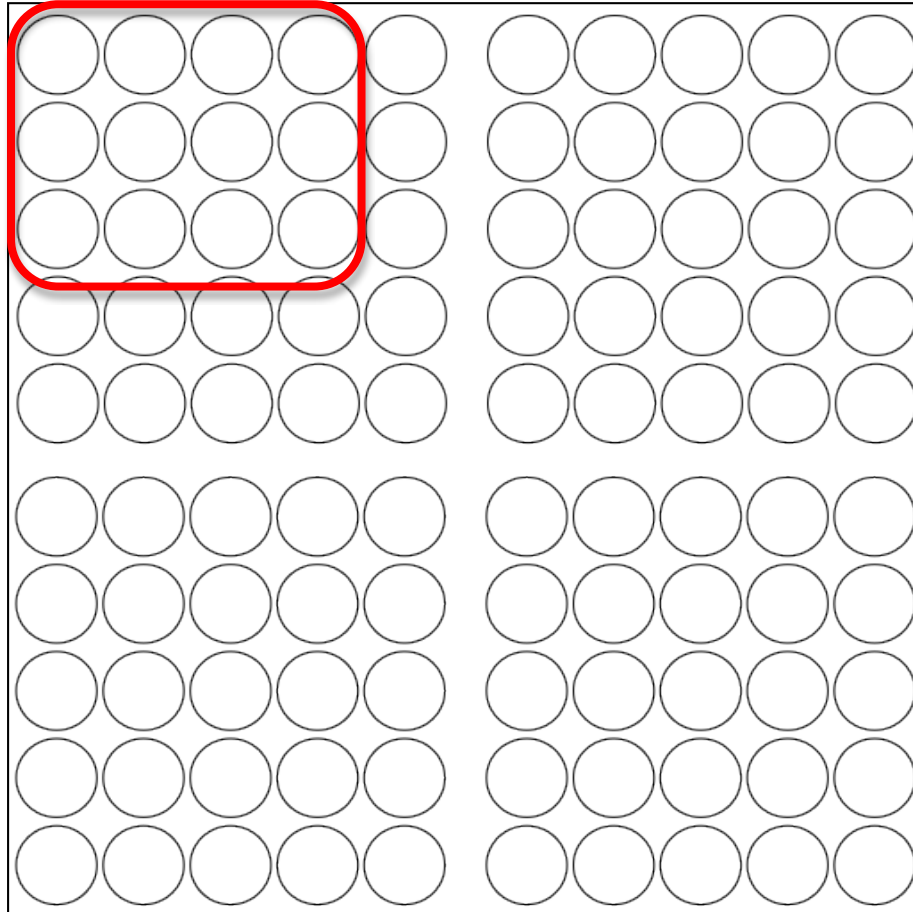
$$4 + 4 + 4$$

Rechengeschichte

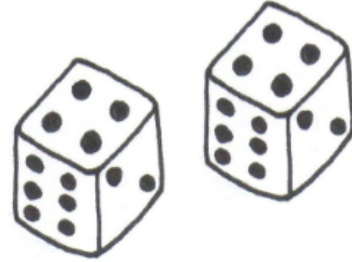
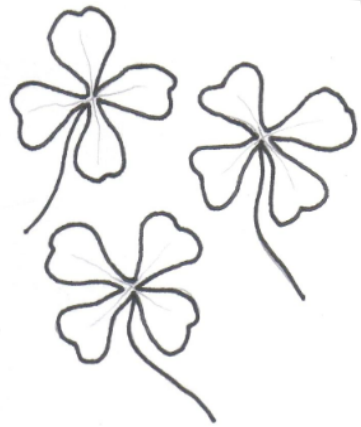
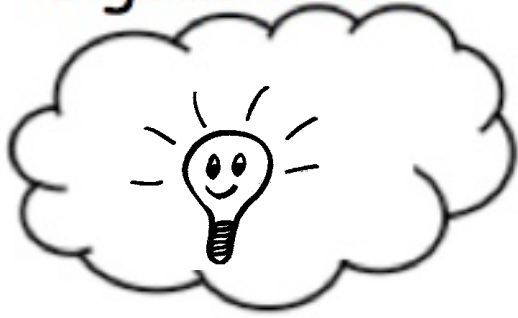


Die drei
Freundinnen Lena,
Florina und Anna
gehen Eis essen.
Jeder nimmt vier
Eiskugeln.

Bilder



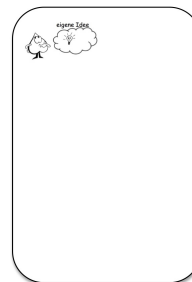
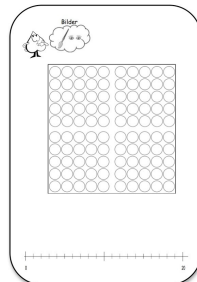
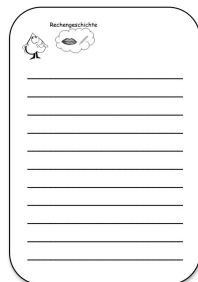
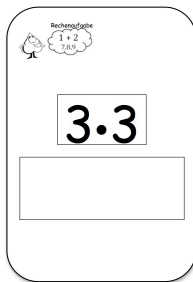
eigene Idee





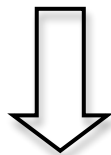
Unser Wortspeicher „Das Malquartett“

das Malquartett



Malaufgabe

$$3 \cdot 4$$

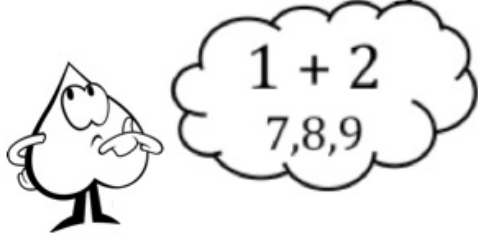


Plusaufgabe

$$4 + 4 + 4$$

die Darstellungen

Rechenaufgabe



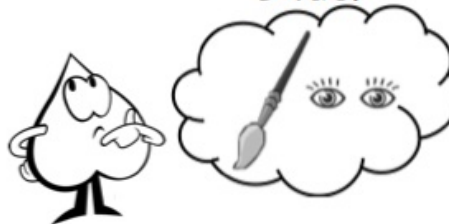
Rechengeschichte



eigene Idee



Bilder

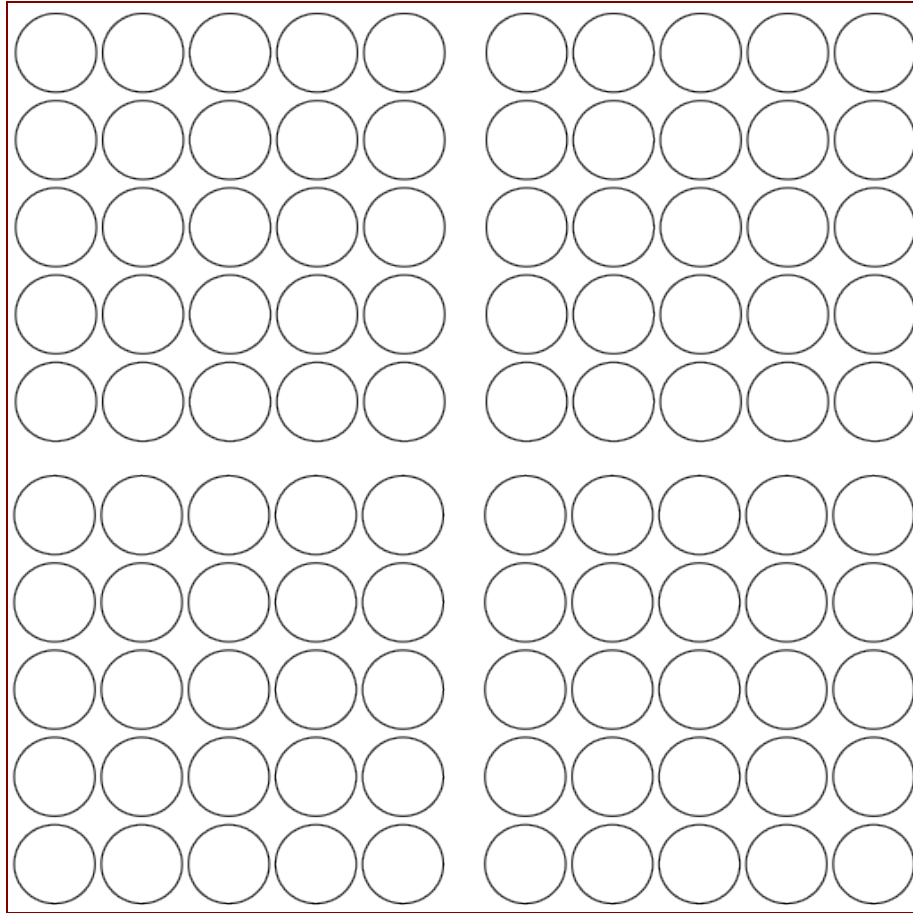


Hast du die

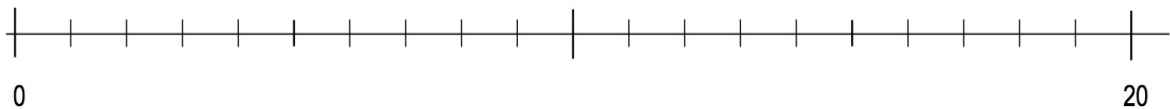
- Rechenaufgabe
- Rechengeschichte
- Bilder
- eigene Idee

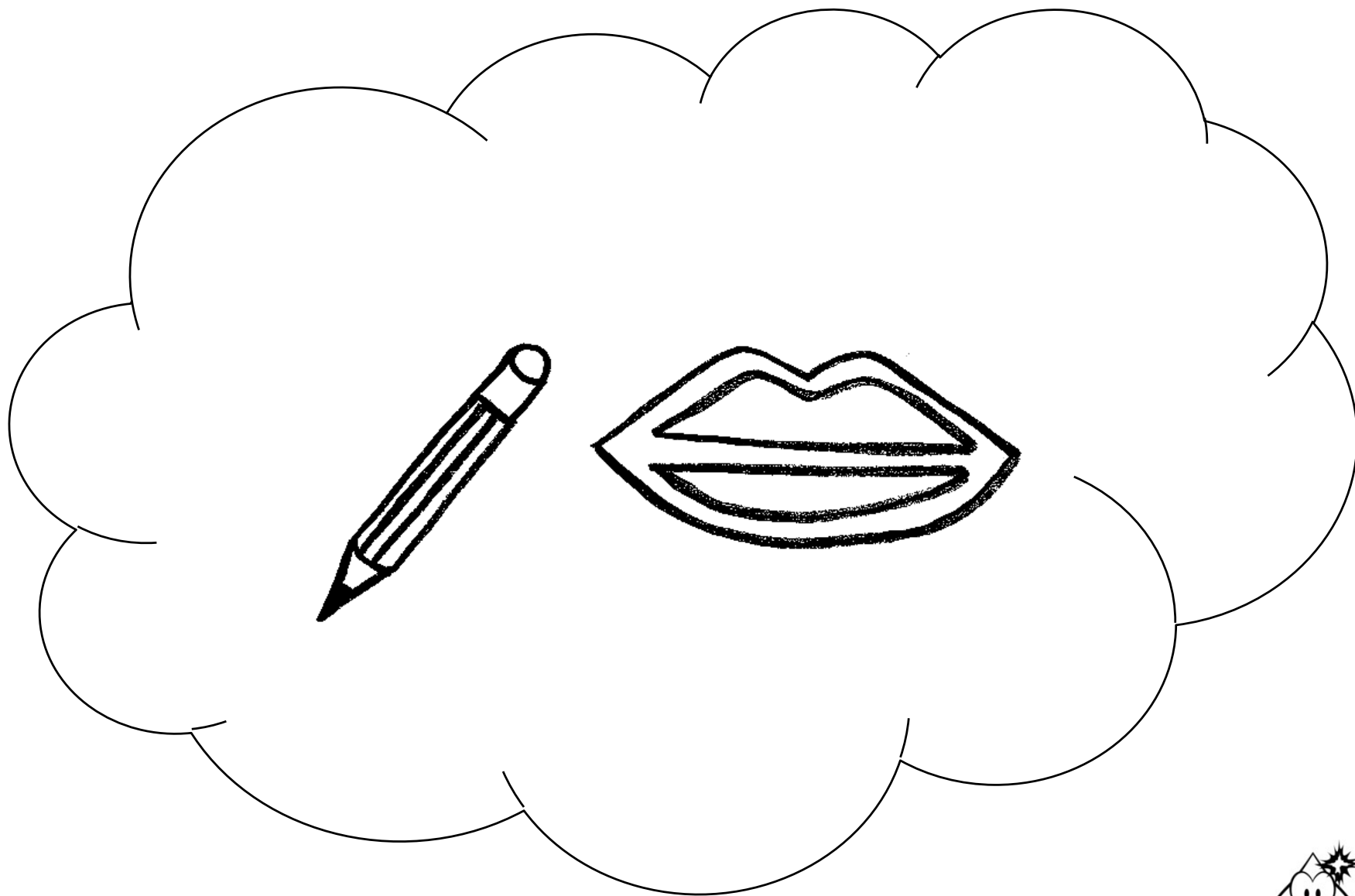
die zu der Malaufgabe _____
passt/passen?

