



Moderationspfad

Haus 3 FM Modul 3.5.:

„Guter Umgang mit Darstellungsmitteln“

Anmerkung: Dieses Modul bietet viele Grundlageninformationen zum Umgang mit Darstellungsmitteln und ist daher in weiten Teilen als Vortrag angelegt. Auflockerungen kann zwischendurch eine Filmsequenz („Forschermittelfilm“) bieten oder aber einige ausgewählte Aktivitäten, die jedoch je nach Vorkenntnissen und Bedürfnislage des Kollegiums variiert und erweitert werden können. Dadurch, dass die folgende Präsentation recht umfangreich ist, wird nicht jede Folie im Einzelnen beschrieben, sondern z. T. mehrere Folien in der Beschreibung zusammengefasst.

Zeitraumen: Richtet sich danach, ob alle Fragen, die in der Präsentation diskutiert werden, an einem Tag und in dieser Reihenfolge mit den Teilnehmern durchgeführt werden. Das Modul 3.5 ist auch sehr gut mit den anderen Präsentationen aus Haus 3 zu verknüpfen. Insgesamt bietet es sich an, zu diesem umfassenden Thema länger als nur eine Veranstaltungslänge zu arbeiten.

Material: Laptop, Beamer, technische Möglichkeit (WLAN), um einen Film von unserer Homepage zeigen zu können, Informationstexte für die Teilnehmer, die in FM unter dem Stichwort „Material für Teilnehmer“ zu finden sind und ggf. schon vor der geplanten Veranstaltung zur Vorbereitung auszuhändigen sind.



Zeit	Kommentar	Material												
5'	Folie 1 - 3: Begrüßung / Transparenz über Verlauf der Veranstaltung und Hinweis auf das Haus 3 auf der PIKAS Homepage: pikas.dzlm.de	Folie 2  Aufbau des Fortbildungsmoduls 3.5 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?“ 2. Was sind Darstellungsmittel? 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel? 4. Welche Darstellungsmittel wähle ich aus? 5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein? 6. Abschluss Januar 2018 © PIK AS (http://www.pikas.dzlm.de)  2												
3-5'	Folie 4-6: Start in Teil 1, der sich mit der Frage beschäftigt, wie eigentlich die „Mathematik in die Köpfe“ von Kindern kommt. Es soll dafür sensibilisiert werden, dass vor allem in der Schuleingangsphase eine der wichtigsten Aufgaben des Mathematikunterrichts darin besteht, so genannte „Vorstellungsbilder“ in den Köpfen der Kinder aufzubauen. Nur wenn sich ein Kind im Kopf bildhaft vorstellen kann, wie Zahlen und Operationen aussehen können, kann es am Ende flexibel rechnen. Kinder, die diese Vorstellungsbilder nicht ausbilden konnten, rechnen weiterhin oft zählend oder können sich lange Zeit nicht von unterstützenden Materialien lösen.	Folie 4  1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?“ „Mathe in den Kopf?“ – Wie geht das eigentlich? Ziel des heutigen Mathematikunterrichts in der Grundschule ist es, dass jedes Kind sicher Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren lernt. Dabei muss jeder Schüler die Zeit und Möglichkeit erhalten, eine tragfähige Zahl- und Operationsvorstellung aufzubauen. Beide bilden die Grundlage, um später flexibel rechnen zu können. Januar 2018 © PIK AS (http://www.pikas.dzlm.de)  4												
5'	Folie 7: Um zu verstehen, wie Mathematik „in den Kopf“ kommen kann, ist es interessant kurz darüber nachzudenken, wie allgemein Wissen in Köpfe von Kindern (und Erwachsenen) kommt. In Anlehnung an das in Hoenisch/ Niggemeyer („Mathe Kings“, S. 30/31) veröffentlichte Modell wird beschrieben, wie Vorschulkinder lernen und sich Wissen aneignen. Zunächst wird über konkrete Erfahrungen (vor allem in Spielsituationen) und eng am Material gelernt. Mit zunehmendem Aufbau von Vorstellungsbildern im Kopf kann dann später davon abstrahiert werden (von der Übergangsphase zur Abstraktion). Dieses Modell ist übertragbar auf die Lernprozesse von Schulkindern, in diesem Fall auf das Aneignen von Wissen allgemein und auch im Besonderen im Mathematikunterricht.	Folie 7  1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?“ Am Anfang lernt das Kind so... <table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">Der individuelle Lernprozess</th> </tr> <tr> <th>Phase des Konkreten</th> <th>Übergangsphase</th> <th>Phase des Abstrakten</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>spielen, anfassen, wahrnehmen, analysieren, ...</td> <td>nachzählen, vergleichen, zuordnen, sortieren, was passt zusammen, ...</td> <td>Mit Symbolen arbeiten: Zahlen zu Turmbauten aufschreiben. Eine Summenzahl dazu notieren, ...</td> </tr> <tr> <td>Kind begegnet konkreten, sinnlich wahrnehmbaren Dingen seiner Umwelt. Es beurteilt die Welt nach ihrem äußeren Schein. „Ich habe mehr Klotze als du“ kann dabei eine erste Feststellung sein.</td> <td>Kind kombiniert das Konkrete mit etwas Abstraktem. Es vergleicht einen Turm aus Klotzen, zählt ab welcher größer ist. Es stellt fest, dass sein Nachbar 5 mehr hat und kann evtl. schon eine 5 auf ein Blattritzeln.</td> <td>Bildliche und symbolische Darstellungen können konkrete Handlungen ersetzen. Ablösung vom Material: → Es benötigt keine Bauklötze mehr, um $5+3=8$ zu ermitteln.</td> </tr> </tbody> </table> In Anlehnung an: Hoenisch/ Niggemeyer: „MatheKings“, S. 30/31. Januar 2018 © PIK AS (http://www.pikas.dzlm.de)  7	Der individuelle Lernprozess			Phase des Konkreten	Übergangsphase	Phase des Abstrakten	spielen, anfassen, wahrnehmen, analysieren, ...	nachzählen, vergleichen, zuordnen, sortieren, was passt zusammen, ...	Mit Symbolen arbeiten: Zahlen zu Turmbauten aufschreiben. Eine Summenzahl dazu notieren, ...	Kind begegnet konkreten, sinnlich wahrnehmbaren Dingen seiner Umwelt. Es beurteilt die Welt nach ihrem äußeren Schein. „Ich habe mehr Klotze als du“ kann dabei eine erste Feststellung sein.	Kind kombiniert das Konkrete mit etwas Abstraktem. Es vergleicht einen Turm aus Klotzen, zählt ab welcher größer ist. Es stellt fest, dass sein Nachbar 5 mehr hat und kann evtl. schon eine 5 auf ein Blattritzeln.	Bildliche und symbolische Darstellungen können konkrete Handlungen ersetzen. Ablösung vom Material: → Es benötigt keine Bauklötze mehr, um $5+3=8$ zu ermitteln.
Der individuelle Lernprozess														
Phase des Konkreten	Übergangsphase	Phase des Abstrakten												
spielen, anfassen, wahrnehmen, analysieren, ...	nachzählen, vergleichen, zuordnen, sortieren, was passt zusammen, ...	Mit Symbolen arbeiten: Zahlen zu Turmbauten aufschreiben. Eine Summenzahl dazu notieren, ...												
Kind begegnet konkreten, sinnlich wahrnehmbaren Dingen seiner Umwelt. Es beurteilt die Welt nach ihrem äußeren Schein. „Ich habe mehr Klotze als du“ kann dabei eine erste Feststellung sein.	Kind kombiniert das Konkrete mit etwas Abstraktem. Es vergleicht einen Turm aus Klotzen, zählt ab welcher größer ist. Es stellt fest, dass sein Nachbar 5 mehr hat und kann evtl. schon eine 5 auf ein Blattritzeln.	Bildliche und symbolische Darstellungen können konkrete Handlungen ersetzen. Ablösung vom Material: → Es benötigt keine Bauklötze mehr, um $5+3=8$ zu ermitteln.												

