



Haus 3: Umgang mit Rechenschwierigkeiten



 1. Aufbau einer tragfähigen Zahlvorstellung

Zahlvorstellung: Relational



L: „Könnt ihr jetzt sagen, wie viel mehr Nüsse im vollen Glas waren?“
B: „elf!“
M: „sechs!“

„Da sind mehr Nüsse“
(kardinal)

2011 © PIK AS (<http://www.pikas.com.de>)  24

Modul 3.1 Zahlverständnis entwickeln – von Anfang an!





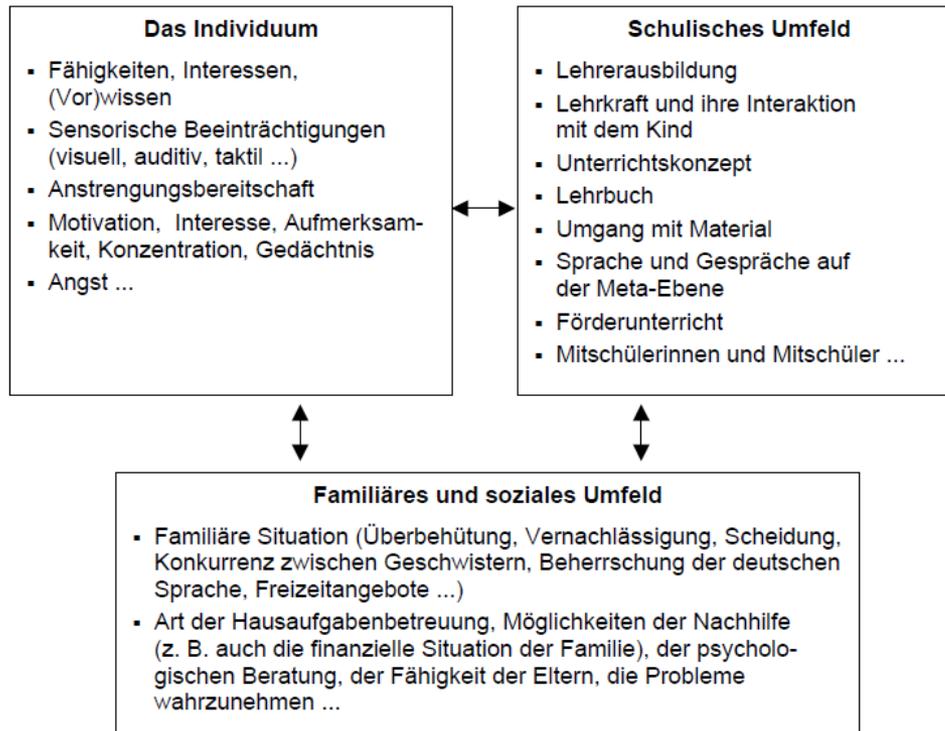
Annäherung an das Thema

Worum es in Haus 3 (nicht) geht

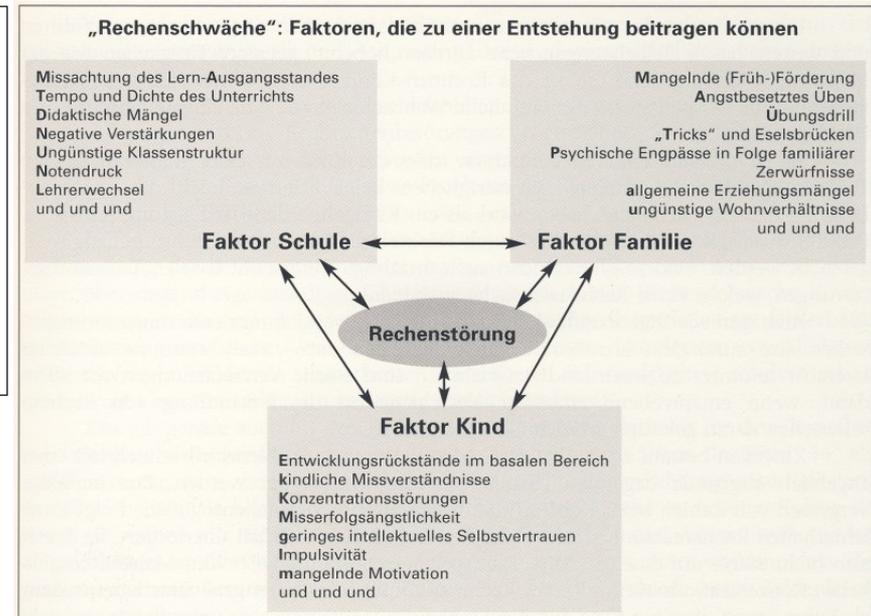
Es geht **NICHT** ...

um eine umfassende theoretische Begriffsklärung des Konstrukts „Rechenschwierigkeiten“ mit einer Beschreibung der möglichen Risikofaktoren und allen möglichen Symptomen.