das Punktefeld



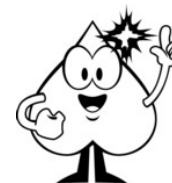
der Zahlenstrahl

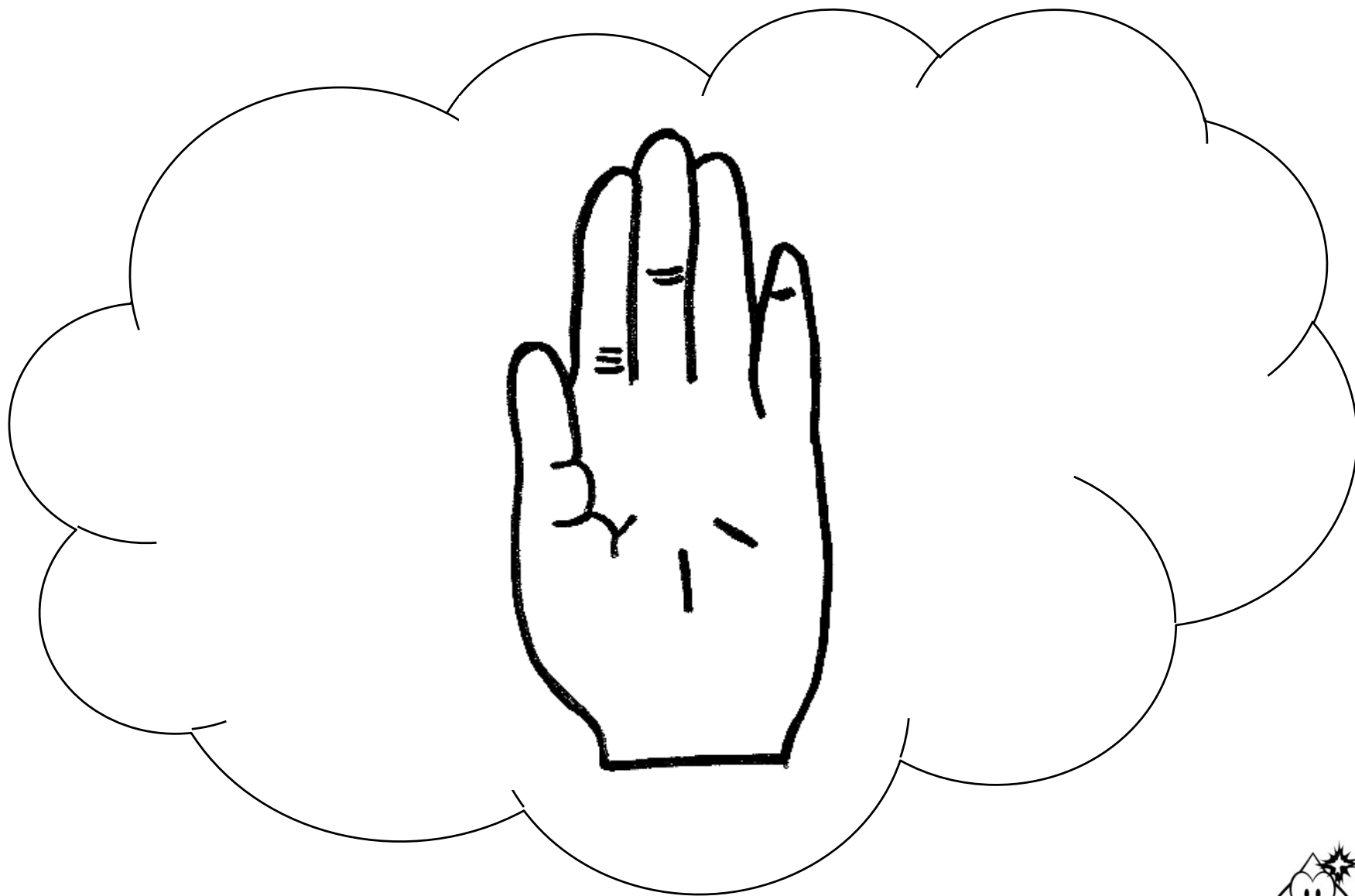


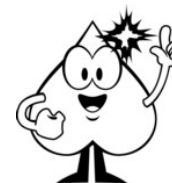
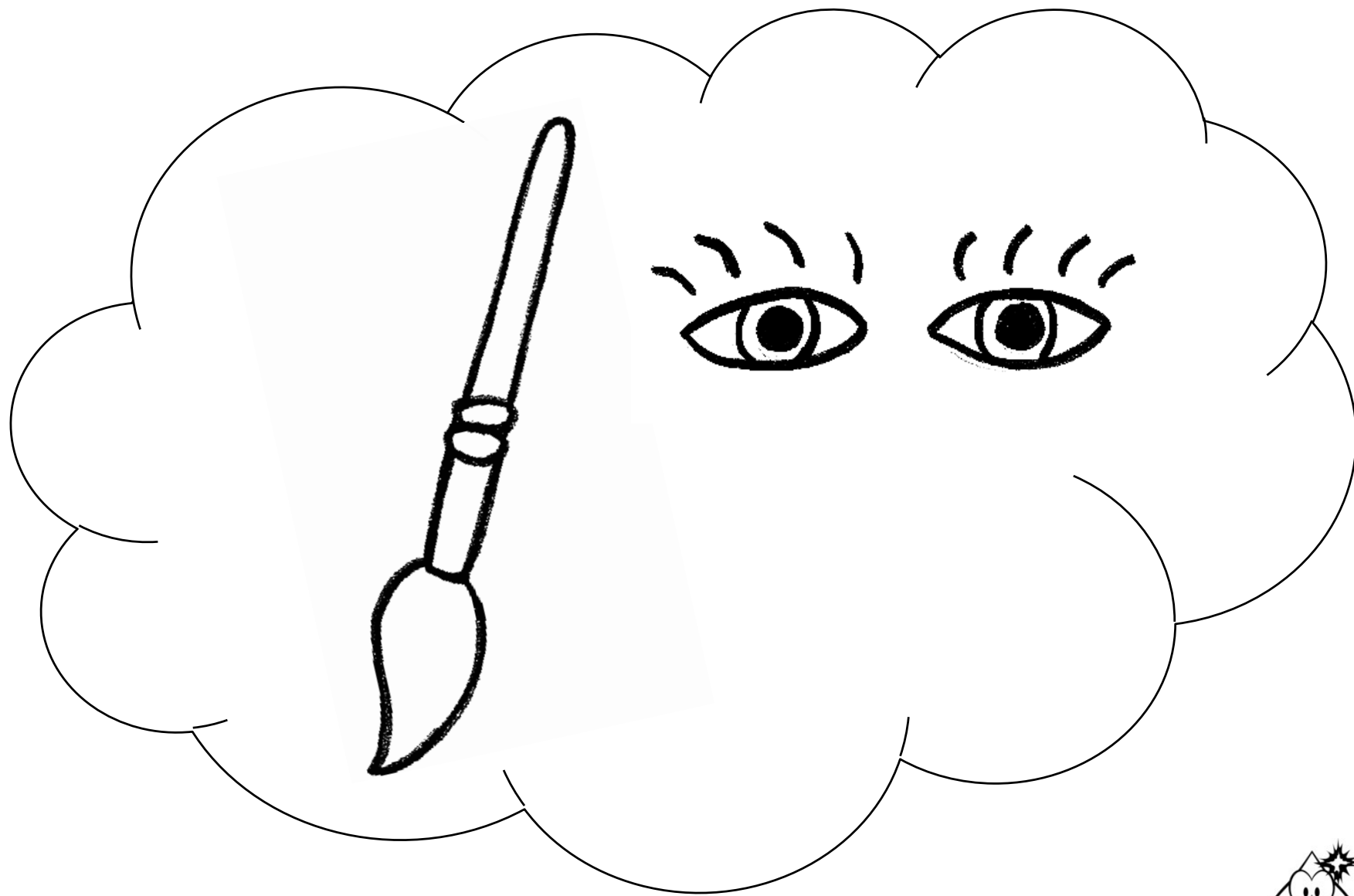


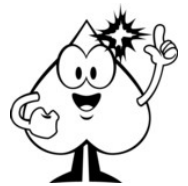
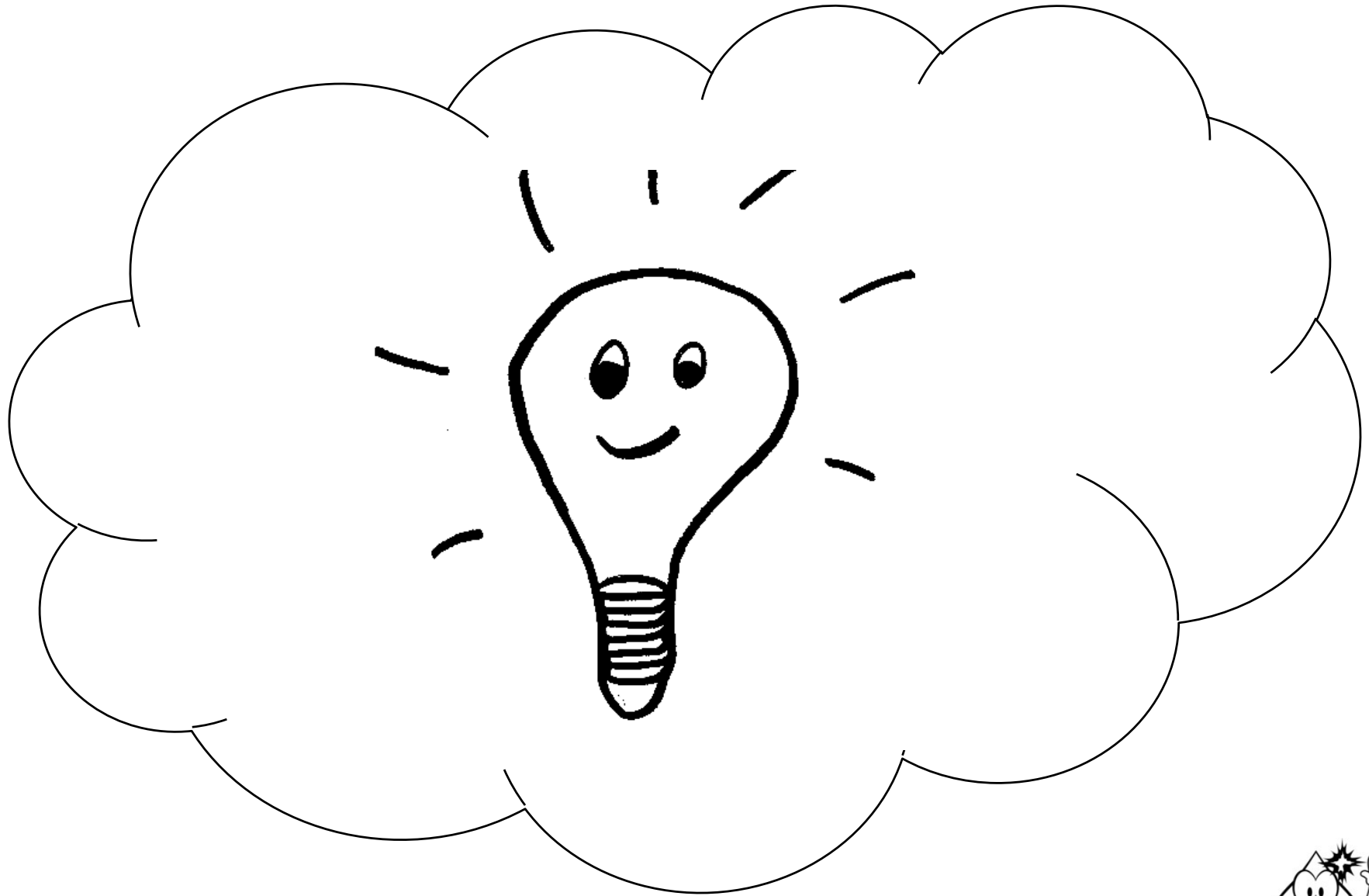
$$1 + 2$$

7,8,9





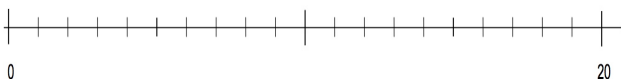




$$1 + 2_{7,8,9}$$

3.3

--

[illegible]A large rectangular area containing a 10x10 grid of small circles, intended for students to place dots representing data points.

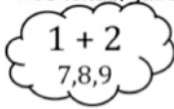
$$\begin{array}{c} 1 + 2 \\ 7, 8, 9 \end{array}$$

4.4

--

[illegible]A large rectangular area containing a 10x10 grid of small circles, intended for counting practice. The grid is divided into two equal halves by a vertical line. Each half contains 5 rows and 10 columns of circles, for a total of 100 circles.

Rechenaufgabe



3.6

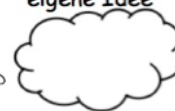
Rechengeschichte



Bilder



eigene Idee

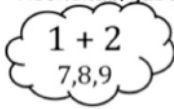


7.2

--

[illegible]A large rectangular area containing a 10x10 grid of small circles, intended for counting practice. The grid is divided into two equal halves by a vertical line. Each half contains 5 rows and 10 columns of circles, for a total of 100 circles.

Rechenaufgabe



2.8

Rechengeschichte



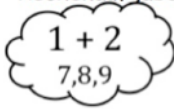
Bilder



eigene Idee



Rechenaufgabe



6.2

Rechengeschichte



Bilder



eigene Idee



$$1 + 2_{7,8,9}$$

4.5



A large rectangular area containing a 10x10 grid of small circles, intended for a dot marker activity. The grid is divided into two equal halves by a vertical line. Each half contains 5 rows and 10 columns of circles, for a total of 100 circles.

$$1 + 2_{7,8,9}$$

5.3

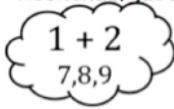
[illegible]A large rectangular area containing a 10x10 grid of small circles, intended for students to place dots representing data points.

$$1 + 2_{7,8,9}$$

4.3

[illegible]A large rectangular area containing a 10x10 grid of small circles, intended for a dot marker activity. The grid is divided into two equal halves by a vertical line. Each half contains 5 rows and 10 columns of circles, for a total of 100 circles.

Rechenaufgabe



2.5

Rechengeschichte



Bilder



eigene Idee



Rechenaufgabe



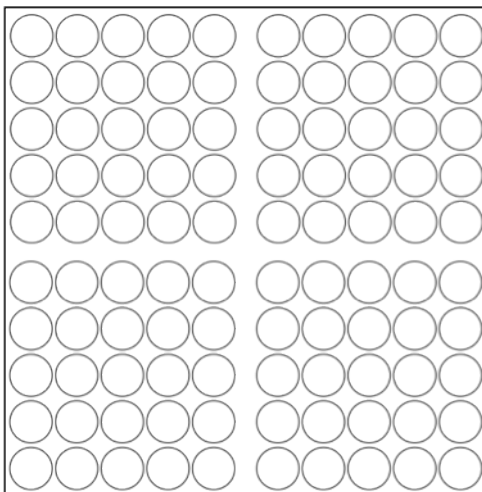
$$1 + 2$$
$$7,8,9$$

4.8

Rechengeschichte



Bilder



eigene Idee



Rechenaufgabe



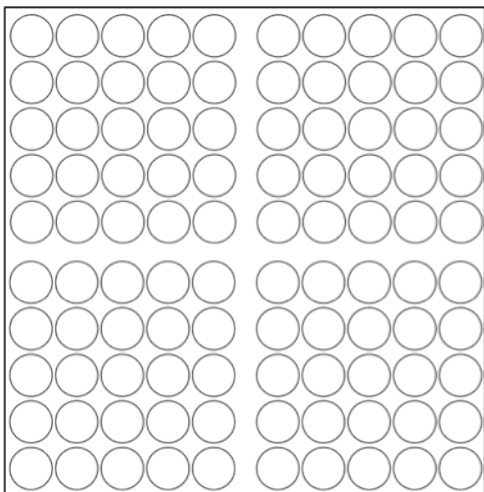
$$1 + 2$$
$$7,8,9$$

5.6

Rechengeschichte



Bilder



eigene Idee



Rechenaufgabe



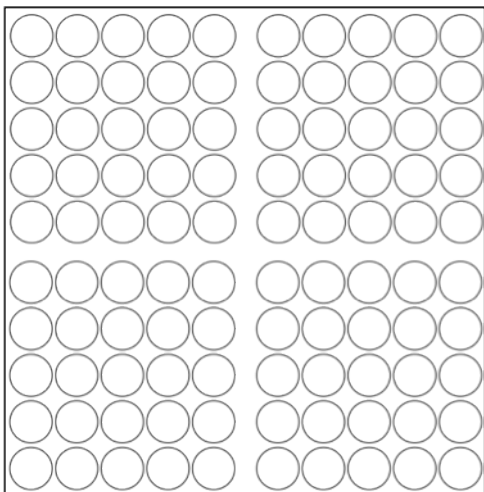
$1 + 2$
7,8,9

6.4

Rechengeschichte



Bilder



eigene Idee



$$1 + 2_{7,8,9}$$

7.5

[illegible][illegible]

A 10x10 grid of circles. The leftmost column of 10 circles is shaded gray. The remaining 9 columns, each containing 10 circles, are white.



$$1 + 2_{7,8,9}$$

8.5

[illegible]A large rectangular area containing a 10x10 grid of small circles, intended for counting practice. The grid is divided into two equal halves by a vertical line. Each half contains 5 rows and 10 columns of circles, for a total of 100 circles.