	Es bietet einen ersten Hinweis darauf, warum das Lernen im Mathematikunterricht insbesondere zunächst konkret (am Material/ Darstellungsmittel) stattfinden sollte, damit überhaupt mathematische Vorstellungen aufgebaut werden können. Solange ein Kind keine Zahlvorstellung aufgebaut hat, kann es sich erst recht keine Operationen vorstellen. Auch diese müssen dann konkret erarbeitet werden. Hier wird auch klar, dass es keinen bestimmten Zeitpunkt gibt, an dem Anschauungsmaterialien nicht mehr „benötigt“ werden (etwa gegen Ende des 1. oder 2. Schuljahres, wie wir in der Praxis häufig feststellen).	
2'	Folie 8: Da das Aneignen von Wissen sehr unterschiedlich und auch sehr individuell verläuft, ist es schwer, diesen Prozess in eine Art Modell zu zwingen. Dennoch zeigen Modelle wie dies hier auch eine Art Abfolge auf, von der abstrahiert werden muss. Natürlich ist ein solches Modell nicht linear zu verstehen. Grundsteine aller „Brückenpfeiler“, wie Hoenisch die Teile ihres Modells benennt, werden häufig gleichzeitig angelegt. Ein Kind zeigt dann aber unter Umstellungen Vorstellungen an einem Tag, die es am folgenden nicht wiederholen kann. Dies ist übertragbar auf den Mathematikunterricht.	Folie 8  1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“ Aber... Das Modell ist <u>nicht linear</u> zu verstehen. Das Kind befindet sich beim Lernen immer im <u>Prozess</u> . In diesem geht es Schritte „vor“ und auch „zurück“. Es zeigt an einem Tag Vorstellungen, die es unter Umständen am nächsten Tag nicht mehr wiederholen kann. Das Kind baut teilweise gleichzeitig an verschiedenen Pfeilern seiner „Vorstellungsbrücke“! TIPP: Zeit geben! Die bildliche und handelnde Ebene darf nicht zu schnell verlassen werden. Wessendorf, S. 33) (vgl. Kaufmann) Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de)  8
2'	Folie 9 - 10: Eigentlich ist es nichts Neues: Seit Jahrhunderten ist man sich offensichtlich einig darüber, dass HANDELN das Lernen begünstigt und auch DIDAKTISCHE Materialien allgemein und im Mathematikunterricht im Besonderen mathematische Strukturen und Muster mithilfe von Handlungen am Material verdeutlichen sollen. Auch in den Richtlinien und Lehrplänen, in der reformpädagogischen und didaktischen Literatur sind diese Gedanken längst formuliert und veröffentlicht. Dennoch scheinen Entwurf und Realität viele Fragen offen zu halten. Für den Mathematikunterricht insbesondere diese: „ <i>Wie stellt man sich dieses Handeln (mit Materialien) aber konkret vor?</i> “ Holger Lorenz wirft in einem aktuellen Artikel dazu diese Frage auf: Wie kommt es dabei zu „den Zahlen im Kopf“? (Lorenz, 2011, S. 39) Und als P.S.: Die Beobachtung im Alltag zeigt: Auch wenn allen Kindern einer Klasse dieselben Materialien zur Verfügung stehen, können doch nicht alle Kinder gleichermaßen mit ihnen umgehen und sie als Veranschaulichungshilfe für sich nutzen.	Folie 9  1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“ Mathe in den Kopf?! Seit Jahrhunderten ist man sich nicht nur in der Didaktik der Mathematik einig darüber, dass Handeln das Lernen begünstigt. Frage?? „Wie stellt man sich dieses Handeln aber konkret im Mathematikunterricht vor?“ Wie kommt es dabei zu „den Zahlen im Kopf?“ (Lorenz 2011, S. 39) Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de)  9

3'	Folie 11: Wir übertragen das Modell von Hoenisch nun konkret auf ein mathematisches Modell nach Schipper, auf das sich auch verschiedene andere Mathematikdidaktiker beziehen (Scherer 2003, Wartha 2011), bzw. es in ähnlicher Weise beschreiben. Es geht wieder darum, den Lernprozess zu beschreiben, der sich im günstigen Fall von der Handlung zur mentalen Vorstellung hin entwickelt.	Folie 11 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“ Mathe in den Kopf?! Von der Handlung zur mentalen Vorstellung („Mathe im Kopf“) <table border="1"> <tr> <td>„Konkrete Phase“ Mit Material handeln und Handlungen beobachten (von sich selbst und anderen).</td> <td>„Auf dem Weg in den Kopf“ Rechenwege im Kopf vorstellen und beschreiben.</td> <td>„Im Kopf (richtig) rechnen“ Mit dem „Bild im Kopf“ (mentale Vorstellung) ohne Material rechnen.</td> </tr> </table> Modell in Anlehnung an Wartha & Schipper (Wartha/Schipper 2011, S. 113). Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de) 11	„Konkrete Phase“ Mit Material handeln und Handlungen beobachten (von sich selbst und anderen).	„Auf dem Weg in den Kopf“ Rechenwege im Kopf vorstellen und beschreiben.	„Im Kopf (richtig) rechnen“ Mit dem „Bild im Kopf“ (mentale Vorstellung) ohne Material rechnen.
„Konkrete Phase“ Mit Material handeln und Handlungen beobachten (von sich selbst und anderen).	„Auf dem Weg in den Kopf“ Rechenwege im Kopf vorstellen und beschreiben.	„Im Kopf (richtig) rechnen“ Mit dem „Bild im Kopf“ (mentale Vorstellung) ohne Material rechnen.			
2'	Folie 12: In der Praxis stellen wir jedoch häufig fest, dass viele Kinder nicht flexibel im Kopf rechnen können (Phase 3). Und hier sollte a) die Vorarbeit im Unterricht am Material auf den Prüfstand gestellt werden und b) unser Umgang mit den Kindern und die Versuche tatsächlich den Wissensstand unserer Kinder, also den Inhalt ihrer „Köpfe“ zu ermitteln. Lorenz Zitat soll hier am Ende nicht frustrierend wirken, sondern auch Klarheit, vielleicht mehr noch „Entlastung“ bringen für alle Erwachsenen, die daran arbeiten, dass Kinder lernen flexibel zu rechnen. Gleichzeitig muss es aber ein Appell sein und dazu ermutigen und aufrufen, durch geeignete Aufgaben und Diagnoseinstrumente im Unterricht zu überprüfen, was schon in den Köpfen der Kinder vorhanden ist und was weiter aufgebaut werden muss. (Dazu auch mehr in den Häusern 9 und 10).	Folie 12 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“ Mathe in den Kopf?! Von der Handlung zur mentalen Vorstellung („Mathe im Kopf“) ← <table border="1"> <tr> <td>„Konkrete Phase“</td> <td>„Auf dem Weg in den Kopf“</td> <td>„Im Kopf (richtig) rechnen“</td> </tr> </table> Was genau im Kopf eines Kindes passiert, können wir nur erahnen. Im Austausch mit ihm, kann es uns Einblicke in seinen „Kopf“ gewähren. Am Ende scheint es so zu sein: „...das ‚Nahebringen‘ und seine Wirkung bleiben unscharf, das Kind verbleibt eine black box.“ (Lorenz 2011, S. 21) Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de) 12	„Konkrete Phase“	„Auf dem Weg in den Kopf“	„Im Kopf (richtig) rechnen“
„Konkrete Phase“	„Auf dem Weg in den Kopf“	„Im Kopf (richtig) rechnen“			
2'	Folie 13: „Mathe in den Kopf?! Das kann helfen: Hier ein erster konkreter Einblick, wie Vorstellungsaufbau konkret im Unterricht aussehen kann. Allerdings werden die einzelnen Punkte im Folgenden noch vertieft. Gezielte Förderübungen in den Modulen 3.3 und 3.4. 1. Bereitstellung ausgewählter Materialien 2. Guter Umgang mit diesen 3. Gespräche zur Überprüfung der Vorstellungen, die Kinder „im Kopf“ haben Das alles vor dem Hintergrund, eine Zahl- und Operationsvorstellung aufzubauen, die flexibles Rechnen am Ende möglich macht.	Folie 13: 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“ Mathe in den Kopf?! Das kann helfen: ▪ Bereitstellung und Nutzung ausgewählter Materialien ▪ guter Umgang mit diesen Materialien ▪ Gespräche (und Instrumente) zur Überprüfung der Vorstellungen, die Kinder „im Kopf“ haben Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de) 13			

5' **Folie 14-16:**
Folie 14: Alltagsmaterialien benutzen, die dem Kind vertraut sind, die es aus seinem bisherigen Alltag kennt. Damit: (geschickt) Zählen, Mengen strukturieren, Zahlreihen bilden, Zusammenhänge verstehen.
Folie 15: Den kardinalen Aspekt insbesondere stärken!! Übungen zum kardinalen Zahlverständnis sind notwendig, um Zahlbeziehungen zu verstehen.
„Kinder, die einseitig ordinal denken, haben keine Möglichkeit neue Aufgaben von alten abzuleiten. Wenn sie das Ergebnis 3+4 zählend ermittelt haben, müssen sie danach das Ergebnis 4+3 neu „er-zählen“.“ (Kaufmann/ Wessolowski 2006, S. 22).
 Haben Kinder nur ein einseitig ordinales Zahlverständnis aufgebaut, so sind sie nicht in der Lage, eine Zahl als Teil einer anderen zu verstehen. Zahlen können dann auch nicht zerlegt werden. Wenn 14 als der 14. Würfel gedacht wird, dann ist die Sichtweise 14 Würfel sind 10 Würfel und 4 Würfel tatsächlich nicht nahe liegend.
 Hinweis auch auf die Förderkartei von Wilhelm Schipper, die als pdf im Netz runterzuladen ist: www.uni-bielefeld.de/idm/serv/rechenstoer.htm

