



1:1 richtig üben

Die Division nimmt als eine der vier Grundrechenarten einen eher kleinen Stellenwert im Lehrplan der Mathematik ein. Trotzdem sollen den Kindern in der Grundschule auch Lerngelegenheiten für das Dividieren angeboten werden, sodass sie mit Hilfe von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien Divisionsaufgaben sowohl mündlich als auch halbschriftlich lösen können. Sie sollen außerdem dazu angeleitet werden, Zahlbeziehungen für ein vorteilhaftes Rechnen zu nutzen (Lehrplan, Ende Klasse 4).

Im Unterricht ist zunächst ein tragfähiges Operationsverständnis der Division bei den Kindern aufzubauen. Dazu sind eine Verinnerlichung der beiden Grundvorstellungen (Aufteilen und Verteilen), das Beherrschen eines flexiblen Darstellungswechsels und gesammelte Erfahrungen mit dem Distributivgesetz unabdingbar.

Aufteil- und Verteilhandlungen stehen in enger Verbindung mit der Multiplikation, Addition und Subtraktion. Die Aufgabe $24 : 8$ kann wie folgt mit Rückgriff auf die anderen Grundrechenarten gelöst werden:

$24 : 8 = 3$, denn $8 \cdot 3 = 24$ $24 : 8 = 24 - 8 - 8 - 8$, also 3 $24 : 8$ ist $8 + 8 + 8 = 3 \cdot 8$, also $24 : 8 = 3$
--

Es empfiehlt sich daher, zunächst ein Verständnis für die anderen drei Grundrechenarten aufzubauen. Bei einem zeitgleichen Einführen mit der Multiplikation, können die Divisionsaufgaben ausschließlich handelnd am Material und mit Hilfe von informellen Strategien von den Kindern gelöst werden (siehe wiederholte Addition und Subtraktion). Diese informellen Strategien sind allerdings sehr fehleranfällig, ineffizient und bei größeren Dividenden und Divisoren zunehmend unpraktikabel. Sie sollen daher bald möglichst durch heuristische Strategien abgelöst werden. Sie dienen als Vorbereitung für das halbschriftliche Rechnen.

Wie kann kann im Unterricht vorgegangen werden?

Grundlegend bei der Einführung der Division ist, dass Aufteil- und Verteilhandlungen aktiv von den Kindern durchgeführt werden. Dies sollte sowohl in Alltagssituationen (z.B. Gruppenbildung im Sportunterricht) sowie handelnd am homogenen Material (z.B. Perlen auf- und verteilen) stattfinden. Somit wird zunächst eine allgemeine Vorstellung, was bei der Division überhaupt passiert, aufgebaut.

Die Kinder sollen während der Durchführung von Auf- und Verteilhandlungen kontinuierlich zum Verbalisieren ihres Tuns aufgefordert und es muss die Verbindung zur Schreibweise hergestellt werden. Wurde ausreichend mit dem Material operiert, sollte eine schrittweise Ablösung von diesem stattfinden, sodass die Handlungen zunehmend mental stattfinden können. Ziel ist es, dass die Kinder Divisionsaufgaben flexibel zwischen der handelnden, symbolischen und bildlichen Ebene hin und her übersetzen können.

Darüber hinaus sind Erfahrungen mit dem Distributivgesetz zu sammeln, damit schwierige Divisionsaufgaben von bereits bewussten Aufgaben abgeleitet werden können (siehe unten). Das Distributivgesetz bildet somit die Grundlage für das schrittweise Rechnen.

Nach dem Aufbau eines Operationsverständnisses sollten Divisionsaufgaben automatisiert werden.

Wie lernen die Kinder die Aufgaben des kleinen Einmaleins am besten auswendig?

Zum Automatisieren von Divisionsaufgaben eignen sich am besten sogenannte Kernaufgaben. Dabei handelt es sich um Aufgaben, die sich die Kinder leichter merken können und aus denen die anderen Aufgaben der Reihe rekonstruiert werden können.

Kernaufgaben der Division sind unter anderem Aufgaben mit den Divisoren 1, 2, 5, 10.

Beispiele für **Kernaufgaben** sind:

$1 : 1 = 1$	$5 : 5 = 1$	$10 : 10 = 1$
$2 : 1 = 2$	$10 : 5 = 2$	$20 : 10 = 2$
...	$20 : 5 = 4$	$40 : 10 = 4$
$10 : 1 = 10$	$40 : 5 = 8$	$80 : 10 = 8$

Divisionsaufgaben, bei denen der Zahlenwert des Dividenden und des Divisors der gleiche ist, können Kinder sich auch leicht behalten (**umgekehrte Quadratzahlaufgaben**). Wie beispielsweise $3 : 3 = 1$, $5 : 5 = 1$ oder $8 : 8 = 1$.