Rechenaufgabe



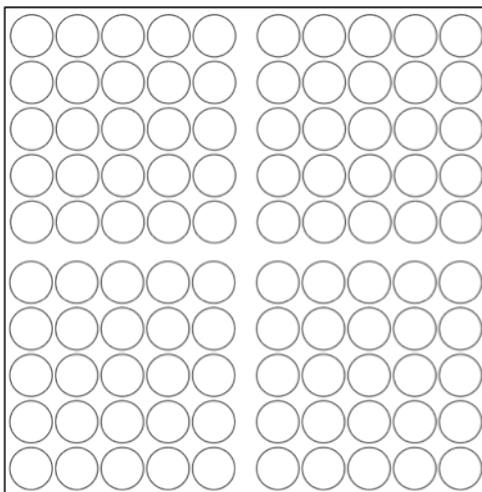
$1 + 2$
7,8,9

5.5

Rechengeschichte



Bilder



eigene Idee



Rechenaufgabe



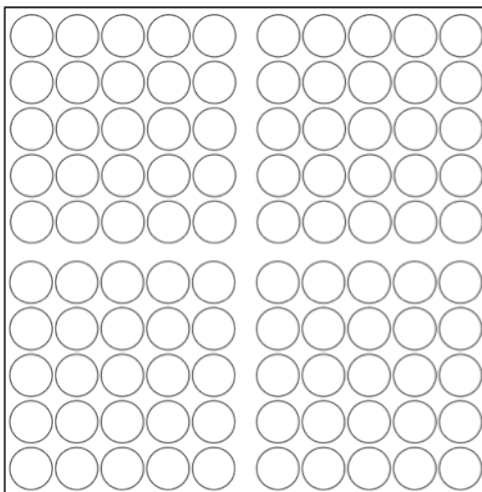
$1 + 2$
7,8,9

6.6

Rechengeschichte



Bilder



eigene Idee



Rechenaufgabe



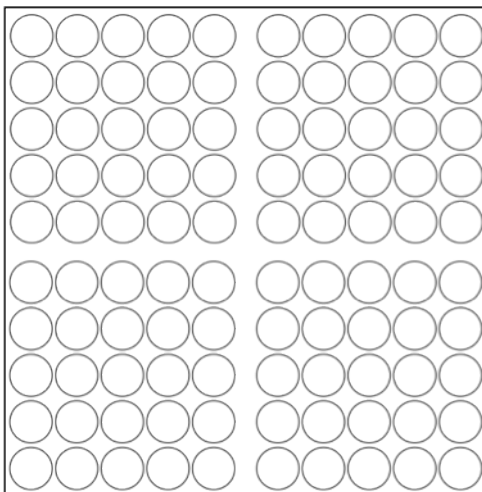
$$1 + 2$$
$$7,8,9$$

4.7

Rechengeschichte



Bilder



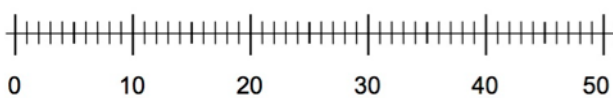
eigene Idee



$$\begin{array}{c} 1 + 2 \\ 7, 8, 9 \end{array}$$

3.7

--	--

[illegible]A large rectangular area containing a 10x10 grid of small circles. The grid is divided into two equal halves by a vertical line down the center. Each half contains 5 columns and 10 rows of circles, for a total of 100 circles.

Rechenaufgabe



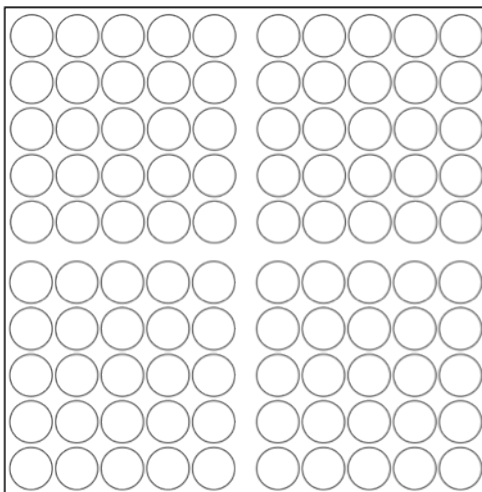
$$1 + 2$$
$$7,8,9$$

7.6

Rechengeschichte



Bilder

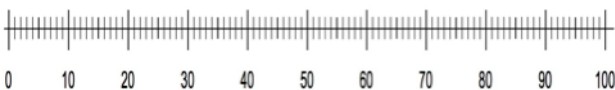


eigene Idee



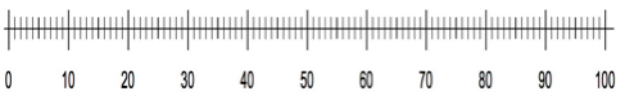
9.6

--

[illegible]A large rectangular area containing a 10x10 grid of small circles. The grid is divided into two equal halves by a vertical line. Each half contains 5 rows and 10 columns of circles, totaling 100 circles.

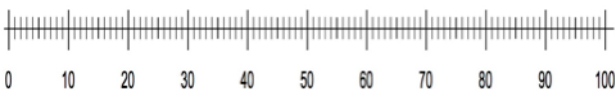
7.9

--

[illegible]A large rectangular area containing a 10x10 grid of small circles, intended for students to place dots representing data points.

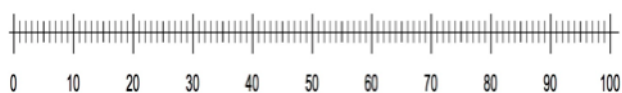
8.8

--

[illegible]A large rectangular area containing a 10x10 grid of small circles, intended for students to place dots representing data points.

$$1 + 2_{7,8,9}$$

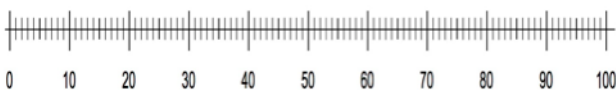
8.7

[illegible]A large rectangular area containing a 10x10 grid of small circles, intended for students to place dots representing data points.

$$1 + 2_{7,8,9}$$

10.7

--

[illegible]A large rectangular area containing a 10x10 grid of small circles, intended for a dot marker activity. The grid is divided into two equal halves by a vertical line.

Rechenaufgabe



1 + 2
7,8,9

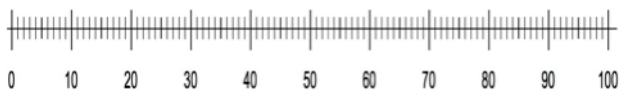
8.9

Rechengeschichte



Bilder





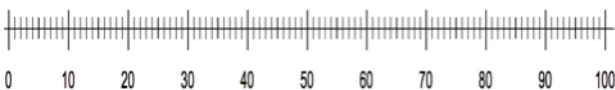
eigene Idee



$$\begin{array}{c} 1 + 2 \\ 7, 8, 9 \end{array}$$

10.8

--

[illegible]A large rectangular area containing a 10x10 grid of small circles, intended for counting practice. The grid is divided into two equal 5x5 sections by a vertical line.

Rechenaufgabe



1 + 2
7,8,9

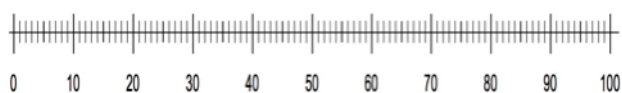
10.9

Rechengeschichte



Bilder





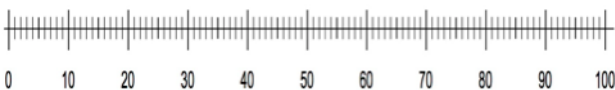
eigene Idee



$$\begin{array}{c} 1 + 2 \\ 7, 8, 9 \end{array}$$

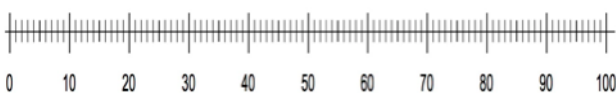
10.6

--

[illegible]A large rectangular area containing a 10x10 grid of small circles, intended for students to place dots representing data points.

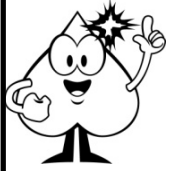
$$1 + 2_{7,8,9}$$

--

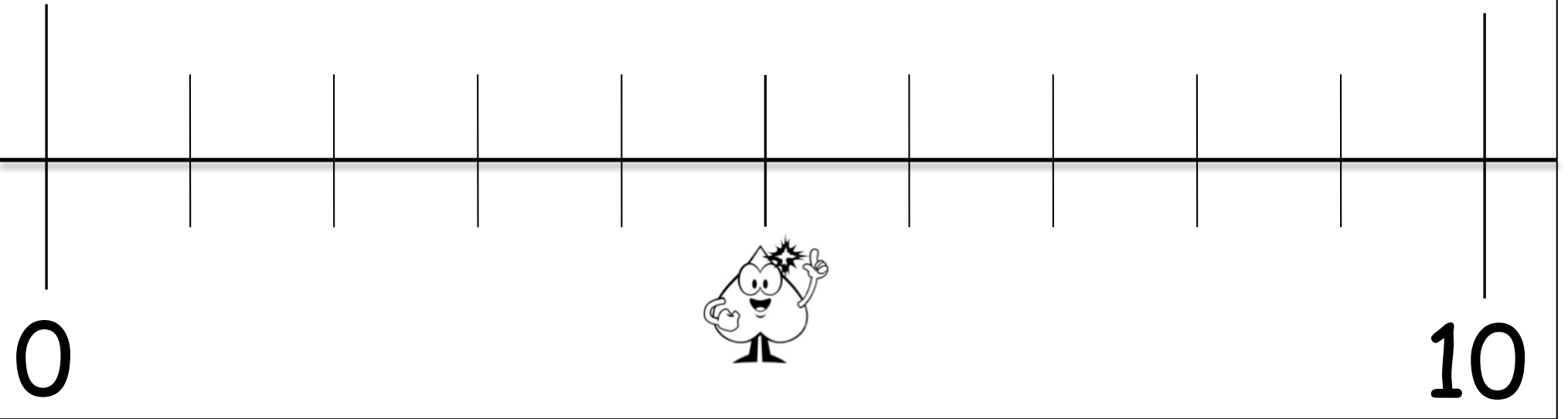
[illegible]A large rectangular area containing a 10x10 grid of small circles, intended for counting practice. The grid is divided into two equal halves by a vertical line. Each half contains 5 rows and 10 columns of circles, for a total of 100 circles.

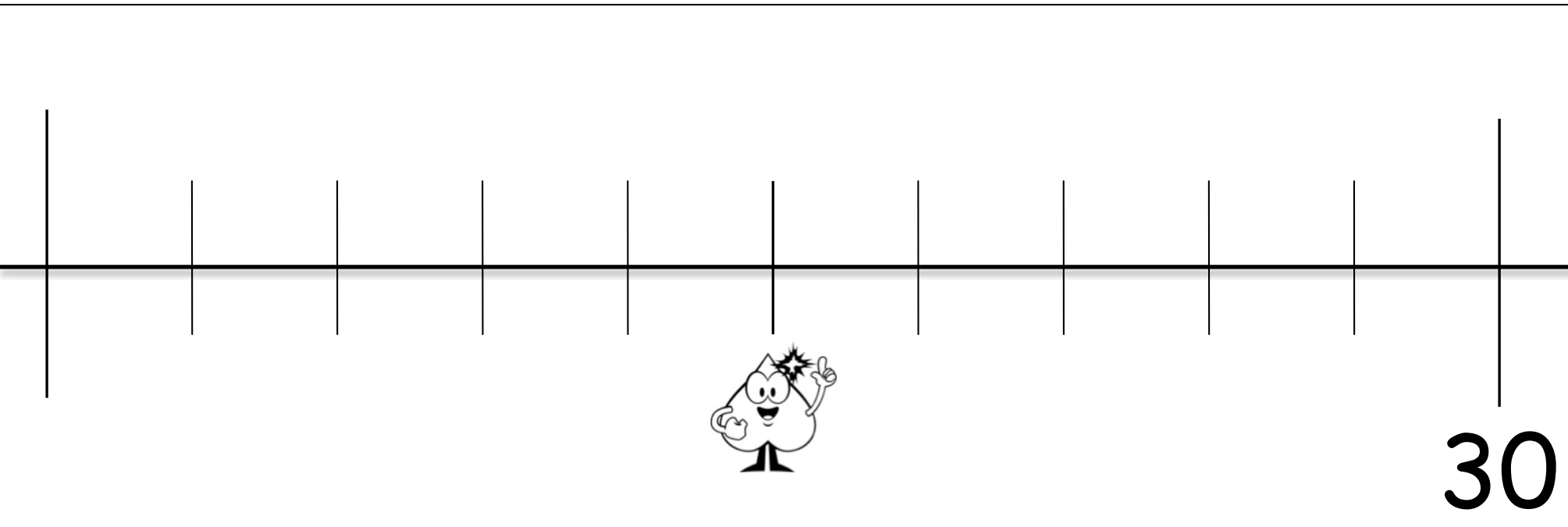
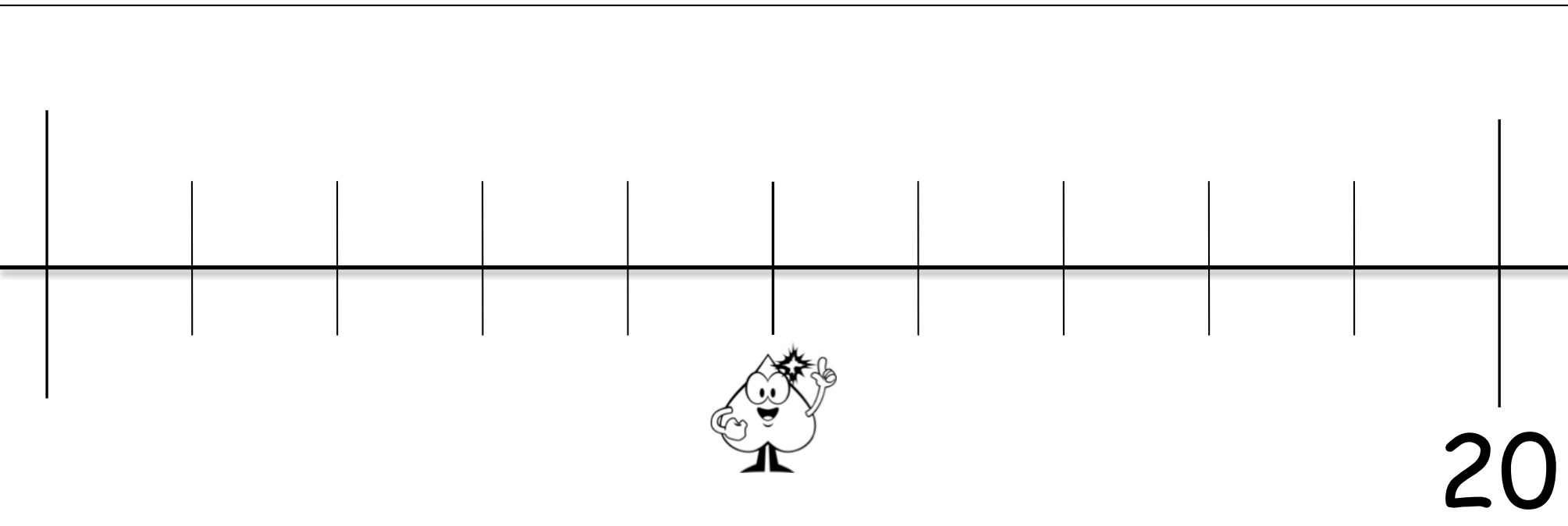
A large rectangular area containing a grid of 100 empty circles. The circles are arranged in 10 rows and 10 columns, with a small gap between each circle and a larger gap between the two groups of circles. This grid is intended for students to place dots representing data points for the survey question.