10' **Mögliche kurze Aktivität:**
 Gemeinsam mit dem Plenum kann über weiteren Übungen diskutiert werden, die man selbst als gute Übung im Unterricht erachtet und eingesetzt hat! (Kurze Murmelrunde mit dem Partner, dann Vorstellen im Plenum. Moderator kann Ideen auf Plakat sammeln)

2' **Folie 16:** Ein Beispiel aus der Schipper-Kartei zum Aufbau von Zahlvorstellung. Die vorausgegangenen Zählübungen am Material (didaktisches- und Alltags-) erst allmählich auf mathematisches Material übertragen. Hierbei unterschiedliche strukturierte, mathematische Materialien nach und nach einführen. Wichtig ist, dass die Kinder auf den Karteikarten sich immer auch die Zahl/ Menge/ Handlung im Kopf versuchen vorzustellen. Das Material dient in diesem Fall dann der Überprüfung.
 Ausführungen und weitere Beispiele folgen im weiteren Verlauf der Veranstaltung noch.

Folie 15

1. Grundlegende Gedanken:
 „Wie kommt Mathe in den Kopf?!"

Material nutzen zum Aufbau von Zahlvorstellung

Wichtig: Der kardinale Zahlaspekt!!

„Für viele Kinder ist es zunächst schwer zu verstehen, dass 3 Kinder „drei Kinder“ sind, das 3. Kind jedoch nur eines.“ (Kaufmann/ Wessolowski)

2006, S. 22)



L: „Könnt ihr jetzt sagen, wie viel mehr Nüsse im vollen Glas waren?“
 B: „seht!“
 M: „seht!“

Weitere Übungen:

z. B. Teil-Ganzes Beziehungen verdeutlichen:



Grundschulzeitschrift Heft 182, 2005 (W. Schipper, Förderkartei)

Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de)

15

Folie 16

1. Grundlegende Gedanken:
 „Wie kommt Mathe in den Kopf?!"

Material nutzen zum Aufbau von Zahlvorstellung

Mathematisches Material benutzen



„Blitzgucken“

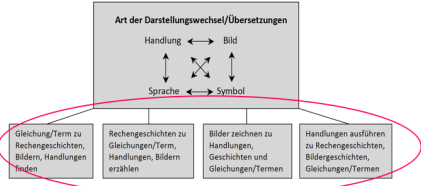
„Zerlegen“

Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de)

16

2'	Folie 17-18: „Übungen zum Aufbau von Operationsvorstellungen“: Nachdem verschiedene Situationen aus dem Alltag der Kinder vollzogen wurden (Einkaufssituationen, Verteil- und Aufteilgeschichten, etc.), soll in der Übertragung auf das mathematische Material nach dem Prinzip aus Schippers Modell oben verfahren werden: Rechnen zunächst mithilfe eines didaktischen Materials, das in der Klasse bekannt ist und hinreichend eingeführt wurde, um dann die Rechenwege im Kopf (mentale Handlung) zu vollziehen und sich allmählich wieder vom Material zu lösen. Dieser Dreischritt muss zum alltäglichen Bestandteil des Unterrichts werden! (Mehr dazu auch im weiteren Verlauf des Moduls und in Modul 3.2).	Folie 17 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!" Material nutzen zum Aufbau von Operationsvorstellung Mathematisches Material benutzen  © Walter W. Schipper, Förderkurator, www.uni-bielefeld.de/lehrenschwerpunkt.htm Januar 2018 © PIKAS (http://pikas.dzlm.de) 17
2'	Folie 19: „Blick in den Kopf“: Erste Anregungen, zur Beobachtung und Diagnose im Unterricht.	Folie 19 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!" „Blick in den Kopf“ Die Beobachtung von Schülern beim Darstellungswechsel und das Gespräch darüber geben z.B. Auskunft über die Zahl- und Operationsvorstellungen  © Walter W. Schipper, Förderkurator, www.uni-bielefeld.de/lehrenschwerpunkt.htm Januar 2018 © PIKAS (http://pikas.dzlm.de) 19
5'	Folie 20 – 22: BIRTE 2 = Bielefelder Rechentest für das 2. Schuljahr (Testung erfolgt im 2. Halbjahr des 2. Schuljahres), entstanden in jahrelanger Forschungsarbeit der Uni Bielefeld unter Leitung von Wilhelm Schipper. (<i>Anmerkung:</i> Zu empfehlen ist das in Anlehnung an den Test entstandenen „Handbuch zur Diagnostik und Förderung“, Braunschweig 2011). „Birte 2 ist aus einer etwa 20jährigen Forschungs- und Entwicklungsarbeit zur Diagnostik und Förderung rechenschwacher Kinder hervorgegangen. (...) Zentrales Ziel dieser Testentwicklung war es, auch solche Lehrerinnen und Lehrer von diesen Erfahrungen profitieren zu lassen, die bisher keine Gelegenheit dazu hatten, Informationen zum Thema Rechenstörungen zu bekommen, die für die alltägliche Arbeit mit solchen Kinder hilfreich sind.“ (Ebd., S. 5) Die aufgeführten Fakten sind nicht neu. Als eine sehr groß angelegte Stichprobe zeigen sie in	Folie 20 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!" Heute wissen wir... „ (...), dass Schwierigkeiten (beim Rechnen lernen) nicht unbedingt Schwierigkeiten mit der Mathematik sein müssen, sondern Schwierigkeiten mit dem Mathematikunterricht sein können.“ (Spiegel Seite 2007) © Walter W. Schipper, Förderkurator, www.uni-bielefeld.de/lehrenschwerpunkt.htm Januar 2018 © PIKAS (http://pikas.dzlm.de) 20

	Anbetracht der Häufigkeit von Schwierigkeiten beim Rechnen von allen Kindern eines Jahrgangs am Ende der 2. Klasse jedoch noch einmal in aller Deutlichkeit auf, an welchen Punkten im Unterricht verstärkt gearbeitet werden muss! Zitat (Folie 20) und Fakten (Folie 21 und 22) aus BIRTE 2 soll die Entscheidung für den gewählten 3-Schritt für Haus 3 untermauern.	Folie 21  1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“ Fakten aus BIRTE 2 Die Vergleichsstudien TIMSS, PISA und IGLU zeigen, dass bei etwa 20% der deutschen SchülerInnen die mathematischen Kompetenzen so niedrig sind, dass sie große Probleme bei der Bewältigung mathematischer Anforderungen in der Schule und im späteren Berufsleben zu erwarten haben. Immer wiederkehrende Symptome: ▪ Verfestigtes zählendes Rechnen ▪ Eingeschränktes Verständnis für die Stellenwerte ▪ Unzureichende Vorstellung für Zahlen und Operationen Januar 2018 © PIK AS (http://www.pikas.dzlm.de)  21
5'	Folie 23-26: Folie 23: Die Forderungen hängen in Punkt 1 und 2 eng mit der Auswahl und dem Einsatz von mathematischen Materialien zusammen. Sich der Thematik und dem von PIKAS gewählten Schwerpunkt „Guter Umgang mit Darstellungsmitteln“ intensiver zu widmen, scheint offensichtlich nötig und unumgänglich zu sein! Folie 24/25/26: PIKAS begründet seine Struktur, die besonders in den Modulen von Haus 3 auf Grundlage dieser aktuellen Erhebungen erkennbar ist. In Modul 3.1 geht es um den Aufbau von Zahlvorstellungen. In Modul 3.2 wird insbesondere darauf hingearbeitet, den Aufbau von Operationsvorstellungen im Unterricht zu unterstützen. In Modul 3.3 wird dann noch die Ablösung bzw. Prävention zählenden Rechnens thematisiert	Folie 23  1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“ Forderungen nach BIRTE 2 „Reduzierung der exzessiven Nutzung unstrukturierter Materialien“ (vor allem Rechenplättchen). Schwierigkeit scheint in der Praxis zu stecken: Lehrerinnen sind sich unsicher, wann und wie sie auf andere (strukturierte) Materialien umsteigen sollen. „Frühe und dauerhafte Sicherung von Zahl- und Aufgabenbeziehungen“. Ein Fünftel der Kinder war nicht in der Lage das Doppelte von 6 zu bestimmen. Tipp hier: „Faktenwissen“ aneignen. Meint nicht stumpfes Auswendiglernen! „Faktenwissen macht frei für andere Anforderungen!“ „Sicherung des Verständnisses strukturierter Materialien“. BIRTE 2 zeigt, dass Probleme der Kinder nicht dadurch entstanden, dass keine strukturierten Materialien verwendet wurden. Die Frage ist, WIE sie konkret genutzt wurden. Wichtig wären zunächst ausführliche Übungen zur quasi-simultanen Zahlauffassung, da sie Strukturverständnis und operatives Verständnis fördern. In Anlehnung an Springer 2011: Vom Zahlenraum zum Kalkülieren – Materialien als Lerngehilfe und als Lernhilfe. In: Mathematikdidaktik Grundschule. Medien und Materialien. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2011. Hrsg. von Armin Böttcher (Bielefeld). Folie 25:  1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“ Daraus folgt... ... Notwendigkeit der gezielten Auswahl und des passenden Einsatzes von Darstellungsmitteln beim 1. Aufbau von Zahlvorstellungen (Modul 3.1 / Modul 3.4) 2. Aufbau von Operationsvorstellungen (Modul 3.2) 3. Ableiten und Automatisieren / flexibles Rechnen (Modul 3.3) Es muss geklärt werden: 1. Was sind Darstellungsmittel? 2. Wozu brauche ich Darstellungsmittel? 3. Welche Darstellungsmittel wähle ich aus? 4. Wie führe ich Darstellungsmittel ein? Modul 3.5 Januar 2018 © PIK AS (http://www.pikas.dzlm.de)  25