Sobald die Einmaleinsreihe von den Kindern automatisiert ist, können sie Divisionsaufgaben auch mittels der **Umkehraufgaben** der Multiplikation lösen:

$16 : 8 = 2$	denn $2 \cdot 8 = 16$
$25 : 5 = 5$	denn $5 \cdot 5 = 25$

Darüber hinaus können sie schwierigere Aufgaben über Kernaufgaben als leichtere **Nachbaraufgaben** ableiten. Vor allem **Divisionsaufgaben aus der 9er-Reihe** können die

Kinder gut von den 10er-Divisionsaufgaben ableiten. Somit können sie die Aufgaben $72 : 8$, $25 : 5$ und $24 : 6$ wie folgt lösen:

$80 : 8$ ist bekannt. Daher gilt $72 : 8 = 9$
 $20 : 5 = 4$ ist bekannt. Daher gilt $25 : 5 = 5$
 $30 : 6 = 5$ ist bekannt. Daher gilt $24 : 6 = 4$

Auf ähnliche Weise können Aufgaben **schrittweise** mithilfe bereits gekannter Aufgaben gelöst werden. Zum Beispiel können sie $48 : 8$ so lösen:

$40 : 8 = 5$ ist bekannt.
 $48 : 8$ ist $40 : 8 + 8 : 8$, also $5 + 1$, also 6

Um Divisionsaufgaben mithilfe von Nachbareaufgaben und dem schrittweisen Rechnen lösen zu können, ist eine Einsicht in das Distributivgesetz grundlegend.

Mithilfe des gleichsinnigen Verändern des Dividenden und Divisors können die Kinder außerdem das **Konstanzgesetz des Quotienten** üben und festigen. Die Aufgabe $250 : 5$ könnte dann folgende Überlegung hervorrufen:

$250 : 5 = \underline{\quad}$, über gleichsinniges Verändern mit Faktor 2 lösen, also:
 $500 : 10 = 50$, somit gilt:
 $250 : 5 = 50$

Des Weiteren besteht noch die Möglichkeit, auf **Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben** zurückzugreifen. Die vorherige genannte Aufgabe $48 : 8$ können die Kinder folgendermaßen lösen:

$24 : 8 = 3$ ist bekannt. 48 ist das Doppelte von 24,
also ist $48 : 8 = 6$, denn 6 ist das Doppelte von 3

Schließlich können die Kinder **Ableitungsstrategien** nutzen, um Divisionsaufgaben zu lösen. Die Kernaufgabe $15 : 5$ sowie die auswendig gewusst Aufgabe $32 : 4$ helfen somit beim Lösen der folgenden Aufgaben

$150 : 5 = 30$, denn $15 : 5 = 3$
 $320 : 4 = 80$, denn $32 : 4 = 8$

Mit den angeführten heuristischen Strategien können unbekannte Divisionsaufgaben über bekannte Divisionsaufgaben erst gelöst werden, wenn im Vorfeld im Unterricht durch das Entdecken und Erarbeiten unterschiedlicher Lösungswege für Divisionsaufgaben thematisiert worden sind. Das Aufzeigen von Beziehungen der Aufgaben untereinander kann am Punktefeld oder mit Hilfe von Rechteckfeldern veranschaulicht werden.

Wie können die Kinder (selbstständig) üben?

Dafür sollte jedem Kind eine kleine Übungskartei zur Verfügung gestellt werden:

Kartensatz

- 27 Kärtchen mit den **Kernaufgaben**

$$15 : 5$$

$$3$$

- 26 Kärtchen mit den Kernaufgaben und ihren Tauschaufgaben

$$15 : 5 = \underline{\quad}$$

$$15 : \underline{\quad} = 5$$

$$3$$

- 26 Kärtchen mit Aufgaben zum Ableiten von den Kernaufgaben I

$$150 : 5 = \underline{\quad}$$

$$15 : 5 = \underline{\quad}$$

$$30$$

$$3$$

- 20 Kärtchen mit Aufgaben zum Ableiten von den gemischten Aufgaben

$$320 : 4 = \underline{\quad}$$

$$32 : 4 = \underline{\quad}$$

$$80$$

$$8$$

- 9 Kärtchen mit umgekehrten Quadratzahlaufgaben

$$36 : 6$$

$$6$$

- 11 Kärtchen mit Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben

$$\begin{array}{l} 6 : 3 \\ 12 : 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \\ 4 \end{array}$$