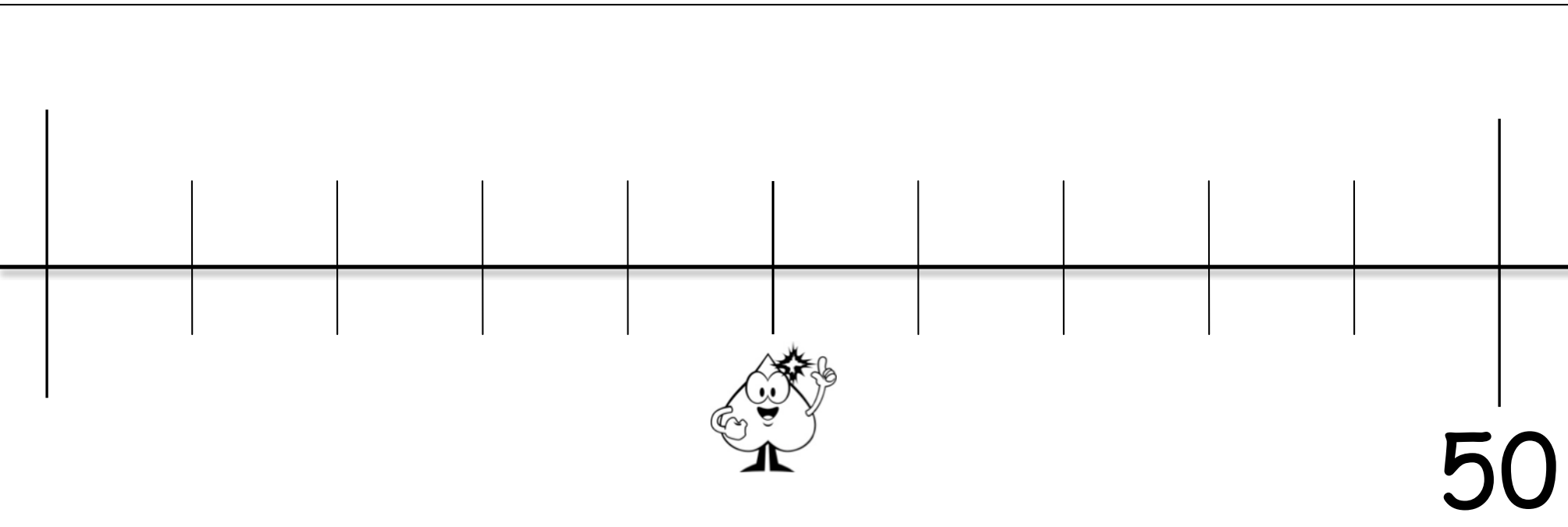
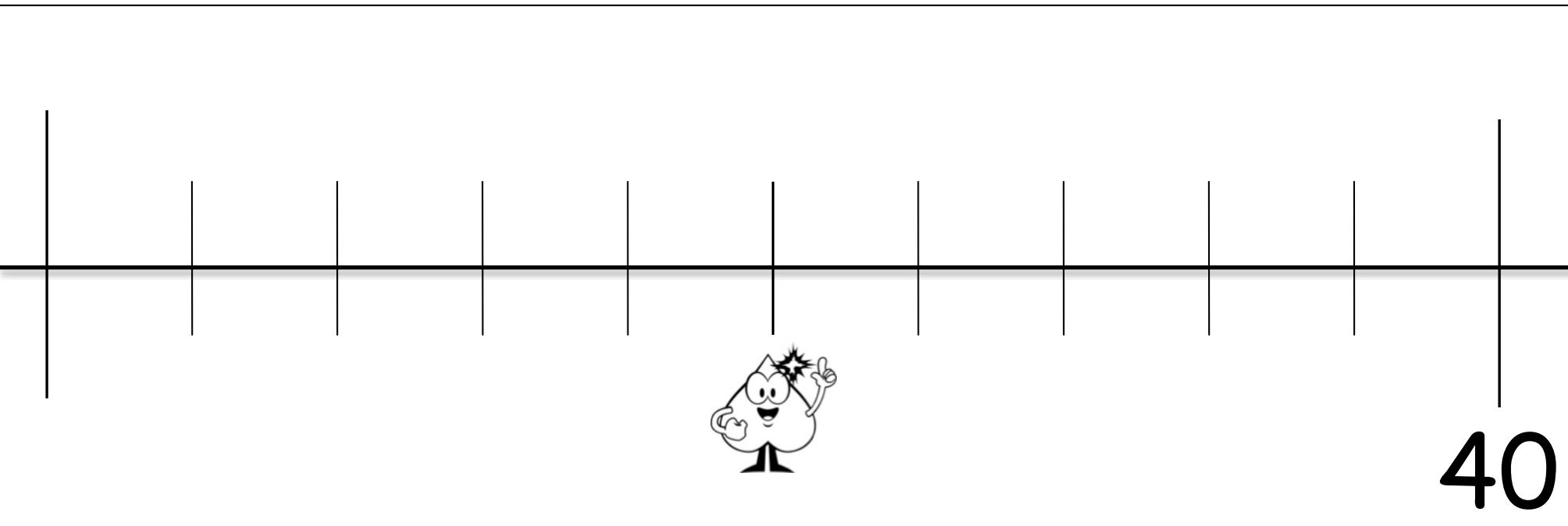
A large rectangular box containing two groups of circles. Each group consists of two rows of five circles, totaling 20 circles.

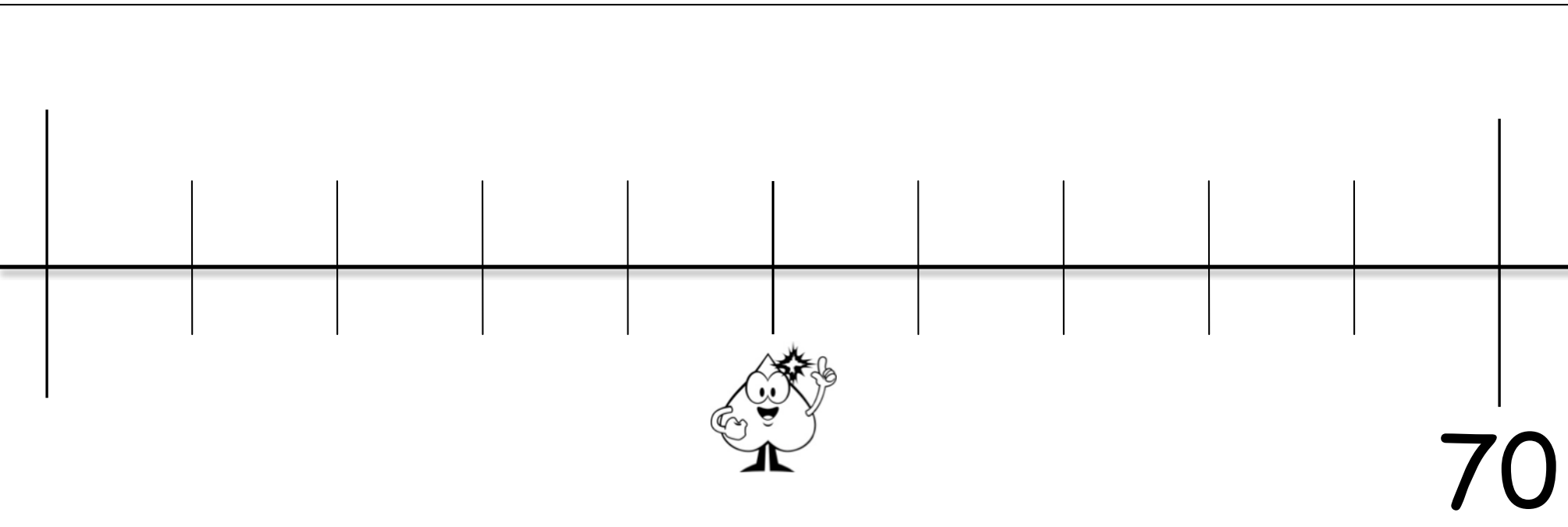
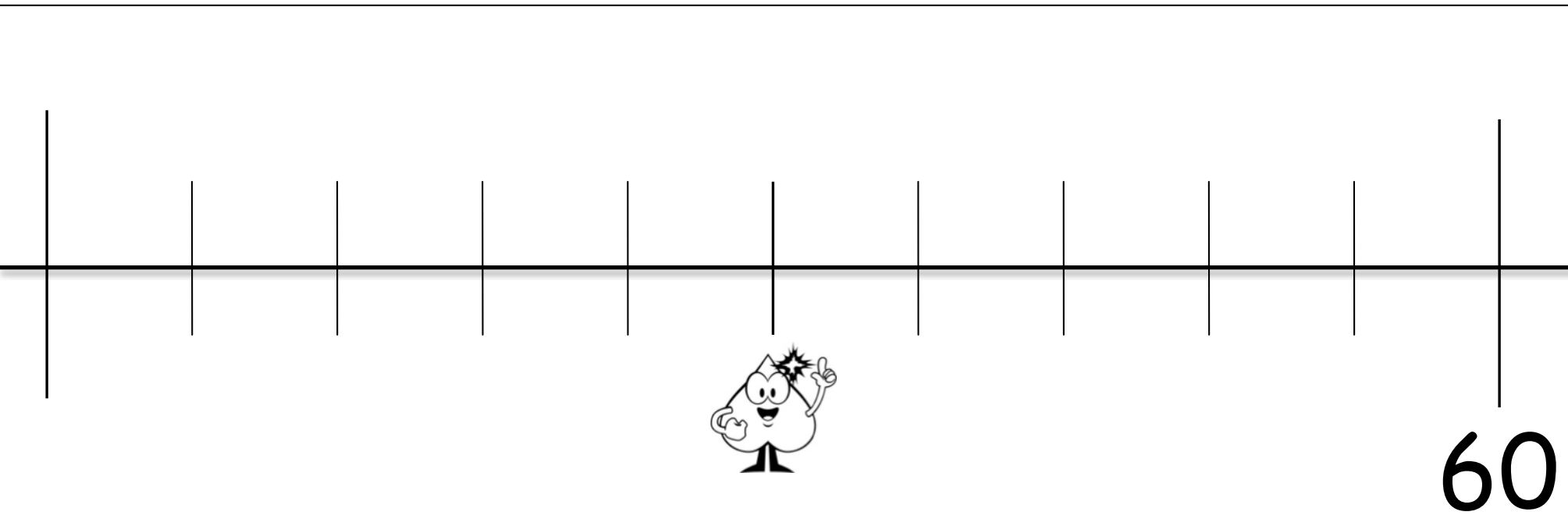


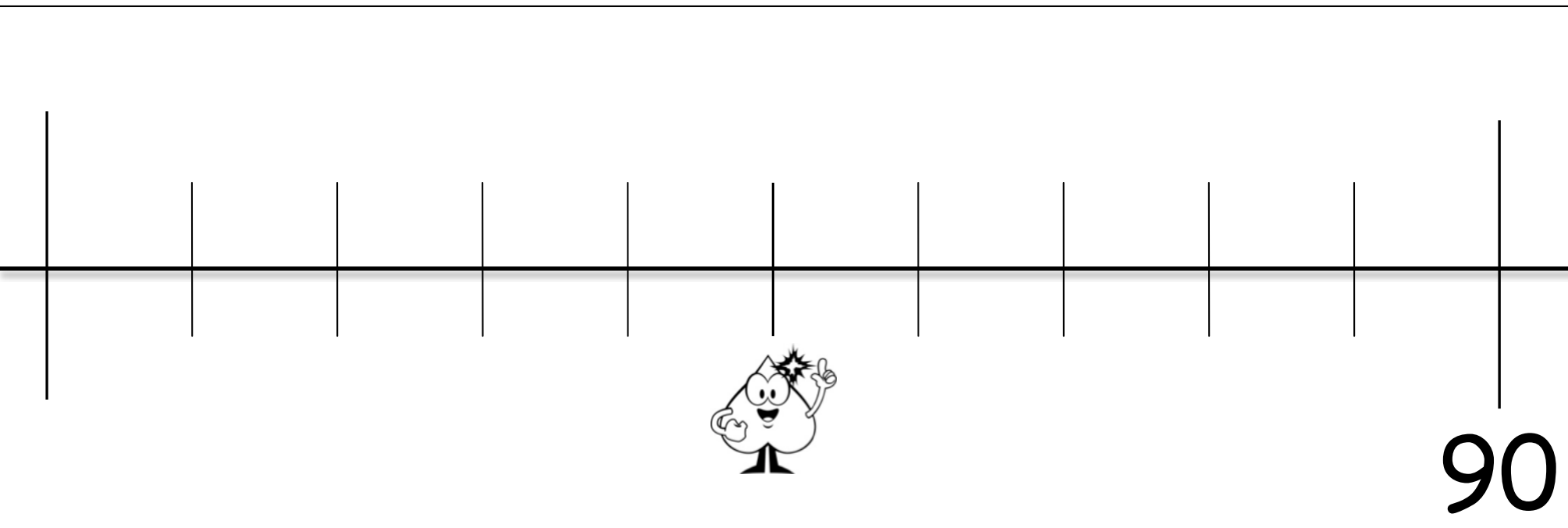
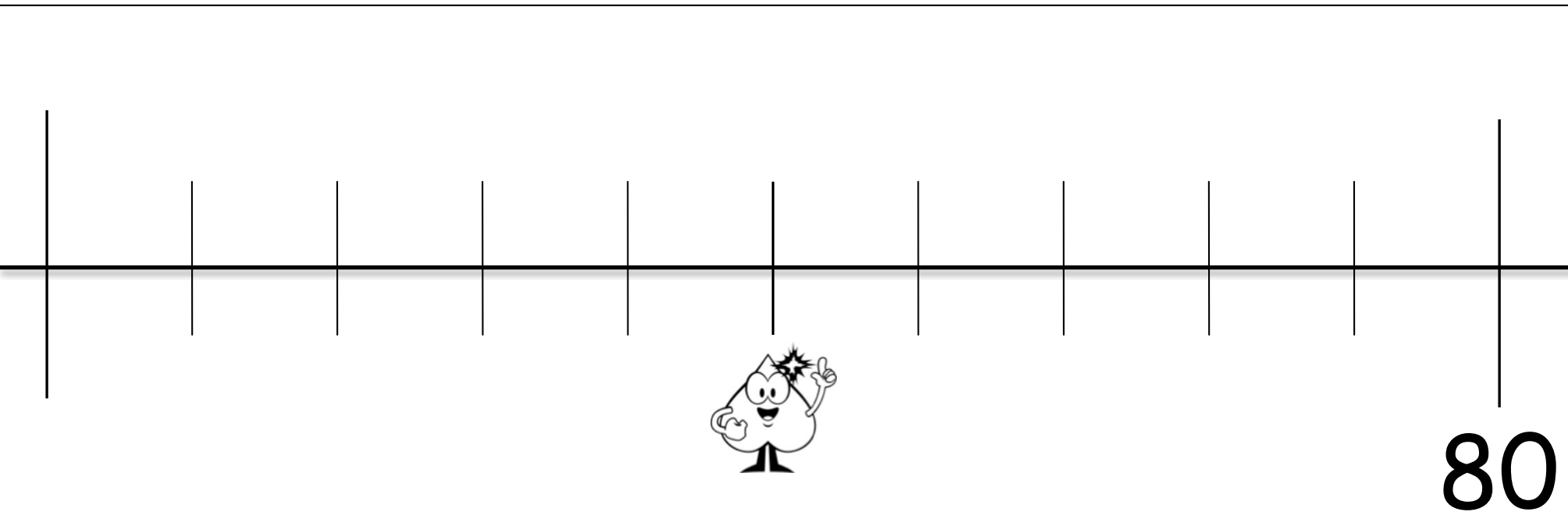
Zahlenstrahl 0-100