2'	Folie 27: Mit Blick auf den Ablauf soll sich nun dem Abschnitt 2 gewidmet werden. Der Begriff „Darstellungsmittel“ wirft verschiedene Fragen auf: ...!	Folie 27  Aufbau des Fortbildungsmoduls 3.5 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?“ 2. Was sind Darstellungsmittel? 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel? 4. Welche Darstellungsmittel wähle ich aus? 5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein? 6. Abschluss Januar 2018 © PIK AS (http://www.pikas.dzlm.de) 27
5'	Folie 28 - 30: <u>Folie 28:</u> Begriffsklärung (Auf dem Weg durch die Literatur finden wir viele Beispiele, die offensichtlich dasselbe meinen.) und die daraus folgende PIK-Definition (Folie 34)! <u>Folie 29/30:</u> Die Autorinnen Kaufmann und Wessolowski haben das bekannte E-I-S – Prinzip von Jerome BRUNER verändert und um einen wichtigen Punkt erweitert: Die Sprache. Sprache meint hier Schriftsprache (Texte), aber auch mündliche Korrespondenz. Sie wollen in diesem Modell aufzeigen, wie wichtig es ist, dass Kinder „Übersetzungsleistungen“ zwischen diesen Ebenen vornehmen können. Kinder können häufig Aufgaben nach einem eingeübten Prinzip lösen, die Übertragung auf Alltagsoperationen, die im Unterricht häufig in Textaufgaben eingebettet sind, fällt ihnen aber besonders schwer. „Beim Bearbeiten von Textaufgaben werden diese Defizite im mathematischen Denken meist zuerst offensichtlich, da es hierbei nicht mehr ausreicht, Lösungsstrategien mechanisch anzuwenden“ (ebd., S. 24). Zu einem gut entwickelten Zahl- und Operationsverständnis gehört also mehr! Kinder müssen in der Lage sein, sämtliche Übersetzungen zwischen den aufgeführten Ebenen zu vollziehen. Von der Sprache zum Symbol, vom Bild zum Symbol, von der Handlung zum Symbol und umgekehrt. Die Autorinnen beschreiben diese Transferleistungen anhand von Beispielen. Beispiel 1: „Gleichungen/ Term zu Rechengeschichten, Bildern, Handlungen, finden“ usw.	Folie 30  2. Was sind Darstellungsmittel? DarstellungsFORMEN werden durch unterschiedliche DarstellungsMITTEL repräsentiert.  Abbildung entnommen aus: Kaufmann & Wessolowski 2006, S. 25 Januar 2018 © PIK AS (http://www.pikas.dzlm.de) 30

5'

Folie 31 - 32:

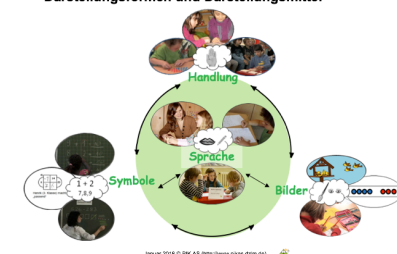
Das zum Thema „Mathe in den Kopf?!“ entwickelte Plakat, versucht die dennoch recht abstrakten Begriffe und komplexen Zusammenhänge aus dem Kaufmann/ Wessolowski – Modell weiter zu vereinfachen und mithilfe von Fotos aus dem Unterrichtsalltag zu konkretisieren.

Dabei stellen wir die Sprache in den Mittelpunkt des Lernprozesses. Sprache behält hier weiterhin die Bedeutung von „übersetzer“ Symbolsprache, zum Beispiel in mathematischen Sachtexten, die es zu lösen gilt. Die Sprache nimmt aber darüber hinaus im Hinblick auf die Vermittlung von fachlichen Inhalten eine wesentliche Rolle im Unterricht ein. Sie kann darüber hinaus ein Instrument sein, mit dem wir näher an die Köpfe der Kinder kommen.

In dem Prozess der Aneignung mathematischer Bilder ist es von zentraler Bedeutung, **Darstellungswechsel** zu forcieren. Erst dadurch wird Mathematik erlebbar. D.h. die Schülerinnen und Schüler sollen immer wieder aufgefordert werden, zwischen verschiedenen Darstellungsformen und –mitteln hin und her zu „übersetzen“, damit ein mathematisches Muster z. B. einen lebensweltlichen Bezug und somit einen „Sinn“ für die Kinder bekommt.

Anhand der Fotos oben sieht man, dass solche „Übersetzungen“ beim gemeinsamen Lernen oft ganz automatisch passieren. In einer Partnerarbeit z.B. vermischen sich fast alle Darstellungsformen miteinander, da Kinder sich austauschen (Sprache), ihre Lösungen notieren (Symbole und Bilder) und evt. didaktisches Material zur Vorstellung oder zum Überprüfen der Lösung benutzen (Handlung am Material). Umso wichtiger ist es, über diese Handlungsabläufe und individuellen Denkprozesse zu kommunizieren. „Gerade das bildliche und sprachliche Darstellen von mathematischen Beziehungen hilft dahinter liegende Vorstellungen bewusst(er), sichtbar und kommunizierbar zu machen, mögliche Fehlstellungen aufzudecken und neue Vorstellungen in das eigene Wissensnetz einzubauen (Kuhnke 2012, S. 7).

Darstellungswechsel werden im Unterricht häufiger auf der Ebene der Zahlvorstellung – vornehmlich in der Schuleingangsphase - vorgenommen. Weniger jedoch um Operationen zu verdeutlichen. Auch in Schulbüchern wird der Bereich Darstellungswechsel bei Operationen eher intuitiv thematisiert (vgl. Kuhnke, ebd.). Hier liegt ein großer Handlungsbedarf vor!

Folie 31**2. Was sind Darstellungsmittel?****Darstellungsformen und Darstellungsmittel**

31

Mathematik kann also mithilfe von verschiedenen **Darstellungsmitteln** (didaktische Materialien, Alltagsmaterialien, Zeichnungen, Erklärungen und Begründungen) im Unterricht „begreifbar“ werden. Kinder sollen Darstellungsmittel so lange benutzen, bis sie in der Lage sind, geschickt im Kopf zu rechnen.

So genannte **Darstellungsformen** (Handlung, Bild, Symbol und Sprache) beschreiben unterschiedliche Formen, in die Mathematik sozusagen „übersetzt“ werden kann.

Einige Beispiele sind auch im Text „*Mathe in den Kopf?! – Wie geht das eigentlich?*“ ausgeführt.

Wichtig zu verdeutlichen an dieser Stelle: Darstellungsmittel sind also nicht nur didaktische Materialien (Rechenrahmen, Zahlenstrahl, etc.), sondern viel mehr als das: Alle Arten von Darstellungen der Lehrerin und der Kinder, um Mathematik (Situationen, Geschichten, Zahlen, Terme) aufzuzeigen gehören dazu: Zeichnungen, Erklärungen, Begründungen, usw.