- 9 Kärtchen mit Umkehraufgaben

$$\begin{array}{l} 42 : 7 \\ _ \cdot 7 = 42 \end{array}$$

$$6$$

- 22 Kärtchen mit Nachbaraufgaben

$$\begin{array}{l} 49 : 7 \\ 56 : 7 \end{array}$$

$$8$$

- 8 Kärtchen mit Aufgaben aus der 9er-Reihe der Multiplikation

$$\begin{array}{l} 30 : 3 \\ 27 : 3 \end{array}$$

$$9$$

- 20 Kärtchen mit gemischten Aufgaben

$$21 : 7$$

$$3$$

- 9 Kärtchen mit Aufgaben zum Konstanzgesetz des Quotienten

$$250 : 5$$

$$\begin{array}{l} 5 \\ 500 : 10 \end{array}$$

Die Karten können auf farbigem Karton (z.B. 160g) ausgedruckt werden. Diese Übungskarten kann das Kind dann in einer Lernbox oder einer Karteikiste nach Schwierigkeitsgrad sortieren. Entsprechende Lernboxen können bei verschiedenen Verlagen im Internet bestellt werden.

$$4 : 2$$

$$6 : 2$$

$$8 : 2$$

$$10 : 5$$

$$15 : 5$$

$$20 : 5$$

$$20 : 10$$

$$30 : 10$$

$$40 : 10$$

4

3

2

4

3

2

4

3

2

$$10 : 2$$

$$12 : 2$$

$$14 : 2$$

$$25 : 5$$

$$30 : 5$$

$$35 : 5$$

$$50 : 10$$

$$60 : 10$$

$$70 : 10$$

7

6

5

7

6

5

7

6

5

$$16 : 2$$

$$18 : 2$$

$$20 : 2$$

$$40 : 5$$

$$45 : 5$$

$$50 : 5$$

$$80 : 10$$

$$90 : 10$$

$$100 : 10$$

10

9

8

10

9

8

10

9

8

1 : 1

2 : 1

3 : 1

4 : 1

5 : 1

6 : 1

7 : 1

8 : 1

9 : 1

10 : 1		

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10		

$$6 : 2 = \underline{\quad}$$

$$6 : \underline{\quad} = 2$$

$$8 : 2 = \underline{\quad}$$

$$8 : \underline{\quad} = 2$$

$$10 : 5 = \underline{\quad}$$

$$10 : \underline{\quad} = 5$$

$$15 : 5 = \underline{\quad}$$

$$15 : \underline{\quad} = 5$$

$$20 : 5 = \underline{\quad}$$

$$20 : \underline{\quad} = 5$$

$$20 : 10 = \underline{\quad}$$

$$20 : \underline{\quad} = 10$$

$$30 : 10 = \underline{\quad}$$

$$30 : \underline{\quad} = 10$$

$$40 : 10 = \underline{\quad}$$

$$40 : \underline{\quad} = 10$$

4	3	
4	3	2
4	3	2

$$10 : 2 = \underline{\quad}$$

$$10 : \underline{\quad} = 2$$

$$12 : 2 = \underline{\quad}$$

$$12 : \underline{\quad} = 2$$

$$14 : 2 = \underline{\quad}$$

$$14 : \underline{\quad} = 2$$

$$25 : 5 = \underline{\quad}$$

$$25 : \underline{\quad} = 5$$

$$30 : 5 = \underline{\quad}$$

$$30 : \underline{\quad} = 5$$

$$35 : 5 = \underline{\quad}$$

$$35 : \underline{\quad} = 5$$

$$50 : 10 = \underline{\quad}$$

$$50 : \underline{\quad} = 10$$

$$60 : 10 = \underline{\quad}$$

$$60 : \underline{\quad} = 10$$

$$70 : 10 = \underline{\quad}$$

$$70 : \underline{\quad} = 10$$

7

6

5

7

6

5

7

6

5

$$16 : 2 = \underline{\quad}$$

$$16 : \underline{\quad} = 2$$

$$18 : 2 = \underline{\quad}$$

$$18 : \underline{\quad} = 2$$

$$20 : 2 = \underline{\quad}$$

$$20 : \underline{\quad} = 2$$

$$40 : 5 = \underline{\quad}$$

$$40 : \underline{\quad} = 5$$

$$45 : 5 = \underline{\quad}$$

$$45 : \underline{\quad} = 5$$

$$50 : 5 = \underline{\quad}$$

$$50 : \underline{\quad} = 5$$

$$80 : 10 = \underline{\quad}$$

$$80 : \underline{\quad} = 10$$

$$90 : 10 = \underline{\quad}$$

$$90 : \underline{\quad} = 10$$

$$100 : 10 = \underline{\quad}$$

$$100 : \underline{\quad} = 10$$

10	9	8
10	9	8
10	9	8

$60 : 6$ $54 : 6$	$20 : 2$ $18 : 2$	$80 : 8$ $72 : 8$
$40 : 4$ $36 : 4$	$70 : 7$ $63 : 7$	$50 : 5$ $45 : 5$
$30 : 3$ $27 : 3$	$90 : 9$ $81 : 9$	