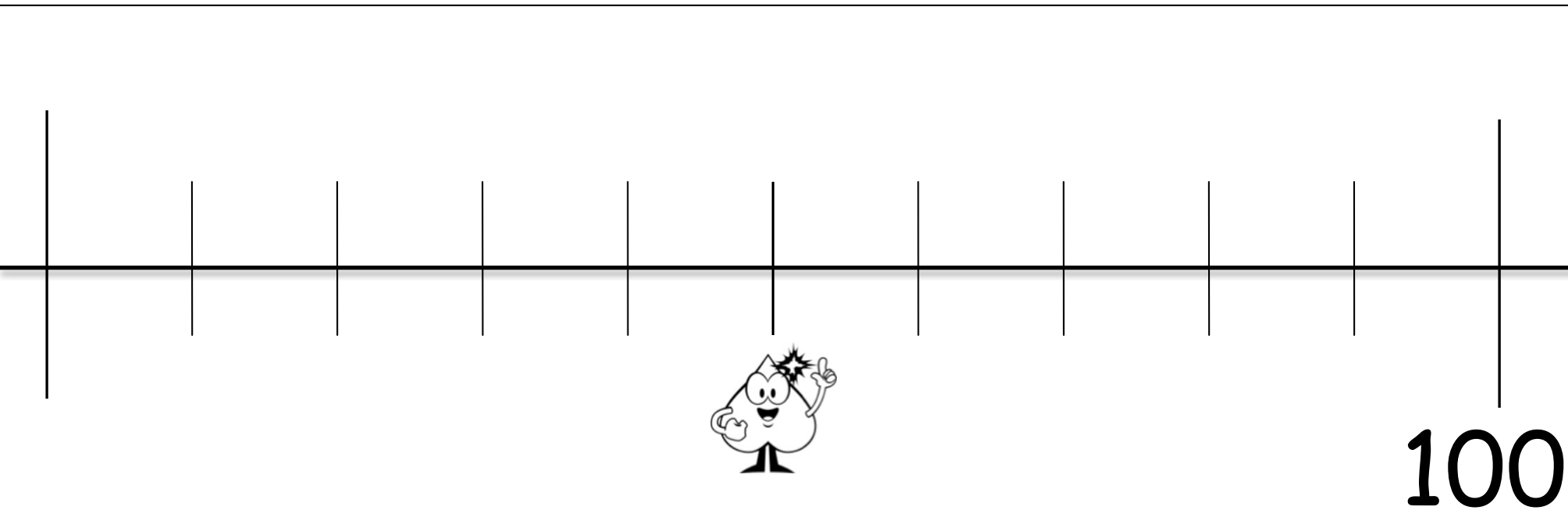












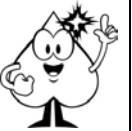


Zahlenkarten 0-100

1



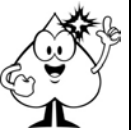
2



3



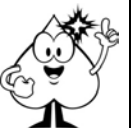
4



5



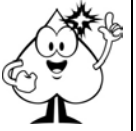
6



7



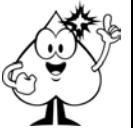
8



9



11



12



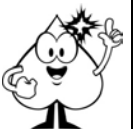
13



14



15



16



17



18



19



21



22



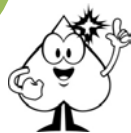
23



24



25



26



27



28



29



31



32



33



34



35



36



37



38



39



41



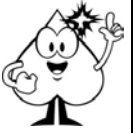
42



43



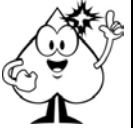
44



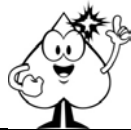
45



46



47



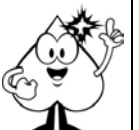
48



49



51



52



53



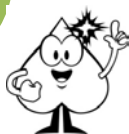
54



55



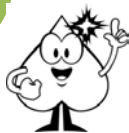
56



57



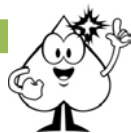
58



59



61



62



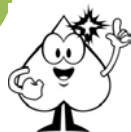
63



64



65



66



67



68



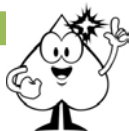
69



71



72



73



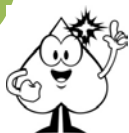
74



75



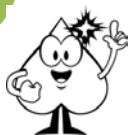
76



77



78



79



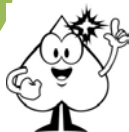
81



82



83



84



85



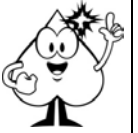
86



87



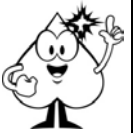
88



89



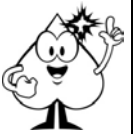
91



92



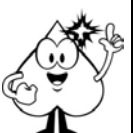
93



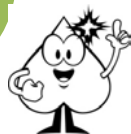
94



95



96



97



98



99



10



20



30



40



50



60



70



80



90



100





Einerkarten mit
Zehnerergänzung

1 0

1

2

3

4

5

6

7

8

9

1

0

0

6	7	8	9
2	3	4	5
			1



Zehnerkarten mit
Hunderterergänzung

1 0

2 0

3 0

4 0

5 0

6 0

7 0

9 0

7 0

5 0

3 0

8 0

6 0

4 0

8 0

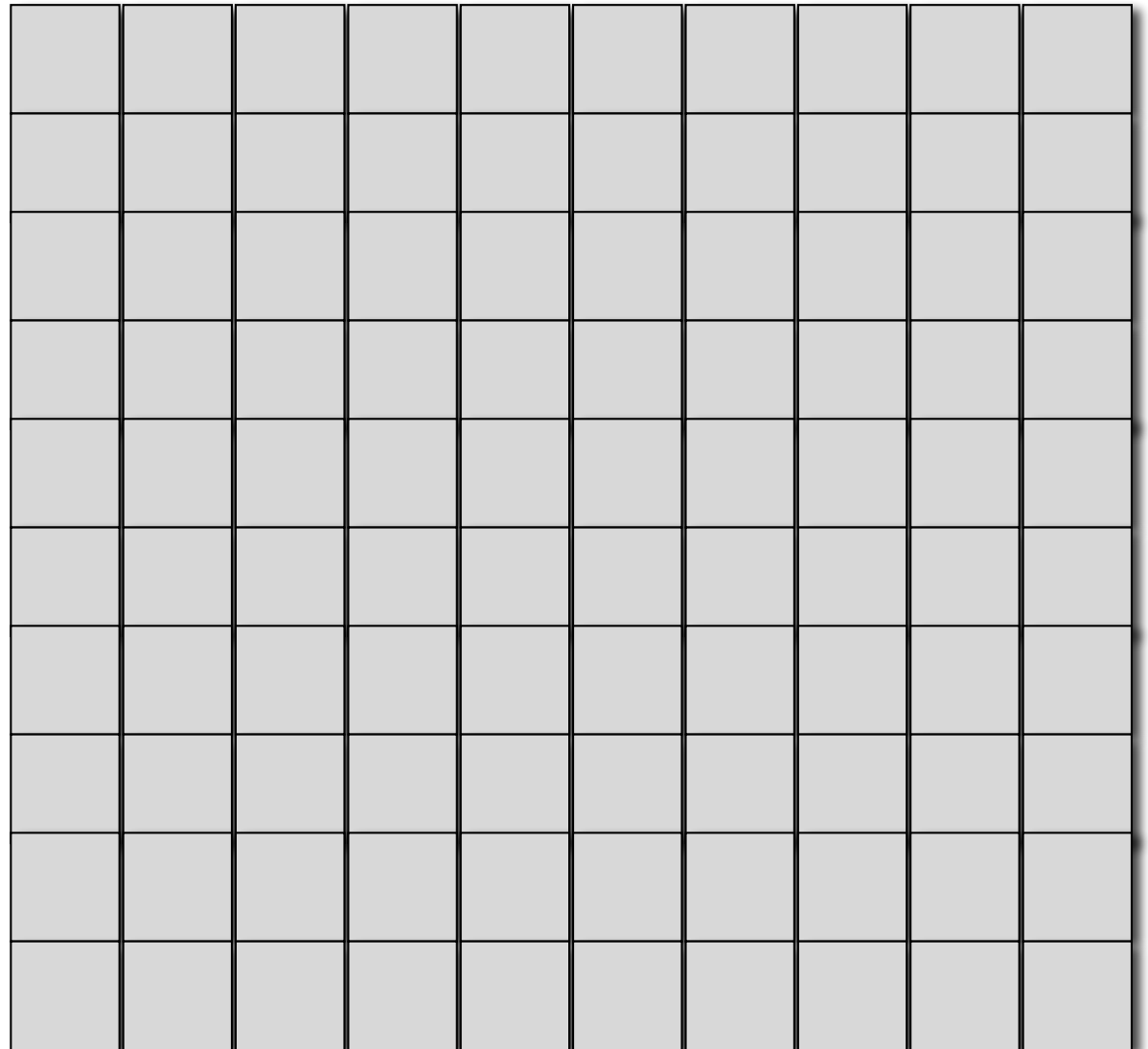
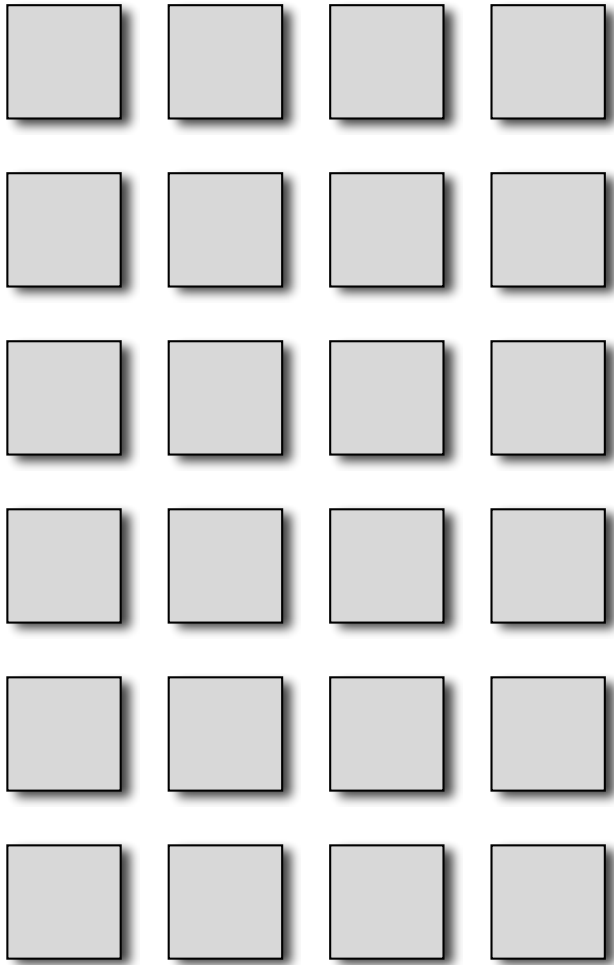
9 0