Werden Kinder zu früh aufgefordert, sich beim Rechnen von Darstellungsmitteln zu lösen und im Kopf zu rechnen, wird ihnen die Chance genommen, mathematische „wenn-dann-Beziehungen“ und Operationen zu erforschen. Sie rechnen dann weiterhin oft „zählend“ und haben keine Vorstellung davon, was sie beim Rechnen eigentlich tun.

Kinder greifen dann gezwungenermaßen auf Darstellungsmittel zurück, die ihnen natürlich gegeben sind. Zum Beispiel auf ihre Finger oder andere Objekte, die sie bei sich haben wie z.B. Stifte in ihrem Mäppchen. Dabei spricht erst einmal nichts gegen das Fingerrechnen, denn ein geschickter Einsatz von Fingern kann Kindern helfen, sicher und schlau zu rechnen. Unreflektiert verführen die Finger oft zum zählenden Rechnen, was häufig auch sehr fehleranfällig ist.

Anmerkung: Es ist sinnvoll, den Teilnehmern das Plakat mit den dazugehörigen Erläuterungen (siehe Teilnehmermaterial) auszuhändigen. Geklärt werden sollten die Begriffe, die wir im Gegensatz zu Kaufmann/ Wessolowski leicht abgewandelt haben (Handeln=Handlung, Bilder=Bilder, Mathesprache=Symbole, Sprache=Sprache). Und auch die Symbole, die in den Wolken zum jeweiligen Bereich auftauchen, sollten erläutert werden. Sie nehmen später bei unterschiedlichen Übungen zum Darstellungswechsel noch eine wichtige Rolle im Unterricht ein.

2'	Folie 33 - 34: Hier sind einige Beispiele aufgeführt, wie vielfältig Darstellungsmittel eigentlich sind. Es sind nicht nur die mathematischen Materialien, an denen Zahlen und Operationen eingestellt werden. Es sind darüber hinaus bildliche Darstellungen, Eigenproduktionen der Kinder, schriftlich dargestellte Handlungen und Erklärungen und so weiter. Weitere Ausführungen folgen zum Zusammenspiel von diesen Darstellungsmitteln mit den Darstellungsformen, werden im weiteren Verlauf detailliert dargestellt.	Folie 33  2. Was sind Darstellungsmittel? Was genau sind eigentlich Darstellungsmittel? <table><thead><tr><th colspan="2">Handlung</th></tr></thead><tbody><tr><td>Unstrukturierte Materialien</td><td>Strukturierte Materialien</td></tr><tr><td>Naturmaterialien (Kastanie, Eichel, Nüsse, Apfel, ...)</td><td>Didaktische Materialien • Zahlenbilder (Würfelbilder, Abb. Blitzgucken, Punktfelder) • Rechenkette/ Zahlenstrahl • 10er System-Material (Dienes) • Rechenrahmen • 20er Feld mit Wendeplättchen • 100er Feld/ 100er Tafel • Finger (Kraft der 5) • Rechengeld (Eignung wird allerdings unterschiedlich bewertet...)</td></tr><tr><td>Alltagsmaterialien (Bauklötze, Spielfiguren, Perlen, Muggelsteine, diverse Plättchen, ...)</td><td></td></tr><tr><td>Didaktische Materialien (Wendeplättchen - wenn sie ohne das Feld benutzt werden -, Ziffernkarten, ...)</td><td></td></tr></tbody></table> JANUAR 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de)  33 Folie 34  2. Was sind Darstellungsmittel? Was genau sind eigentlich Darstellungsmittel? <table><thead><tr><th>Bilder</th><th>Sprache</th><th>Symbole</th></tr></thead><tbody><tr><td></td><td></td><td>$7 - 4$</td></tr><tr><td></td><td></td><td>54</td></tr><tr><td></td><td></td><td>$< >$</td></tr></tbody></table> JANUAR 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de)  34	Handlung		Unstrukturierte Materialien	Strukturierte Materialien	Naturmaterialien (Kastanie, Eichel, Nüsse, Apfel, ...)	Didaktische Materialien • Zahlenbilder (Würfelbilder, Abb. Blitzgucken, Punktfelder) • Rechenkette/ Zahlenstrahl • 10er System-Material (Dienes) • Rechenrahmen • 20er Feld mit Wendeplättchen • 100er Feld/ 100er Tafel • Finger (Kraft der 5) • Rechengeld (Eignung wird allerdings unterschiedlich bewertet...)	Alltagsmaterialien (Bauklötze, Spielfiguren, Perlen, Muggelsteine, diverse Plättchen, ...)		Didaktische Materialien (Wendeplättchen - wenn sie ohne das Feld benutzt werden -, Ziffernkarten, ...)		Bilder	Sprache	Symbole			$7 - 4$			54			$< >$
Handlung																								
Unstrukturierte Materialien	Strukturierte Materialien																							
Naturmaterialien (Kastanie, Eichel, Nüsse, Apfel, ...)	Didaktische Materialien • Zahlenbilder (Würfelbilder, Abb. Blitzgucken, Punktfelder) • Rechenkette/ Zahlenstrahl • 10er System-Material (Dienes) • Rechenrahmen • 20er Feld mit Wendeplättchen • 100er Feld/ 100er Tafel • Finger (Kraft der 5) • Rechengeld (Eignung wird allerdings unterschiedlich bewertet...)																							
Alltagsmaterialien (Bauklötze, Spielfiguren, Perlen, Muggelsteine, diverse Plättchen, ...)																								
Didaktische Materialien (Wendeplättchen - wenn sie ohne das Feld benutzt werden -, Ziffernkarten, ...)																								
Bilder	Sprache	Symbole																						
		$7 - 4$																						
		54																						
		$< >$																						
2-10'	Folie 35 - 45: <i>Anmerkung:</i> Unter Umständen reicht es hier aus nur einige Beispiele zu zeigen.																							
2'	Folie 46: Es wird nun weiter der Frage auf den Grund gegangen, „Wozu braucht man Darstellungsmittel eigentlich?“																							

2'	Folie 47 - 48: Blick in den Lehrplan, um weitere Begründungszusammenhänge für den gezielten Einsatz von Darstellungsmitteln zu finden. In Folie 48 werden die Hauptaussagen zusammengefasst.	Folie 47  3. Wozu braucht man Darstellungsmittel? Lehrplan Mathematik NRW Lernen und Lehren: „Mathematische Begriffe und Operationen können durch Handlungen mit Material, durch Bilder, Sprache und mathematische Symbole dargestellt werden.“ Die verschiedenen Darstellungen stellen einerseits eine wichtige Lernhilfe dar, andererseits sind sie aber auch Lerngegenstand mit eigenen Anforderungen für die Schülerinnen und Schüler, die Bedeutungen und Formen des Gebrauchs erlernen müssen. Die Beziehungen zwischen verschiedenen Darstellungsformen werden nicht nur in Einführungsphasen hergestellt, um die konkreten Verständnisgrundlagen zu erhalten.“ (MSW 2008, S. 55) Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de)  47								
1'	Folie 49: Die Aussage im Lehrplan „mehr als Lernhilfe“ wollen wir besonders gerne aufnehmen und vertiefen. Für die Beantwortung der Frage „Wozu braucht man Darstellungsmittel?“ ergeben sich daraus 2 wichtige Funktionen.	Folie 49:  3. Wozu braucht man Darstellungsmittel? Darstellungsmittel sind mehr als nur „HILFSMITTEL“! Im Gegenteil, sie können verschiedene Funktionen erfüllen! Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de)  49								
2'	Folie 50: Funktionen abzulesen.	Folie 50  3. Wozu braucht man Darstellungsmittel? <table><tr><th>Funktion 1:</th><th>Funktion 2:</th></tr><tr><td>Sie dienen als Lernmaterialien (nicht nur im Förderunterricht!!!)</td><td>Sie dienen zur Veranschaulichung mathematischer Strukturen (Forschermittel-Film)</td></tr><tr><td>Zur Entwicklung einer Zahl- und Operationsvorstellung</td><td>als Instrument des Erkennens - „vom Beobachten zum Erkennen“ - „vom Beschreiben zum Begründen“</td></tr><tr><td>Um mit Ihrer Hilfe Vorgehensweisen zu entwickeln (z.B. Rechenwege darstellen, ...)</td><td>als Instrument des Kommunizierens - „wo Worte fehlen“ – machen Gedanken, Strukturen und Muster sichtbar</td></tr></table> Übrigens: In jeder Jahrgangsstufe! 50	Funktion 1:	Funktion 2:	Sie dienen als Lernmaterialien (nicht nur im Förderunterricht!!!)	Sie dienen zur Veranschaulichung mathematischer Strukturen (Forschermittel-Film)	Zur Entwicklung einer Zahl- und Operationsvorstellung	als Instrument des Erkennens - „vom Beobachten zum Erkennen“ - „vom Beschreiben zum Begründen“	Um mit Ihrer Hilfe Vorgehensweisen zu entwickeln (z.B. Rechenwege darstellen, ...)	als Instrument des Kommunizierens - „wo Worte fehlen“ – machen Gedanken, Strukturen und Muster sichtbar
Funktion 1:	Funktion 2:									
Sie dienen als Lernmaterialien (nicht nur im Förderunterricht!!!)	Sie dienen zur Veranschaulichung mathematischer Strukturen (Forschermittel-Film)									
Zur Entwicklung einer Zahl- und Operationsvorstellung	als Instrument des Erkennens - „vom Beobachten zum Erkennen“ - „vom Beschreiben zum Begründen“									
Um mit Ihrer Hilfe Vorgehensweisen zu entwickeln (z.B. Rechenwege darstellen, ...)	als Instrument des Kommunizierens - „wo Worte fehlen“ – machen Gedanken, Strukturen und Muster sichtbar									