9

9

9

9

9

9

9

9

4 : 2

9 : 3

16 : 4

25 : 5

36 : 6

49 : 7

64 : 8

81 : 9

100 : 10

4

$$4 \cdot 4 = 16$$

3

$$3 \cdot 3 = 9$$

2

$$2 \cdot 2 = 4$$

7

$$7 \cdot 7 = 49$$

6

$$6 \cdot 6 = 36$$

5

$$5 \cdot 5 = 25$$

10

$$10 \cdot 10 = 100$$

9

$$9 \cdot 9 = 81$$

8

$$8 \cdot 8 = 64$$

16 : 4
12 : 4

20 : 2
18 : 2

40 : 8
48 : 8

15 : 3
18 : 3

49 : 7
56 : 7

50 : 5
45 : 5

30 : 3
27 : 3

30 : 6
24 : 6

36 : 6
42 : 6

6

9

3

9

8

6

7

4

9

60 : 6
54 : 6

35 : 7
28 : 7

80 : 8
72 : 8

9 : 3
12 : 3

70 : 7
63 : 7

14 : 7
21 : 7

64 : 8
56 : 8

20 : 4
24 : 4

12 : 6
18 : 6

9

4

9

3

9

4

3

6

7

$90 : 9$ $81 : 9$	$8 : 4$ $12 : 4$	$40 : 4$ $36 : 4$
$16 : 8$ $24 : 8$		

9	3	9
		3

$$12 : 3$$

$$\underline{\quad} \cdot 3 = 12$$

$$42 : 7$$

$$\underline{\quad} \cdot 7 = 42$$

$$24 : 4$$

$$\underline{\quad} \cdot 4 = 24$$

$$56 : 8$$

$$\underline{\quad} \cdot 8 = 56$$

$$18 : 6$$

$$\underline{\quad} \cdot 6 = 18$$

$$56 : 7$$

$$\underline{\quad} \cdot 7 = 56$$

$$18 : 3$$

$$\underline{\quad} \cdot 3 = 18$$

$$12 : 4$$

$$\underline{\quad} \cdot 4 = 12$$

$$24 : 6$$

$$\underline{\quad} \cdot 6 = 24$$

6

6

4

8

3

7

4

3

6

$$60 : 2 = \underline{\quad}$$

$$6 : 2 = \underline{\quad}$$

$$80 : 2 = \underline{\quad}$$

$$8 : 2 = \underline{\quad}$$

$$100 : 5 = \underline{\quad}$$

$$10 : 5 = \underline{\quad}$$

$$150 : 5 = \underline{\quad}$$

$$15 : 5 = \underline{\quad}$$

$$200 : 5 = \underline{\quad}$$

$$20 : 5 = \underline{\quad}$$

$$200 : 10 = \underline{\quad}$$

$$20 : 10 = \underline{\quad}$$

$$300 : 10 = \underline{\quad}$$

$$30 : 10 = \underline{\quad}$$

$$400 : 10 = \underline{\quad}$$

$$40 : 10 = \underline{\quad}$$

40

4

30

3

40

4

30

3

20

2

40

4

30

3

20

2

$$100 : 2 = \underline{\quad}$$

$$10 : 2 = \underline{\quad}$$

$$120 : 2 = \underline{\quad}$$

$$12 : 2 = \underline{\quad}$$

$$140 : 2 = \underline{\quad}$$

$$14 : 2 = \underline{\quad}$$

$$250 : 5 = \underline{\quad}$$

$$25 : 5 = \underline{\quad}$$

$$300 : 5 = \underline{\quad}$$

$$30 : 5 = \underline{\quad}$$

$$350 : 5 = \underline{\quad}$$

$$35 : 5 = \underline{\quad}$$

$$500 : 10 = \underline{\quad}$$

$$50 : 10 = \underline{\quad}$$

$$600 : 10 = \underline{\quad}$$

$$60 : 10 = \underline{\quad}$$

$$700 : 10 = \underline{\quad}$$

$$70 : 10 = \underline{\quad}$$

70

7

60

6

50

5

70

7

60

6

50

5

70

7

60

6

50

5

$$160 : 2 = \underline{\quad}$$