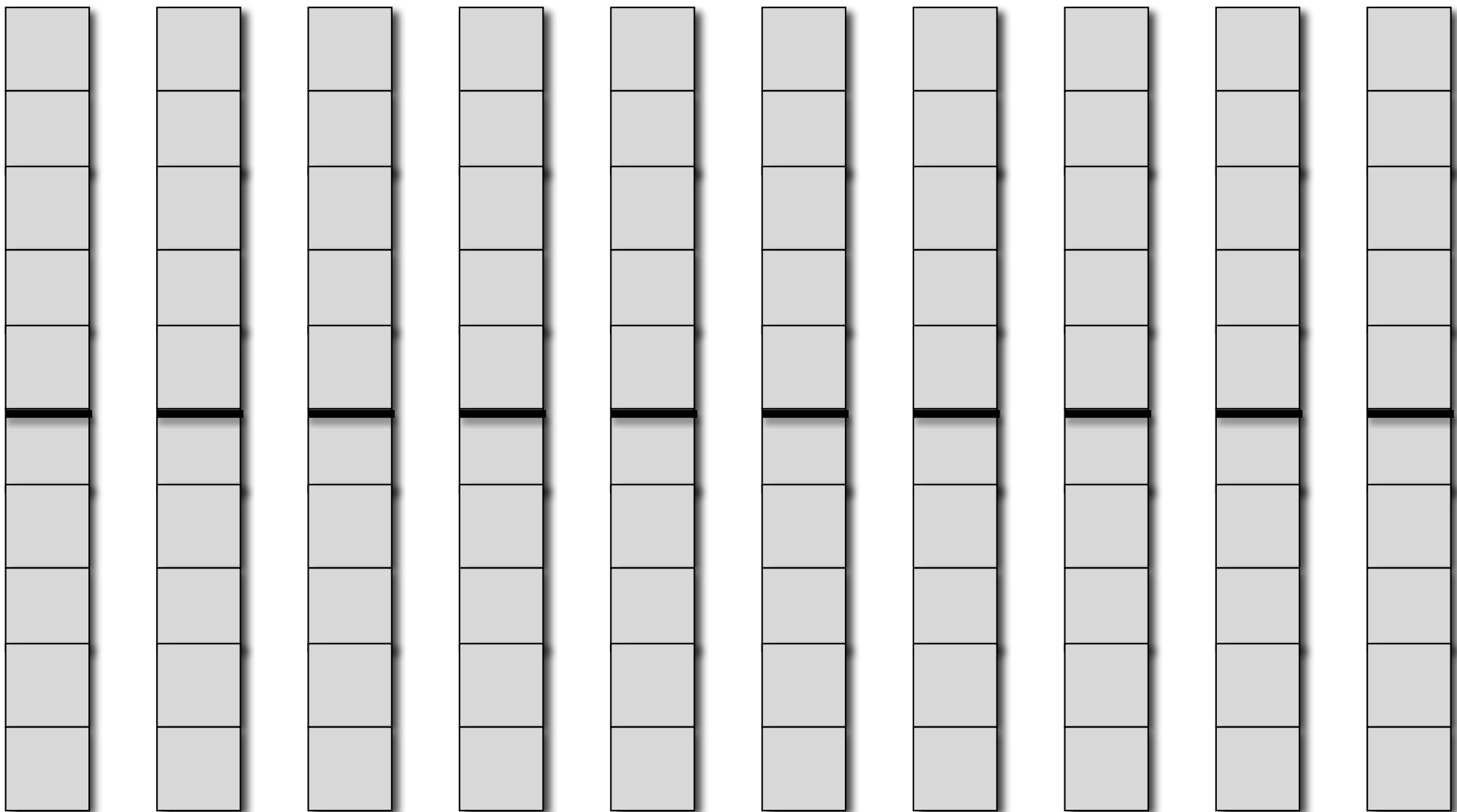
1 0

2 0



Hunderterplatte, Zehnerstangen und Einerwürfel

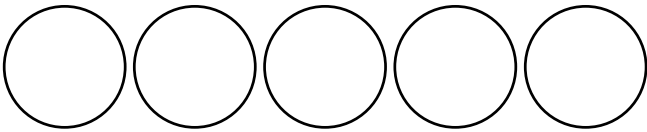




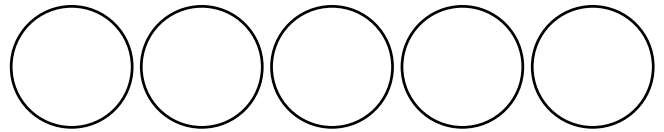


Zwanzigerreihen

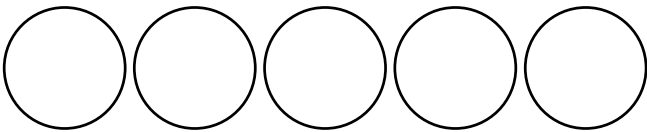
5



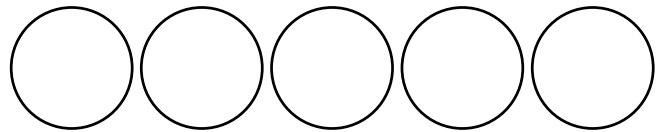
10



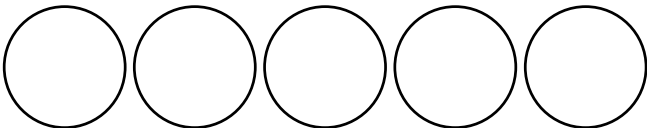
15



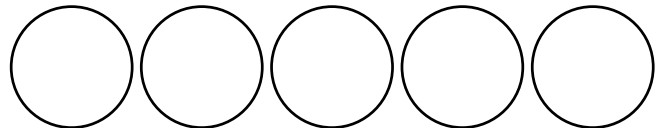
20



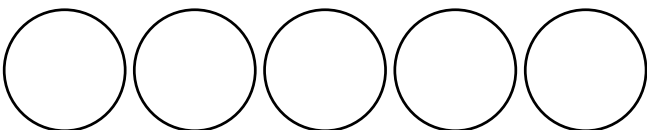
5



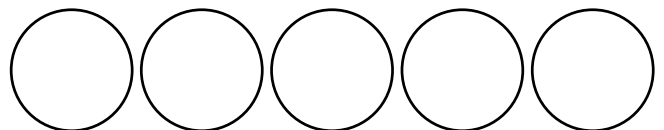
10



15



20



Unterrichtsanregungen zur Förderung des Darstellungswechsels

Am Beispiel der Multiplikation

Inhalt

1. Sachanalyse	3
1.1 Lehrplanbezug	3
1.2 Darstellungswechsel	3
1.3 Multiplikation	5
2. Warum den Darstellungswechsel thematisieren und explizit fördern?	7
2.1 Darstellungswechsel als Voraussetzung für ein umfassendes Operationsverständnis	7
2.2 An die unterschiedlichen Vorgehensweisen beim Darstellungswechsel anknüpfen	9
3. Wie kann man den expliziten Darstellungswechsel fördern – mögliche Umsetzung	9
3.1 Inhaltliche Aspekte	10
3.2 Methodische Aspekte	11
3.3 Mögliche Beispiele	11
Arbeitsblätter	11
Quartett	13
Literatur	15

1. Sachanalyse

Im Folgenden geht es um die sachliche Beschäftigung der Unterrichtsgegenstände Darstellungswechsel (im Lehrplan und den Bildungsstandards eine der prozessbezogenen bzw. allgemeinen Kompetenzen) und Multiplikation (inhaltsbezogene Kompetenz).

1.1 Lehrplanbezug

Der Lehrplan NRW beschreibt unter den **inhaltsbezogenen** Kompetenzen zum Schwerpunkt Multiplikation:

„Die Schülerinnen und Schüler

- ordnen Grundsituationen (z.B. dem wiederholten Hinzufügen oder wiederholten Wegnehmen gleicher Anzahlen) Malaufgaben oder Ver- bzw. Aufteilaufgaben zu
- wechseln zwischen verschiedenen Darstellungsformen von Operationen (mit Material, bildlich, symbolisch und sprachlich) hin und her“ (S. 61)

Bei den **prozessbezogenen** oder allgemeinen Kompetenzen werden insbesondere Darstellen/Kommunizieren und Modellieren angesprochen. Als Kompetenzerwartung am Ende der Klasse 4 wird von den Schülerinnen und Schüler erwartet, dass sie „eine Darstellung in eine andere übertragen (zwischen Darstellungen wechseln) können“ (S.60). Das Vernetzen verschiedener Darstellungen zählt laut Lehrplan zu den zentralen Leitideen des Mathematikunterrichts (S.55).

Der Lehrplan muss an diesen Stellen allerdings konkretisiert werden. Dazu wird zunächst der Darstellungswechsel genauer betrachtet.

1.2 Darstellungswechsel

Unter den Begriff Darstellungen im Mathematikunterricht fallen Handlungen, Bilder, mathematische Symbole und sprachliche Symbole. Der Schwerpunkt liegt bei diesem Unterrichtsmaterial auf dem Einsatz von und Umgang mit bildlichen Darstellungen.

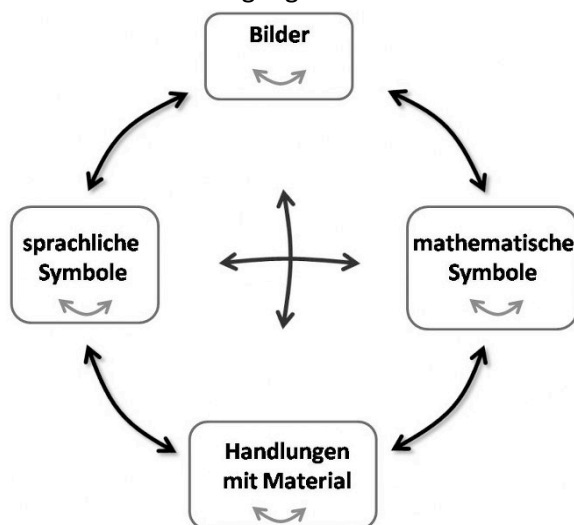


Abbildung 1 Darstellungen (oder Darstellungsformen) im Mathematikunterricht

Darstellungen sind im Mathematikunterricht elementar, da mathematische Begriffe und Strukturen nicht physisch fassbar sind und immer Darstellungen brauchen - $3 \cdot 4$ ist ebenfalls nur eine mathema-

tisch-symbolische Darstellung. Es geht somit immer um den Umgang mit Darstellungen eines mathematischen Objektes und nicht mit dem Objekt selbst. Das mathematische Objekt darf nicht mit der Darstellung verwechselt werden. Dafür müssen Kinder zunächst erkennen, dass es für ein mathematisches Objekt mehrere verschiedenartige Darstellungen gibt. Je nach Darstellungsebene, also ob Sprache oder Bilder oder mathematische Symbole, haben diese Darstellungen die ein und dasselbe Objekt darstellen, unterschiedliche Eigenschaften. Daher müssen die strukturelle und mathematische Gleichheit und das ineinander Überführen, die Austauschbarkeit und Zusammenhänge zwischen den unterschiedlichen Darstellungen verdeutlicht und erkannt werden.

In den ersten Schulwochen wird dies beispielsweise angeregt, indem verschiedenste Zahldarstellungen gezeigt und zugeordnet werden. Die mathematisch-symbolische Darstellung wird mit bildlichen Darstellungen unterschiedlicher Abstraktionsgrade verbunden: die Zahl „2“ oder „zwei“ ist als mathematisches Objekt nicht fassbar, sondern nur über konkrete Darstellungen, wie „zwei Punkte“, oder „zwei Bücher“ begreifbar. (Die gefundenen Darstellungen können dann unter der Vorstellung, dass diese alle zwei Elemente haben, einander zugeordnet werden.) Der Wechsel der Darstellungen wird also explizit thematisiert (siehe auch Abb.2 als typische Darstellung in Schulbüchern des ersten Schuljahrs).

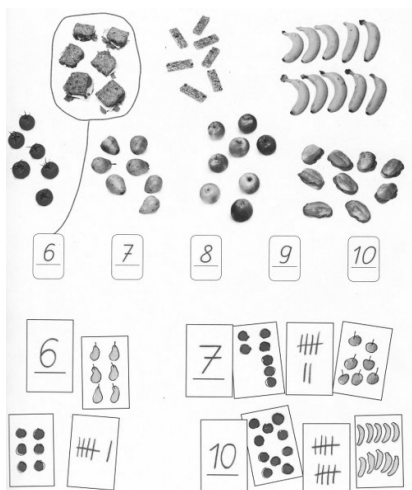


Abbildung 2 Ausschnitt aus dem Zahlenbuch 1 (MÜLLER&WITTMANN 2008, 12)

Die beschriebene prozessbezogene Kompetenz des Darstellens (oder des Darstellungswechsels) ist natürlich an einen Inhalt (bei diesen Unterrichtsanregungen die Multiplikation) gebunden.

Versteht man Mathematiklernen als (Weiter-) Entwicklung von Vorstellungen, so gilt es im Mathematikunterricht Lernmöglichkeiten bereit zu stellen, die anknüpfend an das Vorwissen der Kinder tragfähige Vorstellungen aufbauen. Wie können aber diese Vorstellungen aufgebaut werden? Eben nur durch unterschiedliche Darstellungen. Dabei muss allerdings beachtet werden, dass Darstellungen immer auch mehrdeutig sind. Diese Mehrdeutigkeit ist einerseits bedingt durch die Beschaffenheit von Darstellungen, andererseits aber auch abhängig vom individuellen Vorwissen: Dies erklärt auch, warum Erwachsene und Lehrer „mehr“ sehen oder besser gesagt „anders“ sehen als Kinder. Erwachsene und Lehrer wissen sozusagen schon, worauf es ihnen bei den Darstellungen und ihrem Wechsel ankommt, welche Kriterien wichtig sind, die in den verschiedenen Darstellungsebenen vorkommen müssen, damit diese äquivalent (gleichwertig) sind, bzw. dasselbe Objekt darstellen (siehe Kap. 2.2)

Welche Vorstellungen oder Darstellungen sollten bei der Multiplikation entwickelt werden?

1.3 Multiplikation

Die Multiplikation (lat. Vervielfachen) als eine der vier Grundrechenarten der Arithmetik beschreibt das Vervielfachen von (natürlichen) Zahlen.

Nimmt man dabei den Kardinalzahlaspekt als Grundlage, so kann man $a \cdot b$ beschreiben als a Mengen, die jeweils b Elemente enthalten.

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + \dots + b}_a \text{ (mal)}$$

Anders als bei der Addition sind die Faktoren a und b **nicht gleichwertig**. In diesem Fall fungiert a als Multiplikator und b als Multiplikand.¹ Dies bedeutet, dass nur der Multiplikand als Zahl konkret wiedergegeben werden kann, da er eine Eigenschaft einer Menge darstellt: „Wie groß ist die Menge?“. Der Multiplikator zählt die (Anzahl der) Mengen: „Wie viele solcher Mengen gibt es?“. Bei der rein mathematisch-symbolischen Darstellung von $3 \cdot 4$ sind demzufolge beide Formen möglich:

$$\begin{array}{lll} 3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 & (\text{Multiplikator} \cdot \text{Multiplikand}) & \text{„dreimal die Vier“} \\ 3 \cdot 4 = 3 + 3 + 3 + 3 & (\text{Multiplikand} \cdot \text{Multiplikator}) & \text{„drei viermal“} \end{array}$$

Grundvorstellungen

Mögliche Grundvorstellungen der Multiplikation (auf Basis des Kardinalzahlaspektes):

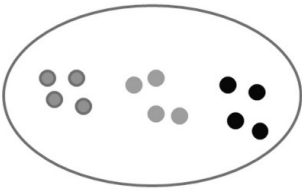
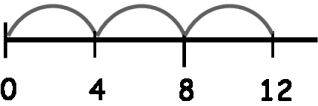
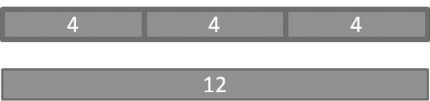
- **zeitlich-sukzessiv:** Wiederholungsstruktur (Wiederholung gleicher Vorgänge, Aufmerksamkeit auf beschriebene Handlung)
- **räumlich-simultan:** Teil-Ganzes-Struktur (regelmäßige Anordnung gleicher Mengen, Aufmerksamkeit auf Endergebnis der Handlung)
- kombinatorisch²

¹ In anderen Ländern (z.B. England) ist der erste Faktor der Multiplikand und der zweite Faktor der Multiplikator.

² Diese Grundvorstellung wird bei der Einführung in der Grundschule zunächst nicht beachtet.

Bildliche Darstellungen haben den Nachteil nur das Endprodukt darstellen zu können. Natürlich ist hier die Multiplikation räumlich-simultan dargestellt. Die zeitlich-sukzessive Handlung aus denen diese entstanden sind, kann man im Nachhinein ableiten (oder diese werden durch eine Bildergeschichte in mehreren aufeinanderfolgenden Bildern deutlich).

Durch Hinzunehmen der anderen (hier wichtigen) Zahlaspekte, ergeben sich folgende Darstellungen für das Beispiel **3 (Multiplikator) · 4 (Multiplikand)**, welche bildlich aber auch gegenständlich vorliegen können:

Darstellung	Zahlaspekt
	Kardinal: Vereinigung von gleichmächtigen Mengen. Gleichmächtige, paarweise disjunkte Mengen werden vereinigt. Dieses Verständnis erlaubt den Gebrauch der wiederholten Addition.
	Ordinal/Maß: Von 0 aus drei Vierersprünge weiterzählen (dreimal vier Schritte weiterzählen).
	Maß: Einen Repräsentanten mit der Maßzahl 4 verdreifachen (z. B. drei Stäbe der Länge vier hintereinanderlegen).
	Operator: Einen Vorgang, der aus vier Teilhandlungen besteht, verdreifachen. Operatorschreibweise: $4 \xrightarrow{\cdot 3}$

Die Operatordarstellung stellt das Vervielfachen nicht in mehreren Schritten als Hintereinanderlegen oder wiederholtes Hinzutun, sondern in einem Schritt dar. Diese (abstraktere) Darstellung findet man heute seltener in Schulbüchern, die Operatorschreibweise dagegen häufiger.

Die bildlichen Darstellungen machen deutlich, dass es einen Unterschied macht, welche Zahl der Multiplikator und welche der Multiplikand ist. Auch bei multiplikativen Sachsituationen bzw. dem Ausführen einer Handlung fällt die Nichtgleichwertigkeit der Faktoren auf. Es ist nicht gleichbedeutend dreimal in den Keller zu gehen und 4 Flaschen zu holen oder viermal in den Keller zu gehen und jeweils 3 Flaschen zu holen.

Bei strukturierten bildlichen Mengendarstellungen wie dem Punktefeld kann allerdings ein Wechsel der Perspektive vorgenommen und das oben beschriebene Kommutativgesetz anschaulich gemacht werden.