5'

Folie 51 - 56:**Ausführungen zur Funktion 1a: Zahl- und Operationsvorstellung aufbauen:**

Folie 51/ 52/ 53: Vgl. auch Sachinfo Modul 3.1 „Prävention von Rechenschwierigkeiten“, S. 4. Zahlen stellen sich im täglichen Leben in unterschiedlicher Weise dar. Wir sprechen dabei von unterschiedlichen Zahlaspekten. Wobei der ordinale~ und der kardinale~ zum Zahlverständnis vorrangig sind. (Beispiel: Nummernschild am Auto: Codierungsaspekt Fahrplan: Maßzahlaspekt, wenn ich ablese, dass die Fahrt 90 Minuten dauert. Obstmengen: Kardinalaspekt.)

Folie 54: Zitat untermauert Wichtigkeit des kardinalen Aspekts.

Folie 55: Das bedeutet, dass man am selben Darstellungsmittel auf unterschiedliche Art und Weise „gucken“ kann, um auch kardinale Aspekte zu sehen.

Beispiel: Die Zahl 14 ist das 14. Feld! Zahlen zeigen den *ordinalen* Zahlaspekt. Im 100er Feld kann man mithilfe des Zahlwinkels aber auch die ganze Menge 24 betrachten!

Und man muss darauf achten, dass Darstellungsmittel ausgewählt werden, die linear und flächig sind. Einmal, um den Aspekten stärker zu entsprechen. Andererseits aber auch, weil es Kinder gibt, die sich in der flächigen Struktur eher zurechtfinden, als in der linearen.

Das Verständnis der Beziehungen von Mengen zueinander ist elementar für das anschließende Verständnis von Operationen. Nur wenn Kinder bspw. einzelne Zahlen zerlegen können, sind sie später in der Lage flexibel zu rechnen (Bsp. Zehnerübergang). Dies alles immer wieder an Alltagsbeispielen klar machen (Schokolade zerbrechen und wieder zusammenfügen) und mithilfe der Sprache erklären.

Folie 53

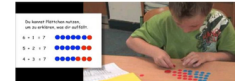
Folie 55

3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

Ordinaler Aspekt	Kardinaler Aspekt
Er liest auf S. 8	8 Stunden noch...
Ich bin auf Platz 24 gelandet.	14 Kinder einladen.

55

5'	<u>Folie 57 - 61: Unterrichtsbeispiele zum Üben des Darstellungswechsels:</u> <u>2. Das Übungsformat „Das Malquartett“ (Klasse 2/3)!</u> Ziele Die Schülerinnen und Schüler können - verschiedene Darstellungen von Multiplikationsaufgaben erkennen und zuordnen und üben sich auf diese Weise im Darstellungswechsel bei der multiplikativen Operation - eigene Darstellungen anfertigen, indem sie eine vorgegebene Multiplikationsaufgabe in andere Darstellungen übertragen - fachgerechte Begriffe für die Benennung der verschiedenen Darstellungen verwenden <i>Anmerkung:</i> Ausführliche Informationen können Sie auch der Unterrichtsplanung zum Format „Malquartett“ im UM - Material entnehmen.	Folie 56  3. Wozu braucht man Darstellungsmittel? Darstellungswechsel üben – Operationsvorstellung Das 1x1 Zahlenquartett Das Zahlenquartett besteht aus insgesamt 120 Karten – also 30 mal 4 Karten mit unterschiedlichen Darstellungen für 30 verschiedene Multiplikationsaufgaben des kleinen Einmaleins. Die Karten sind in drei Differenzierungsstufen bezogen auf den Zahlenraum der Multiplikationsaufgabe unterteilt: Karten mit Multiplikationsaufgaben, deren Ergebnisse ≤ 20 sind Karten mit Multiplikationsaufgaben, deren Ergebnisse > 20 und ≤ 50 sind Karten mit Multiplikationsaufgaben, deren Ergebnisse > 50 und ≤ 100 sind Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de)  57
5-15'	<u>Folie 62: Mögliche Aktivität</u> Nach der Vorstellung dieser zwei Unterrichtsbeispiele bietet es sich an, sich im Plenum auszutauschen. Anschließend: Überleitung zu Frage: Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?	Folie 62  3. Wozu braucht man Darstellungsmittel? Aktivität: Finden Sie Möglichkeiten, wie Sie das Plakat und die Symbole noch innerhalb Ihres Unterrichts einsetzen könnten! Überlegen Sie einige Minuten alleine. Tauschen Sie sich dann mit Ihrem Sitznachbarn aus. Tragen Sie Ihre Ideen im Plenum vor.  Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de)  63
2'	<u>Folie 63-66: Funktion von Darstellungsmitteln 1b: Vorgehensweisen entwickeln:</u> Ausführungen zur Funktion 1: Vorgehensweisen entwickeln: <u>Folie 64/ 65:</u> Beispiele aus dem Unterricht (Anmerkung: Fotos aus dem Film „Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Subtrahieren“, Haus 5, entnommen.) <u>Folie 66:</u> Beispiele	

2'	Folie 67-68: Funktion von Darstellungsmitteln 2: Veranschaulichung mathematischer Strukturen: Unser Plädoyer zum Einsatz von Darstellungsmitteln innerhalb des regulären Mathematikunterrichts und nicht nur als „Hilfsmittel“ bei Schwierigkeiten in der Zahlvorstellung oder beim Darstellen von Rechenwegen, erreicht an dieser Stelle eine weitere Argumentationsebene für uns. Darstellungsmittel als Instrument zu nutzen, um Strukturen von Mathematik aufzuzeigen, und auch da einzusetzen, wo z.B. noch Worte zur Begründung fehlen, ist ein wichtiger Bestandteil des Mathematikunterrichts, den man in der Praxis nicht immer vorfindet.	Folie 67  3. Wozu braucht man Darstellungsmittel? Funktion 2: Zur Veranschaulichung mathematischer Strukturen  Plättchen als Instrument des Erkennens: Mit Plättchen Muster sichtbar machen und beschreiben → Gesetzmäßigkeit begründen  Plättchen als Instrument des Kommunizierens: „Wo Worte und Fachausdrücke fehlen“ können Plättchen die Entdeckungen der Kinder sichtbar machen. Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de)
15'	Folie 69-70: <u>Mögliche Aktivität (FILM)</u> In dem folgenden Film wird diese Funktion ausführlich beschrieben und an vielen praktischen Beispielen aus dem Schulalltag aufgezeigt. Auf <u>Folie 70</u> sind mögliche Beobachtungshinweise genannt, die im Anschluss an den Film im Plenum diskutiert werden können. Der Film kann nicht herunter geladen, sondern nur auf unserer Homepage geöffnet werden. Der Film muss dann in der Veranstaltung <u>online</u> gezeigt werden. Sie finden den Film in Haus 1 unter dem Stichwort „Informationsvideos“.	
1'	Folie 71: Überleitung zum Punkt 4 der Präsentation: „Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?“	
2'	Folie 72: 4 Kriterien, die abzulesen sind. Im Folgenden werden sie ausführlicher erklärt. (Vergleich Sachinfo: Darstellungsmittel! – Welche sollen ausgewählt werden?) 1. „Weniger ist mehr“ (Wittmann) Auf dem Weg zum flexiblen Rechnen sollen Kinder Vorstellungsbilder aufbauen, damit sie am Ende ohne Material im Kopf rechnen können. Damit sich solche Vorstellungsbilder aufbauen, ist es wichtig, die Repräsentanten, an denen mathematischen Strukturen aufgezeigt werden, bewusst auszuwählen.	Folie 72  4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen? Mögliche Kriterien: • „Weniger ist mehr!“ (Wittmann 1993) • Darstellungsmittel, deren Vor- und Nachteile bekannt sind und die zum jeweiligen Lerninhalt passen. (Vgl. Stiftung Warentest) • Darstellungsmittel, die <i>fortsetzbar</i> für alle Schuljahre sind. • Darstellungsmittel, die dem <i>Lehrwerk</i> entsprechen. Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de)