$$16 : 2 = \underline{\quad}$$

$$180 : 2 = \underline{\quad}$$

$$18 : 2 = \underline{\quad}$$

$$200 : 2 = \underline{\quad}$$

$$20 : 2 = \underline{\quad}$$

$$400 : 5 = \underline{\quad}$$

$$40 : 5 = \underline{\quad}$$

$$450 : 5 = \underline{\quad}$$

$$45 : 5 = \underline{\quad}$$

$$500 : 5 = \underline{\quad}$$

$$50 : 5 = \underline{\quad}$$

$$800 : 10 = \underline{\quad}$$

$$80 : 10 = \underline{\quad}$$

$$900 : 10 = \underline{\quad}$$

$$90 : 10 = \underline{\quad}$$

$$1000 : 10 = \underline{\quad}$$

$$100 : 10 = \underline{\quad}$$

100

10

90

9

80

8

100

10

90

9

80

8

100

10

90

9

80

8

$$240 : 3 = \underline{\quad}$$

$$24 : 3 = \underline{\quad}$$

$$320 : 4 = \underline{\quad}$$

$$32 : 4 = \underline{\quad}$$

$$240 : 8 = \underline{\quad}$$

$$24 : 8 = \underline{\quad}$$

$$560 : 7 = \underline{\quad}$$

$$56 : 7 = \underline{\quad}$$

$$480 : 6 = \underline{\quad}$$

$$48 : 6 = \underline{\quad}$$

$$560 : 8 = \underline{\quad}$$

$$56 : 8 = \underline{\quad}$$

$$480 : 8 = \underline{\quad}$$

$$480 : 8 = \underline{\quad}$$

$$320 : 8 = \underline{\quad}$$

$$32 : 8 = \underline{\quad}$$

$$210 : 3 = \underline{\quad}$$

$$21 : 3 = \underline{\quad}$$

30

3

80

8

80

8

70

7

80

8

80

8

70

7

40

4

60

6

$$210 : 7 = \underline{\quad}$$

$$21 : 7 = \underline{\quad}$$

$$280 : 4 = \underline{\quad}$$

$$28 : 4 = \underline{\quad}$$

$$420 : 6 = \underline{\quad}$$

$$420 : 6 = \underline{\quad}$$

$$180 : 3 = \underline{\quad}$$

$$18 : 3 = \underline{\quad}$$

$$420 : 7 = \underline{\quad}$$

$$42 : 7 = \underline{\quad}$$

$$240 : 4 = \underline{\quad}$$

$$24 : 4 = \underline{\quad}$$

$$240 : 6 = \underline{\quad}$$

$$24 : 6 = \underline{\quad}$$

$$180 : 6 = \underline{\quad}$$

$$18 : 6 = \underline{\quad}$$

$$280 : 7 = \underline{\quad}$$

$$28 : 7 = \underline{\quad}$$

70

7

70

7

30

3

60

6

60

6

60

6

40

4

30

3

40

4

$$120 : 3 = \underline{\quad}$$

$$12 : 3 = \underline{\quad}$$

$$120 : 4 = \underline{\quad}$$

$$12 : 4 = \underline{\quad}$$

	30 3	40 4

24 : 3

32 : 4

24 : 8

56 : 7

48 : 6

56 : 8

48 : 8

32 : 8

21 : 3

3

8

8

7

8

8

7

4

6

21 : 7

28 : 4

42 : 6

18 : 3

42 : 7

24 : 4

24 : 6

18 : 6

28 : 7

7

7

3

6

6

6

4

3

4

$12 : 3$	$12 : 4$	

	3	4

12 : 4

6 : 2

24 : 4

12 : 2

36 : 4

18 : 2

18 : 6

9 : 3

42 : 6

21 : 3

48 : 6

24 : 3

15 : 5

30 : 10

35 : 5

70 : 10

45 : 5

90 : 10

3

6

9

3

7

8

3

7

9