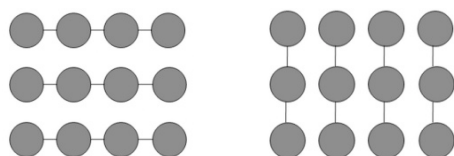


Abbildung 3 Perspektivwechsel beim Punktefeld

Der Einsatz von strukturierten Punktefeldern ist neben der Anknüpfung an die Erfahrungswelt der Kinder (auf Mengen basierende Darstellungen, bereits gemachte Erfahrungen im ersten Schuljahr) auch wichtig für weitere Veranschaulichungen von Rechengesetzen, wie beispielsweise das Distributivgesetz, welches sich über das Punktefeld mit zwei verschiedenen Farben entdecken und begründen lässt: $3 \cdot (1+3) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3$

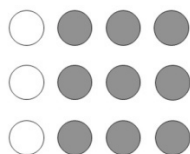


Abbildung 4 mögliche Veranschaulichung des Distributivgesetzes

Trotzdem sind auch Darstellungen, die auf den ordinalen Zahlaspekt zurückgehen, wie der Zahlenstrahl, bedeutsam. Dieser ist insbesondere aufgrund seiner mathematischen Tragfähigkeit in anderen Zahlbereichen hinzuzuziehen.

Deshalb sollten die kardinale und die ordinale Darstellungen im Unterricht thematisiert werden.

2. Warum den Darstellungswechsel thematisieren und explizit fördern?

Mathematik treiben ist ohne das Wechseln von Darstellungen eigentlich gar nicht möglich. Das Versprachlichen von mathematischen Zusammenhängen aber auch das Darstellen über Bilder und mathematische Symbole geschieht meist unbewusst und im Unterricht sehr selbstverständlich. Umso wichtiger ist es, dieses implizite Wissen explizit zu machen.

Gerade das bildliche oder sprachliche Darstellen von mathematischen Beziehungen hilft dahinterliegende Vorstellungen bewusst(er), sichtbar und kommunizierbar zu machen, mögliche Fehlvorstellungen aufzudecken und neue Vorstellungen in das eigene Wissensnetz einzubauen.

2.1 Darstellungswechsel als Voraussetzung für ein umfassendes Operationsverständnis

Das Entwickeln von Vorstellungen und der Wechsel der verschiedenen Darstellungen, das Erkennen der Zusammenhänge und Unterschiede machen ein umfassendes Operationsverständnis aus.

In der fachdidaktischen Diskussion gilt es als unbestritten, dass der Wechsel von Darstellungsebenen mit einem (umfassenden) Operationsverständnis zusammenhängt, bzw. dieses bedingt. Mathematisches Denken und Handeln benötigt stets das Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungsebenen. Die Fähigkeit zwischen verschiedenen Darstellungen flüssig und adäquat übersetzen zu können bzw. auch innerhalb einer Darstellungsebene mathematische Objekte in unterschiedlichen Strukturen erkennen zu können, ist für mathematisches Denken und Handeln demnach unerlässlich. Die den verschiedenen Darstellungen zugrunde liegenden (z.T. unterschiedlichen) Vorstellungen sind wichtig, wenn neue Zahlbereiche oder Möglichkeiten der Argumentation hinzugezogen werden. Ein flexibles Anwenden von verschiedenen Darstellungen gilt als wichtige Fähigkeit gerade auch bei Problemlöse-

prozessen, bei welchen oft verschiedene Darstellungen (seien es verschiedene bildliche Darstellungen, die sprachliche oder mit Material handelnde Begleitung oder mathematisch-symbolische Darstellungen eines Problems) eingesetzt werden, um zu einer Lösung zu gelangen.

Ein Darstellungswechsel bei Operationen wird allerdings selten explizit in Schulbüchern thematisiert. Analog zum Darstellungswechsel bei Zahldarstellungen (siehe Abb. 2), könnte dieser auch bei Operationsdarstellungen thematisiert werden (vgl. die Unterrichtsanregung „Zahlen unter der Lupe“ Haus 3 Unterrichtsmaterial, die z.B. analog auf eine „Malaufgabe unter der Lupe“ angewendet werden kann)

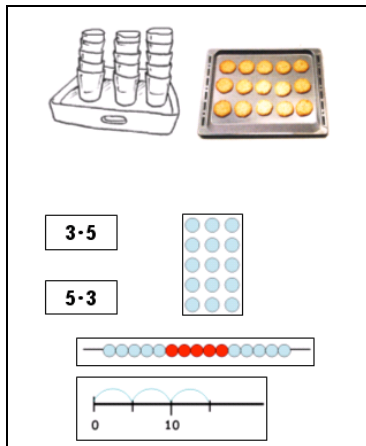


Abbildung 5 Darstellungswechsel bei der Multiplikation

Wechsel von Darstellungen werden im Unterricht oft nur in eine bestimmte Richtung geführt – meist wird die „Einbahnstraße“ von enaktiven (handelnden) über ikonische (bildliche) hin zu symbolischen Darstellungen genutzt. Der Darstellungswechsel sollte aber von Beginn an und bis zum Ende der Behandlung einer Operation alle Darstellungsebenen miteinbeziehen.

Es ist keinesfalls selbstverständlich, dass der Darstellungswechsel von allen Beteiligten in ähnlicher Weise bzw. mit denselben Kriterien vollzogen wird. In vielen Unterrichtsvorschlägen finden sich Aufgaben wie beispielsweise einen passenden Term zu einem vorgegebenen Bild zu notieren (siehe Abb. 3). Dabei darf im Unterricht aber nicht davon ausgegangen werden, dass den Kindern die gleiche mathematische Struktur innerhalb der verschiedenen Darstellungen bewusst ist.

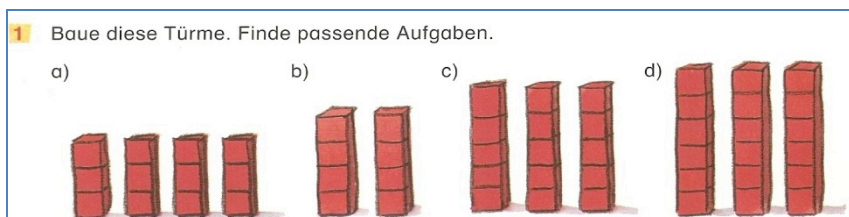


Abbildung 6 Schulbuch Bausteine Mathematik 2 (S.45)

Daher ergeben sich folgende Fragen: Was bedeutet „passend“ für die Lehrerin, was für das Kind? Wie muss ein Bild oder eine Rechengeschichte, das oder die zu der Rechenaufgabe passen soll, eigentlich aussehen?

2.2 An die unterschiedlichen Vorgehensweisen beim Darstellungswechsel anknüpfen

Die Erwartung (z.B. des Lehrplans) „Darstellungen zu wechseln“ und ineinander zu überführen, muss im Unterricht präzisiert werden. Aber: Wie sollen Darstellungen gewechselt werden? Welches sind wichtige, welches eher unwichtige Elemente, die es dabei zu beachten gilt?

Es hat sich gezeigt, dass Kinder beim Darstellungswechsel auf unterschiedliche Kriterien achten. Im Folgenden wird dies, anhand der Beispielaufgabe passende bildliche Darstellungen zu der vorgegebenen Aufgabe 3·4 auszuwählen, verdeutlicht.

Erstaunlich und nicht zu vernachlässigen ist die Tatsache, dass viele Kinder bereits einzelne Malaufgaben kennen, bevor die Multiplikation im Unterricht eingeführt wurde. Daher ist es nicht verwunderlich, dass einige Kinder beim Darstellungswechsel von mathematisch-symbolischen und bildlichen Darstellungen auf das **Gesamtergebnis** achten. Dementsprechend „passen“ Darstellungen für sie zusammen, wenn beide dasselbe Ergebnis haben (z. B. werden alle Darstellungen mit 12 Elementen – unabhängig von deren Anordnung – der Aufgabe 3·4 zugeordnet).

Kinder fokussieren besonders auch **einzelne Elemente**, die in beiden Darstellungen vorkommen müssen. Sie nehmen zum Beispiel die vier in den Blick und wählen weitere Darstellungen aus, bei welchen mehrmals „Vier“ zu sehen sind.

Kinder fokussieren auf die **Relation der Elemente**: Darstellungen „passen“ immer dann zusammen, wenn in beiden dieselbe Relation zu finden ist. Für das Beispiel 3·4 heißt das: Alle Darstellungen in welchen genau „drei Vierer“ zu finden sind, auch unabhängig von der Anordnung innerhalb der Darstellung, werden als passend klassifiziert.

Die eben genannten Kriterien treten nicht immer isoliert, sondern oft zusammen in Mischformen auf. Das heißt, dass die Vorgehensweisen der Kinder beim Darstellungswechsel sehr unterschiedlich sind und ihnen nicht (unbedingt) bewusst ist, dass es diese gibt. Daher sollte das Begriffsverständnis zum Darstellungswechsel im Unterricht mit den Kindern erarbeitet und die verschiedenen Kriterien bzw. Vorgehensweisen thematisiert werden: Was heißt „passend“ bzw. adäquater Darstellungswechsel? Je nach Unterrichtsschwerpunkt ist nicht nur ein flexibles Wechseln zwischen den Darstellungen, sondern auch zwischen den genannten Fokussierungen notwendig.

3. Wie kann man den expliziten Darstellungswechsel fördern – mögliche Umsetzung

Wie können diese Ziele im Unterricht umgesetzt werden?

Zusammenfassend kann folgendes zum Darstellungswechsel bei der Multiplikation festgehalten werden:

- inhaltliches Ziel:
 - Kennen von verschiedenen Grundvorstellungen der Multiplikation (zeitlich-sukzessiv, räumlich-simultan),
 - Wechseln und Interagieren mit diesen Vorstellungen
- prozessbezogenes Ziel: Anregen von Darstellungswechseln bei multiplikativen Aufgaben
 - Eigene Darstellungen anfertigen
 - Darstellungen mit anderen vergleichen
 - Gemeinsamkeiten und Unterschiede (was ist gleich, was ist verschieden?)
 - Kognitive Konfliktsituationen

- Unterschiede und Gemeinsamkeiten der verschiedenen möglichen Darstellungen herausarbeiten und aushandeln was unter „passend“ bei der Multiplikation zu verstehen ist

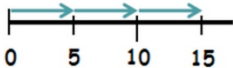
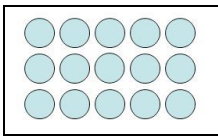
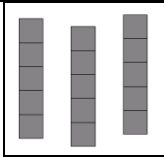
3.1 Inhaltliche Aspekte

Bei der Präsentation von (und der Diskussion über die) unterschiedlichen bildlichen Darstellungen zur Multiplikation, können die folgende Elemente helfen, geeignete Darstellungen auszuwählen, die...

- verschiedene Grundvorstellungen und verschiedene Zahlaspekte abdecken
- verschiedene Anordnungen zeigen
- verschiedene Möglichkeiten der Fokussierung zulassen.

Verschiedene Anordnungen innerhalb bildlicher Darstellungen sind in der folgenden Tabelle aufgeführt, in der nach lebenswirklichen und didaktischen bildlichen Darstellungen unterschieden wird (siehe Tab. unten).

Tabelle 1

Anordnung	Bildliche Darstellungen	
	lebenswirklich (Term: 3·4)	didaktisch (Term: 3·5)
linear		
flächig		
gruppiert		
andere		

Die Kinder sollen dann erklären, ob sie eine Malrechnung erkennen und wenn ja, welche. Dabei können insbesondere andere Darstellungen (wie die Schokolade oder die Rechenkette) interessante Diskussionen anregen: Unter welcher Fokussierung passen diese Darstellungen? Passende Darstellungen zu einer Aufgabe können insbesondere über das Sortieren und Unterscheiden erkennbar gemacht werden.

Umgekehrt ist es aber ebenso wichtig zu einer vorgegebenen Aufgabe ein passendes Bild zu malen. Auch dafür sollte im Unterricht zuvor geklärt werden, was „passend“ eigentlich meint. In Reflexionsphasen, kann mit Kindern über die verschiedenen Darstellungen gesprochen werden. Dazu zählt evtl. auch, das Diskutieren über folgende mögliche Fragen: Muss eine Handlung im Bild erkennbar sein? Müssen Personen mit auf das Bild? Muss es bunt sein? Muss es besonders schön gezeichnet sein? Wie wichtig sind Details/Einzelheiten im Bild?

Bei dem Darstellungswechsel von Term und Bild, passt ein Bild, welches dieselbe Anzahl an Elementen aufweist, wie der Term (Gesamtergebnis), welches beide Faktoren im Bild erkennen lässt (einzelne Elemente) und welches die Relation sichtbar macht. Dafür müssen die Kinder die bildlichen Darstellungen deuten und unterschiedliche Strukturierungen erklären (und bestenfalls auch schriftlich festhalten).

3.2 Methodische Aspekte

Um die oben genannten Ziele zu erreichen, kann das dialogische Lernen eine hilfreiche Methode bieten: Nach dem ICH-DU-WIR Prinzip ist zunächst eine individuelle Auseinandersetzung mit dem Thema wichtig („Welche Aufgabe sehe ich in dem Bild?“), bevor ein divergierender Austausch in Partnerarbeit oder Gruppenarbeit („Welche Aufgaben sehen die anderen?“) vollzogen werden kann. Die beschriebenen Aushandlungsprozesse und unterschiedlichen Sichtweisen auf bildliche Darstellungen müssen immer wieder thematisiert werden, um dieses Bewusstsein bei den Kindern hervorzurufen.

Neben der beschriebenen methodischen Gestaltung über verschiedene Sozialformen und der Notwendigkeit des Austauschs über den Darstellungswechsel bzw. über passende Darstellungen, sind **Variationen** in den Darstellungsebenen ein hilfreiches methodisches Instrument zur Förderung von Darstellungswechsel. Das bedeutet, dass nachdem ein Wechsel von Darstellungen vollführt wurde, eine Veränderung in einer Darstellungsebene getätigt und dann nach den Auswirkungen in der anderen Darstellungsebene gefragt wird. Dieses Vorgehen macht die Spezifität von unterschiedlichen Darstellungen deutlich. Beispielsweise wird in einem 3-4 Punktfeld eine Viererreihe hinzugelegt und nach der Auswirkung im Term gefragt (siehe Abb. 8): „Was muss man in der Aufgabe verändern? Warum muss man so verändern?“ Dabei ist der Zusammenhang und Rückbezug zwischen Ausgangsdarstellung und variiert Darstellung hervorzuheben.

3.3 Mögliche Beispiele

Im Folgenden werden Unterrichtsbeispiele in Form von Arbeitsblättern und einem Spiel vorgestellt.

Arbeitsblätter

Die folgenden Arbeitsblätter dienen als Impulse für die Kinder untereinander ins Gespräch zu kommen. Besonders wichtig ist aber immer auch die Reflexion der gefundenen Lösungen.

Diese dienen gleichzeitig auch der Standortbestimmung (vgl. auch Haus 9 und 10). Der Lehrende kann Kompetenzen sowie Entwicklungsfelder bestimmen und gegebenenfalls im Unterricht (erneut) den Darstellungswechsel aufgreifen.

Ziel des folgenden Arbeitsblattes (Abb. 8) ist das Bewerten eines durchgeführten Darstellungswechsels durch ein anderes Kind.

Datum		
Name:	Prüfer:	
Bild:	Passen Bild und Rechenaufgabe zusammen? ☐ passen ☐ passen nicht Begründung:	Meine Lösung: Rechengeschichte:
	Rechenaufgabe: $4 \cdot 5$	Rechenaufgabe:

Abbildung 7: AB zum Bewerten von Darstellungswechsel (angelehnt an Bühling 2006)

Ziel des folgenden Arbeitsblattes (Abb. 9) ist die zu vollführende Variation (das operative Verändern) einer Darstellung.