	Da Darstellungsmittel nicht „einfach so“ und ebenso wenig „unmissverständlich“ Wirkungen erzielen, ist es wichtig, dass jedes einzelne Kind die Möglichkeit erhält, durch eigenes Tun das einzelne Darstellungsmittel in seiner Handhabung kennen zu lernen, um sich entscheiden zu können, a) welches ihm liegt und b) welches sich vor allem für eine bestimmte Handlung eignet. „Außerdem ist zu beachten, dass der Lernerfolg nicht mit der Masse der Materialien, sondern mit der Reichhaltigkeit und Intensität der Schüleraktivitäten steigt“ (Müller/ Wittmann 1993, S. 8).	
15-30'	Folie 73-75: 2. „Darstellungsmittel, deren Vor- und Nachteile bekannt sind zu die zum jeweiligen Lerninhalt passen“: Zitat beschreibt Probleme im Umgang mit mathematischen Materialien. Daher haben wir zur intensiveren Auseinandersetzung mit den einzelnen didaktischen Materialien haben wir einen „<i>Stiftung Warentest</i> zur Beurteilung von didaktischen Materialien für den Mathematikunterricht“ (siehe Modul 3.2., UM) entwickelt. Diesen finden wir deshalb besonders sinnvoll, da er nicht nur praktische und didaktische Kriterien in Bezug auf ein bestimmtes Material in den Blick nimmt, sondern darüber hinaus in einem 2. Teil die Möglichkeit bietet zu analysieren, ob sich das Material nicht nur zur Darstellung von Zahlen, sondern darüberhinaus genauso gut zur Darstellung von Operationen eignet. Denn: Nicht jedes Material kann alles! Am Beispiel des Rechenrahmens lässt sich gut aufzeigen, dass er sich für Rechnungen mit $ZE \pm E$ gut eignet. Das Kind z.B. bei der Aufgabe $43+5$ den ersten Summanden einstellen und mit einem „Fingerstreich“ 5 Perlen hinzuschieben, um dann das Ergebnis abzulesen. Auch bei Aufgaben mit Zehnerübergang, bspw. $43-5$ oder $43+8$, kann der Rechenweg durch Weg- oder Hinzuschieben des Subtrahenden oder des 2. Summanden gut dargestellt werden. Schwierig werden allerdings die Darstellungen bei der Addition und Subtraktion voller oder gemischter Zehner ($ZE \pm Z$, $ZE \pm ZE$). Für den Unterricht lohnt es sich, die Kinder selbst solche Erfahrungen machen zu lassen und darüber zu diskutieren. „Erst wenn das Kind viele Materialien in ihrer Handhabung kennen würde, wäre eine Entscheidung für oder gegen eines möglich“ (Lorenz 2011, S. 40).	

Folie 75: **Aktivität**

Die Teilnehmer sollen entdecken, dass sich nicht jedes didaktische Material bei jeder Aufgabe gleichermaßen eignet. Aufgaben, die über den ZR 100 hinausgehen, lassen sich bspw. nicht mehr an der 10er Tafel oder dem Rechenrahmen darstellen. In vielen Klassen gibt es dann aber kein adäquates anderes Darstellungsmittel.

Der Zahlenstrahl hingegen eignet sich nicht für jedes Kind, da es viel Vorstellungsvermögen erfordert, mit ihm flexibel umzugehen. Bei der Ergänzungsaufgabe in d) ist er eigentlich das einzige wirklich adäquate Dm, an dem sich die Ergänzung aufzeigen lässt.

2'

Folie 76-79:

3. „Darstellungsmittel, die fortsetzbar sind“:

Kinder sollen kontinuierlich lernen ohne immer wieder *umlernen* zu müssen. Deshalb ist es sinnvoll Material für die Klasse 1 auszuwählen und einzuführen, das erweiterbar ist. Positives Beispiel für die Ausbaufähigkeit ist zum Beispiel das 10er Systemmaterial. In der Eingangsphase arbeiten die Kinder mit Einer-Würfeln, 10er Stangen und 100er Platten, im dritten Schuljahr nehmen sie dann den 1000er Würfel hinzu (vgl. Radatz/ Schipper 1996, S.42).

Auch das „mathe 2000“ Material vom 20er Feld bis zum 1000er Buch bietet den Aspekt der Erweiterbarkeit! In diesem Zusammenhang stellt sich auch die Frage, ob zu den ausgewählten Materialien passendes Demonstrationsmaterial (große Version der Schülermaterialien) vorhanden ist! Nicht nur für Einführungsphasen ist es unerlässlich, sondern vor allem auch zur Reflektion und im Gespräch über die Sache. Es sollte genauso aussehen wie das Schülermaterial.

Folie 75

4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?

Aktivität:

Berechnen Sie folgende Aufgaben!

- a) $15 - 8 =$ c) $83 - 29 =$ e) $465 - 227 =$
b) $39 + 50 =$ d) $47 + \dots = 63$

Nutzen Sie dabei verschiedene mathematische Materialien, um Ihren Rechenweg darzustellen.

Bei welcher Aufgabe eignet sich welches Darstellungsmittel am besten? Erörtern Sie pro und contra mit Ihrem Nachbarn.



Juni 2018 © PIKAS (<http://www.pikas.dzlm.de>)

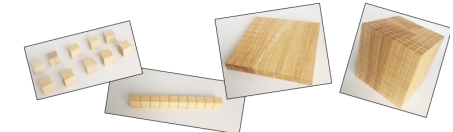
75

Folie 78

4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?

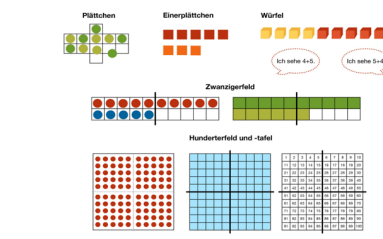
Darstellungsmittel, die fortsetzbar für alle Schuljahre sind
Zum Beispiel das „10er-System-Material“ (Dienes)

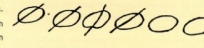
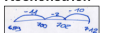
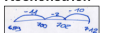
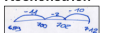
Einer-Würfel Zehner-Stange Hunderter-Platte Tausender-Würfel



Juni 2018 © PIKAS (<http://www.pikas.dzlm.de>)

78

2'	Folie 80-85: 4. „Darstellungsmittel, die dem Lehrwerk entsprechen“: Unterschiedliche Lehrwerke benutzen unterschiedliche Darstellungsmittel. Manchmal werden farbige Holzwürfel und keine farbigen Wendeplättchen zur Darstellung benutzt. Wird in einer Klasse parallel mit dem 20er Feld und den Wendeplättchen gearbeitet, weil diese etwa noch aus früheren Zeiten vorhanden sind, so muss dieser Darstellungswechsel erklärt und begründet werden, damit keine Missverständnisse entstehen.	Folie 81 4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?  Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de) 82
15-30'	Folie 83-84: mögliche Aktivität Mit Blick auf Folie 83 (Merkblatt), kann folgende Aktivität vorgenommen werden: Es bietet sich an, am Ende dieser Veranstaltung konkret etwas zu planen, bzw. Verabredungen in Bezug auf die Auswahl von Darstellungsmitteln in allen Klassen zu treffen. Gedanken zur Sichtung und Auswahl von Materialien für jede Klasse sollte auch dazu führen zu überlegen, wie die Materialien in der Klasse präsentiert und zugänglich gemacht werden für die Schülerinnen und Schüler. Vielleicht ergeben sich aber auch aus dem Vorgespräch mit der Planungsgruppe ganz andere Schwerpunkte, die hier am Ende der Veranstaltung gemeinsam bearbeitet/ verabredet werden sollten.	Folie 85: 4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen? Aktivität: Entwickeln Sie anhand der Kriterien Ideen, wie die Auswahl und Bereitstellung von mathematischen Materialien an Ihrer Schule optimiert werden könnte. Denken Sie außerdem über organisatorische Aufgaben nach, die damit verbunden sind! Notieren Sie gemeinsam mit Ihren Stufenmitgliedern eine „to do liste“. Zeit: 20 Minuten Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de) 85
	Folie 85: Es wird nun weiter der Frage auf den Grund gegangen, „Wie führe ich Darstellungsmittel ein?“	

10'	Folie 86: mögliche Aktivität Es kann folgende Aktivität vorgenommen werden: 1. Die Teilnehmer können zunächst gedanklich durch ihren eigenen Klassenraum „gehen“ und die vorhandenen Darstellungsmittel notieren. Daraufhin sollen sie überlegen, welche Darstellungsmittel auch tatsächlich täglich im Einsatz sind. 2. Anschließend kann ein Austausch erfolgen. Die Teilnehmer können sich über Gründe für die Wahl bestimmter Materialien austauschen und darüber sprechen, warum manche Darstellungsmittel häufiger, andere hingegen seltener genutzt werden.	Folie 86  5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein? Aktivität 1.  Material sichten! („ICH-DU-WIR“) Gehen Sie „gedanklich“ durch Ihren Klassenraum und schreiben Sie auf, welche didaktischen Materialien dort für die Kinder bereit stehen. Notieren Sie auch die ungefähre Stückzahl. Überlegen Sie auch, welche Materialien tatsächlich im „täglichen Einsatz“ sind. 2.  Stellen Sie sich anschließend gegenseitig Ihre Notizen vor.  Halten Sie die Ergebnisse schriftlich fest! Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de)  87		
5'	Folie 87-90: Kernaussage dieser Folien ist, dass Darstellungsmittel nicht selbsterklärend sind und von verschiedenen Kindern auch verschieden gedeutet werden können. Dafür kann vor allem das Beispiel auf Folie 90 herangezogen werden, in dem ein Kind eine Darstellung deutlich anders interpretiert, als man es aus der Sicht eines geübten Rechners tun würde. Die Teilnehmer sollten für diese Punkte sensibilisiert werden und sich vergegenwärtigen, dass Unterricht darauf eingehen sollte! Folie 91 fasst gerade diesen Aspekt prägnant zusammen.	Folie 89  5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein? Ein Beispiel zum Nachdenken: „Das Kullensystem habe ich überhaupt nicht verstanden. Frau B. hat gesagt: Schreibe! Fülle den Kuchen auf. Sie hat sechs Kullern an die Tafel gemalt und vier durchgestrichen und dann eingekringelt. ... Ich habe das Durchstreichen nicht verstanden. Mit Zahlen wäre es wohl leichter gewesen als mit Kullern ... Ich weiß nur, dass ich zuerst mit Zahlen gehandelt habe. Und dann kam plötzlich das Kullensystem. Und das war der Zusammenbruch. Ich versuchte, es zu verstehen. Aber ich weiß heute davon nichts mehr – wirklich nichts mehr. Sie hatte die Kullern halbiert. Ich versuchte, es besser zu verstehen. Ich suchte nach dem Kern. Sie hat gleich halbiert, und dann hat sie das Lernen für sich einkassiert. ...“ – „Ich verstehe nicht, was meinst du? Was meinst du mit halbiert?“ – „Ja, zum Beispiel bei den Wengergutgaben. Zum Beispiel bei der Aufgabe Schreibe! Fülle den Kuchen auf.“ – „Ich verstehe nicht, was du meinst. Was meinst du mit halbiert.“ – „Ja, sie hat halbiert, aber die redet vom Durchstreichen. Sie hat die Kullern halbiert. Das ist doch alles Heuschke! Wenn man einen Apfel halbiert, dann hat man doch zwei Hälften.“ – „Ich verstehe dich nicht. Kannst du es aufmalen, was sie an die Tafel gezeichnet hat?“ – „Ja, das kann ich.“ Er malte:  Als ich mir die Zeichnung anschaute, sah ich, dass Ralf recht hatte. Aus: Spiegel Seite 2003, S. 93 Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de)  90		
5'	Folie 91-98: Auf Folie 91 werden zunächst Verwendungsbereiche zum Einsatz von Darstellungsmitteln beschrieben. Während Modul 3.1 den Aufbau von Zahlvorstellungen und Modul 3.2 den Einsatz von Darstellungsmitteln zum Aufbau von Operationsvorstellungen thematisieren, greifen die weiteren Folien die Nutzbarkeit verschiedener Darstellungsmittel zur Darstellung von Rechenwegen auf. Von Folie 94 bis 98 sollen die Teilnehmer die vorgestellten Vor- und Nachteile verschiedener Darstellungsmittel nachvollziehen und Notizen machen. Es werden der Rechenrahmen (Folie 96), die Hundertertafel (Folie 96), das Zehnersystem-Material (Folie 97) sowie der Zahlenstrahl und der Rechenstrich (Folie 98) vorgestellt	Folie 98  Achtung!! Materialeinsatz beim Rechnen <table><tr><td> Zahlenstrahl   Grundidee der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen ist hieran gut vermittelbar  Legt zählendes Rechnen nah und ist daher nicht für jedes Kind geeignet, um an ihm erste Rechenstrategien zu entwickeln </td><td> Rechenstrich   Bietet Kontext für Gespräche über verschiedene Rechenwege Umkehroperationen und Rechenstrategien lassen sich veranschaulichen  Ermöglicht keine Entwicklung von Rechenstrategien, sondern setzt das Vorhandensein einer mental zur Verfügung stehenden Rechenstrategie voraus </td></tr></table> Januar 2018 © PIKAS (http://www.pikas.dzlm.de)  99	Zahlenstrahl   Grundidee der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen ist hieran gut vermittelbar  Legt zählendes Rechnen nah und ist daher nicht für jedes Kind geeignet, um an ihm erste Rechenstrategien zu entwickeln	Rechenstrich   Bietet Kontext für Gespräche über verschiedene Rechenwege Umkehroperationen und Rechenstrategien lassen sich veranschaulichen  Ermöglicht keine Entwicklung von Rechenstrategien, sondern setzt das Vorhandensein einer mental zur Verfügung stehenden Rechenstrategie voraus
Zahlenstrahl   Grundidee der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen ist hieran gut vermittelbar  Legt zählendes Rechnen nah und ist daher nicht für jedes Kind geeignet, um an ihm erste Rechenstrategien zu entwickeln	Rechenstrich   Bietet Kontext für Gespräche über verschiedene Rechenwege Umkehroperationen und Rechenstrategien lassen sich veranschaulichen  Ermöglicht keine Entwicklung von Rechenstrategien, sondern setzt das Vorhandensein einer mental zur Verfügung stehenden Rechenstrategie voraus			

15'	Folie 99-100 mögliche Aktivität: Die Teilnehmer sollen den Kriterienkatalog „Stiftung Warentest – Teil 2“ zur Bewertung didaktischer Materialien nutzen, um ihre Praxiserfahrungen bei der Darstellung von Rechenwegen zu dokumentieren. Abschließend soll es darum gehen, zu entscheiden, welche Materialien schlussendlich im Unterricht eingesetzt werden sollen.	Folie 99 5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein? Aktivität Nutzen Sie unseren Stiftung Warentest – TEIL 2, um selbst PRO und CONTRA Erfahrungen mit unterschiedlichen Materialien zu dokumentieren. Arbeiten Sie zunächst allein (ICH) Tauschen Sie Ihre Erkenntnisse mit den anderen aus (DU) Entscheiden Sie am Ende gemeinsam, wann welches Ma in Ihrem Unterricht eingesetzt werden soll (WIR) Halten Sie alles schriftlich fest.
5'	Folie 101-106 Es folgen Beispiele zum Aufbau mentaler Vorstellungen entlang des vorgestellten Modells (Folie 11 und 12). Die Abbildungen stammen aus der Förderkartei von Prof. Schipper.	Folie 105 „Rechenaufgaben“ in den Kopf?! „Mentales Handeln“ anregen Mit Material handeln und Handlung beobachten/ beschreiben Rechenweg im Kopf vorstellen und beschreiben Aus den Handlungen am Rechenrahmen sollen mentale Vorstellungen entstehen, die es den Kinder letztlich ermöglichen, Rechenaufgaben nur noch im Kopf zu lösen.
2'	Folie 107-108: Hinweis auf den letzten Punkt, der zur Weiterarbeit anregen soll. Für den Unterricht ist es lohnenswert, intensiv über die Frage der Einführung von mathematischen Materialien nachzudenken. Mit den Teilnehmern kann besprochen werden, ob hier eine weitere Veranstaltung folgen soll.	
	Folie 109: Abschluss und Dank.	