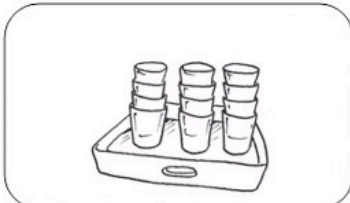
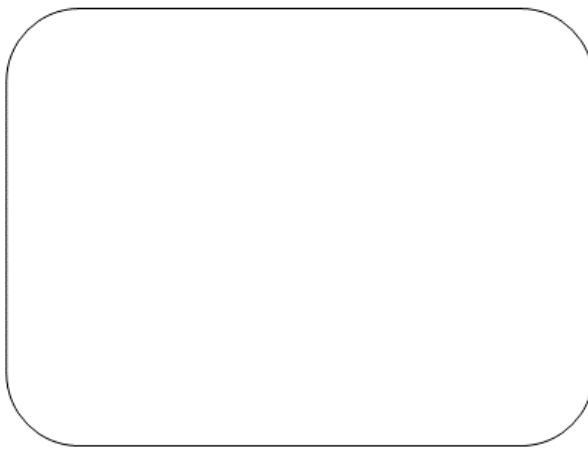
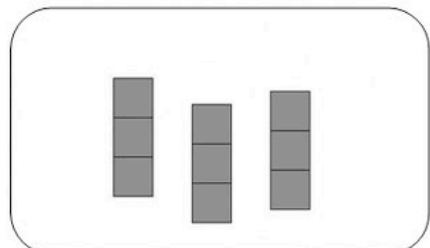
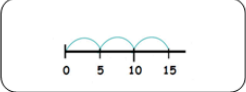
Name: Datum:	Name: Datum:
1. Male ein Bild, das zu der Aufgabe $3 \cdot 5$ passt.	
	1. Verändere das Bild so, dass es zu der Aufgabe $3 \cdot 5$ passt. Male mit einer Farbe in das Bild.
2. Kannst du dein Bild verändern, dass es zu der Aufgabe $3 \cdot 6$ passt? Male mit einer anderen Farbe.	
3. Kannst du dein Bild verändern, dass es zu der Aufgabe $4 \cdot 5$ passt? Male wieder mit einer anderen Farbe.	2. Verändere das Bild so, dass es zu der Aufgabe $4 \cdot 3$ passt. Male mit einer Farbe in das Bild.

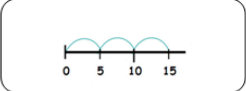
Abbildung 8: AB zur Variation

Ziel dieses Arbeitsblattes (Abb. 9) ist die Variation einer gegebenen didaktischen Darstellung (Rechenstrich)

Name: _____ Datum: _____



1. Verändere das Bild so, dass es zu der Aufgabe $3 \cdot 6$ passt.
Male mit einer Farbe in das Bild.
Was hat sich verändert? Im Bild? Bei der Aufgabe?

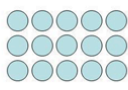


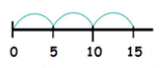
2. Verändere das Bild so, dass es zu der Aufgabe $4 \cdot 3$ passt.
Male mit einer Farbe in das Bild.
Was hat sich verändert? Beim Bild? Bei der Aufgabe?

Abbildung 9: AB zur Variation am Rechenstrich

Das folgende Arbeitsblatt (Abb. 10) greift den Vergleich einer Veränderung in den verschiedenen didaktischen Darstellungen Zahlenstrahl bzw. Rechenstrich und Punktefeld auf.

Name: _____ Datum: _____





1.) Passen diese Bilder zu der Aufgabe $3 \cdot 5$?

☐ passen ☐ passen nicht

Begründung:

2.) Kannst du die Bilder so verändern, dass sie zu der Aufgabe $3 \cdot 6$ passen? Male mit einer Farbe in das Bild.
Vergleiche die beiden Bilder. Was hat sich verändert?

Abbildung 10: AB zur Variation und Vergleich zwischen zwei didaktischen Darstellungen

Quartett

Ziel des Spiels soll es sein, eigene, „passende“ Darstellungen anzufertigen, verschiedene Darstellungen desselben mathematischen Objekts kennen und unterscheiden zu lernen. Vor dem Einsatz des

Spiele sollte bereits mit den Kindern über „passende“ Darstellungen gesprochen worden sein (z.B. über AB).

Selbstgestaltetes **Quartett** (oder Quintett, oder Sextett...):

Die Kinder können verschiedene passende Darstellungen zu einem selbstgewählten/vorgegebenen Term aufschreiben bzw. malen. Es ist sinnvoll sich von vornherein auf die Darstellungen zu einigen, z.B., dass zu jedem Quartett die Darstellungen „Bild“, „Rechenaufgabe“, „Rechengeschichte“, „Ergebnis“ gehören. Es ist aber durchaus auch denkbar wie bei Abb. 6 auch mehrere bildliche oder mathematisch-symbolische Darstellungen zuzulassen. Die zu einem Quartett gehörenden Karten werden nicht, wie üblich, jeweils gleich eingefärbt, so sind weitere Spielvarianten möglich (vgl. auch das Malquartett in Haus 3 UM. (Blanco Quartettvorlagen im Anhang)

Spielregel: Zunächst werden die Karten gemischt und einzeln an die Spieler verteilt – dabei erhalten unter Umständen einige Spieler eine Karte mehr als andere. Der Spieler links vom Kartengeber beginnt das Spiel und fragt einen beliebigen Mitspieler nach einer eindeutig bezeichneten Karte, die ihm zur Bildung eines Quartetts fehlt; z.B. „Mehmet, hast du die Rechengeschichte, die zu $3 \cdot 3$ passt?“ Die Kinder müssen also zunächst in ihren Karten, die sie auf der Hand haben zueinander passende finden, um dann nach weiteren zu fragen. Interessant sind dabei Karten, die zu mehreren Quartetten passen.

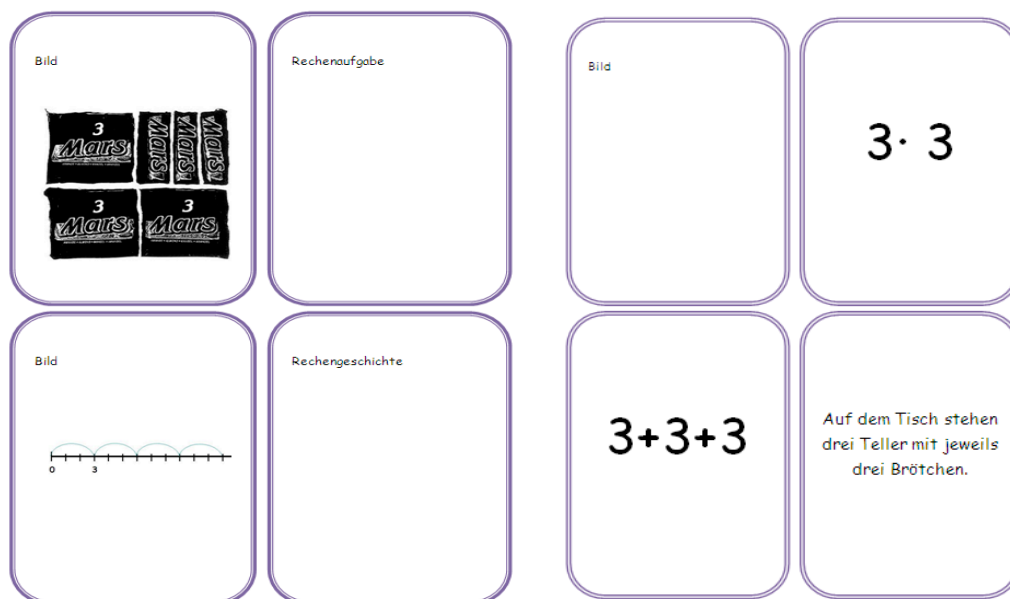


Abbildung 11 Quartette

Literatur

- BÜHLING, M (2006): Entwicklung und Erprobung eines praktikablen Konzepts zur Förderung einer leistungsheterogenen Lerngruppe unter besonderer Berücksichtigung von Standortbestimmungen am Beispiel der Einführung des Kleinen Einmaleins in einem 2. Schuljahr. Unveröffentlichte schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Zweiten Staatsprüfung im Studienseminar Bochum.
- KMK (2005): *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. München: Wolters-Kluwer & Luchterhand.
- KUHNKE, K. (2011) Vorgehensweisen von Zweitklässlern beim Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen von Zahlen und Operationen - Eine Untersuchung am Beispiel des multiplikativen Rechnens. In: Haug, R. & Holzäpfel, L. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM Verlag.
- MINISTERIUM FÜR SCHULE UND WEITERBILDUNG DES LANDES NORDRHEIN-WESTFALEN (2008): *Lehrplan Mathematik an Grundschulen* (1 Auflage). Frechen: Ritterbach Verlag.
- SELTHER, C. (1996): Grundschülervorstellungen zum multiplikativen Rechnen. In: *mathematik lehren* (78), 10-14.
- SÖBBEKE, E. (2005): *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern*. Hildesheim: Franzbecker.
- VOM HOFER, R. & JORDAN, A. (2009): Wissen vernetzen. In: *mathematik lehren* (159), 4-9.
- WALTHER, G. u.a. (Hrsg): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret: Aufgabenbeispiele - Unterrichtsanregungen - Fortbildungsideen

Datum

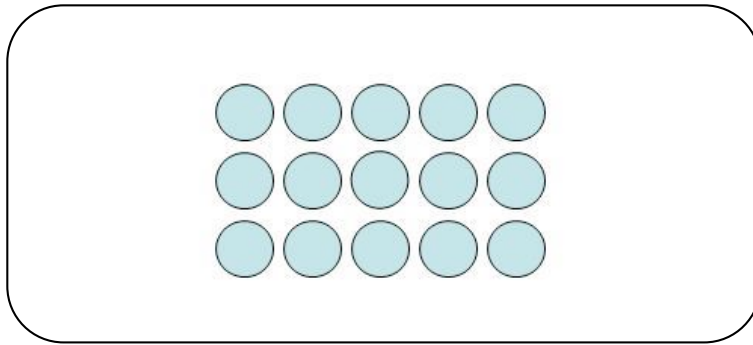
Name:	Prüfer:	
<i>Bild:</i>	Passen Bild und Rechenaufgabe zusammen? ☐ passen ☐ passen nicht Begründung:	Meine Lösung: <i>Rechengeschichte:</i>
<i>Rechenaufgabe:</i>		<i>Rechenaufgabe:</i>
$4 \cdot 5$		

Datum

Name:	Prüfer:	
<i>Rechengeschichte:</i>	Passen Rechengeschichte und Rechenaufgabe zusammen? ☐ passen ☐ passen nicht Begründung:	Meine Lösung: <i>Rechengeschichte:</i>
<i>Rechenaufgabe:</i>		<i>Rechenaufgabe:</i>
$4 \cdot 5$		

Name:

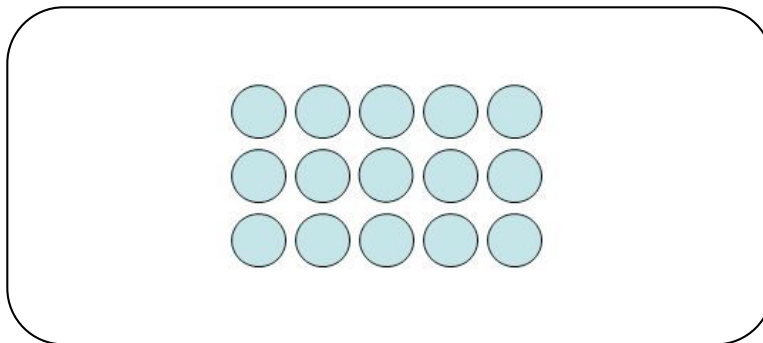
Datum:



1. Verändere das Bild so, dass es zu der Aufgabe $3 \cdot 6$ passt.

Male mit einer Farbe in das Bild.

Was hat sich verändert? Im Bild? Bei der Aufgabe?



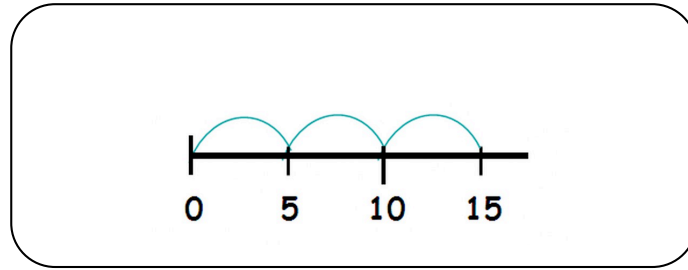
2. Verändere das Bild so, dass es zu der Aufgabe $4 \cdot 3$ passt.

Male mit einer Farbe in das Bild.

Was hat sich verändert? Beim Bild? Bei der Aufgabe?

Name:

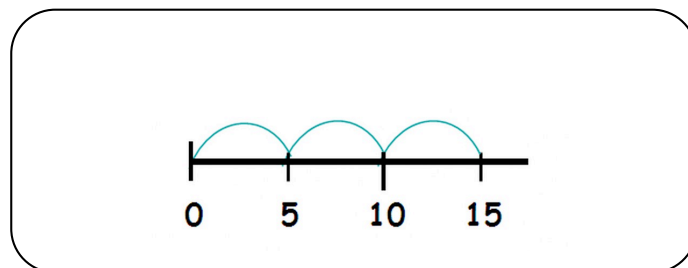
Datum:



1. Verändere das Bild so, dass es zu der Aufgabe $3 \cdot 6$ passt.

Male mit einer Farbe in das Bild.

Was hat sich verändert? Im Bild? Bei der Aufgabe?



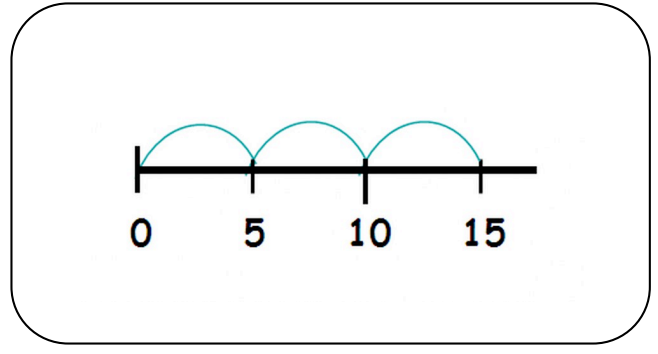
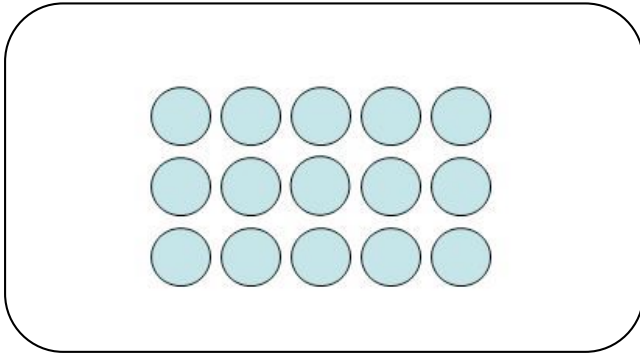
2. Verändere das Bild so, dass es zu der Aufgabe $4 \cdot 3$ passt.

Male mit einer Farbe in das Bild.

Was hat sich verändert? Beim Bild? Bei der Aufgabe?

Name:

Datum:



1.) Passen diese Bilder zu der Aufgabe $3 \cdot 5$?

☐ passen

☐ passen nicht

Begründung:

2.) Kannst du die Bilder so verändern, dass sie zu der Aufgabe $3 \cdot 6$ passen? Male mit einer Farbe in das Bild.

Vergleiche die beiden Bilder. Was hat sich verändert?