Schipper



Gaidoschik





Annäherung an das Thema

Worum es in Haus 3 (nicht) geht

Es geht **NICHT** ...

um eine umfassende theoretische Begriffsklärung des Konstrukts „Rechenschwierigkeiten“ mit einer Beschreibung der möglichen Risikofaktoren und allen möglichen Symptomen.

Es geht ...

um die Frage, wie Rechenschwierigkeiten vorgebeugt oder überwunden werden können.





Annäherung an das Thema

Worum es in Haus 3 (nicht) geht

Es geht **NICHT** ...

darum, die Ursachen von Rechenschwierigkeiten in den Dispositionen des Kindes zu suchen.

Es geht ...

darum, die Ursache von Rechenschwierigkeiten im Nichtverstehen von mathematischen Inhalten zu suchen.

Also darum, den Unterricht so zu planen, dass Rechenschwierigkeiten vorgebeugt werden kann.





Annäherung an das Thema

Worum es in Haus 3 (nicht) geht

Es geht **NICHT** ...

um spezielle Übungen für die Behebung von Rechenschwierigkeiten.

Es geht ...

um Unterrichtsideen für die Förderung ALLER Kinder mit dem Ziel, keine Rechenschwierigkeiten zu entwickeln.





Annäherung an das Thema

Zum Einstieg: Hannah rechnet

Interviewausschnitt

Ende 2. Schuljahr

I:	Und bei dieser Aufgabe? <i>Interviewerin zeigt die Aufgabe 7+8</i>
H:	acht, neun, zehn, elf, zwölf <i>streckt nacheinander Daumen, Zeigefinger, Ringfinger, Mittelfinger und kleinen Finger ihrer linken Hand aus, stockt kurz</i> dreizehn, vierzehn, fünfzehn <i>streckt nacheinander Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger ihrer rechten Hand nach oben.</i> fünfzehn <i>schreibt fünfzehn als Ergebnis auf.</i>

Was muss ein Kind verstehen, damit es nicht (mehr) zählend rechnet?





Annäherung an das Thema

Was muss ein Kind verstehen, damit es nicht (mehr) zählend rechnet?

$$7 + 8$$

Zum Beispiel: $7 + 8 = 7 + 7 + 1 = 15$

Um so zu rechnen, muss das Kind verstehen, dass sowohl Zahlen als auch Aufgaben miteinander in Beziehung stehen, d.h. es sollte..

- eine tragfähige Zahlvorstellung haben
- Ableitungen nutzen
- Aufgaben automatisieren
- flexibel rechnen





Aufbau des Fortbildungsmoduls 3.1

- 1. Was ist ein tragfähiges Zahlverständnis?**
 - **Bedeutung von Zahlen**
 - **Fähigkeit zum Darstellungswechsel**
 - **Beziehungen zwischen Zahlen**
- 2. Warum ist Zahlverständnis wichtig für die Überwindung/Prävention von Rechenschwierigkeiten?**
- 3. Welche Darstellungsmittel können wie zur Entwicklung eines Zahlverständnisses eingesetzt werden?**
 - **Analyse verschiedener Darstellungsmittel**
 - **Aufgabenformate**
- 4. Abschluss und Ausblick**





Aufbau des Fortbildungsmoduls 3.1

- 1. Was ist ein tragfähiges Zahlverständnis?**
 - **Bedeutung von Zahlen**
 - **Fähigkeit zum Darstellungswechsel**
 - **Beziehungen zwischen Zahlen**
- 2. Warum ist Zahlverständnis wichtig für die Überwindung/Prävention von Rechenschwierigkeiten?**
- 3. Welche Darstellungsmittel können wie zur Entwicklung eines Zahlverständnisses eingesetzt werden?**
 - **Analyse verschiedener Darstellungsmittel**
 - **Aufgabenformate**
- 4. Abschluss und Ausblick**





1. Was ist ein tragfähiges Zahlverständnis?

Beim Aufbau der Zahlvorstellung sind 3 Dinge wichtig zu verstehen:

1. Die vielfältige **Bedeutung von Zahlen** muss deutlich werden:
 - Kenntnis über Zahlaspekte;
 - Hervorgehobene Bedeutung des Kardinalzahl- und des Ordinalzahlaspekts
2. Die **Fähigkeit zum Darstellungswechsel** muss geschult werden
 - Darstellungen einer Zahl (Zahlwort, Zahlzeichen, Menge) in eine jeweils andere Darstellung übersetzen können.
3. Die **Beziehung zwischen den Zahlen** muss thematisiert werden
 - Die Zahlerlegung zeigt die **Teile-Ganzes-Beziehung** der Zahlen untereinander.
 - Durch das Herstellen **relationaler Beziehungen** zwischen Zahlen lassen sich u.a. Differenzmengen bestimmen.





1. Was ist ein tragfähiges Zahlverständnis?

Kannst du es rausfinden?

- 1.) Wie oft fährt die Buslinie 12?
- 2.) Unter welcher Telefonnummer kann ich Eis bestellen?
- 3.) Wie weit ist es zum Schwimmbad?
- 4.) Von wann bis wann ist der Dorfladen geöffnet?

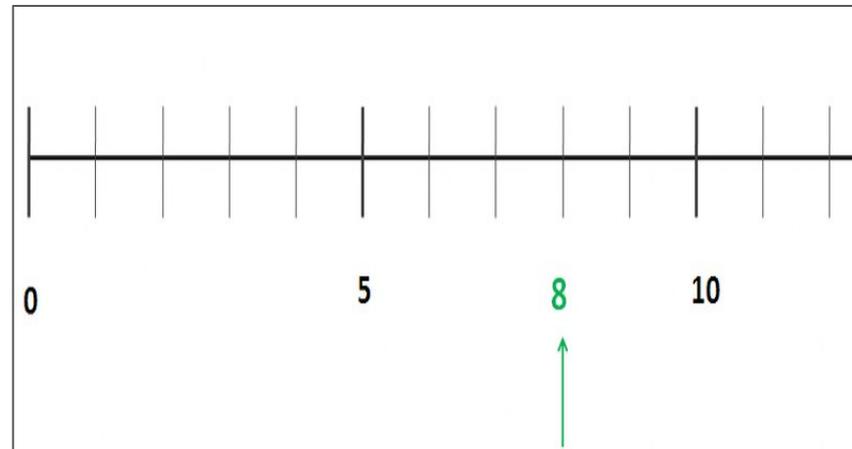
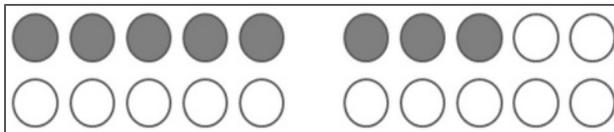




1. Was ist ein tragfähiges Zahlverständnis?

Welche Vorstellungen sollten Kinder zu Zahlen aufbauen?

eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht

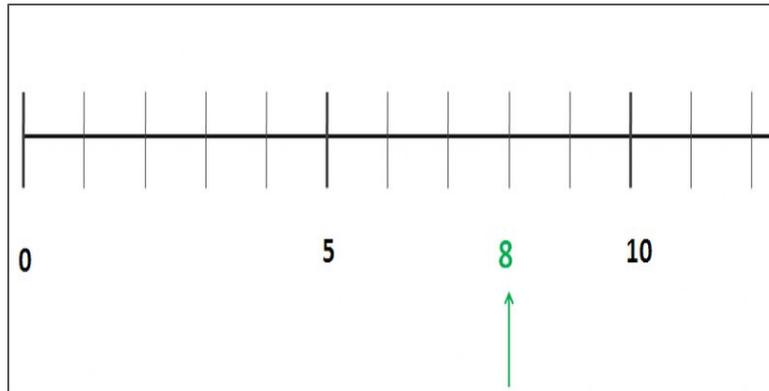




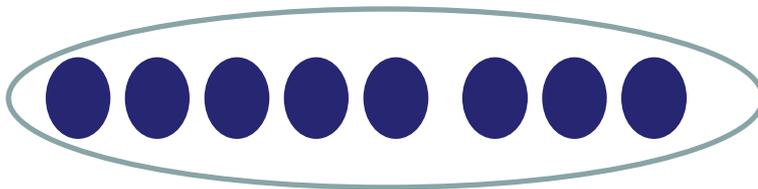
1. Was ist ein tragfähiges Zahlverständnis?

Bedeutung von Zahlen

ordinal: Zahlen als Bezeichnung einer Ordnung von Elementen



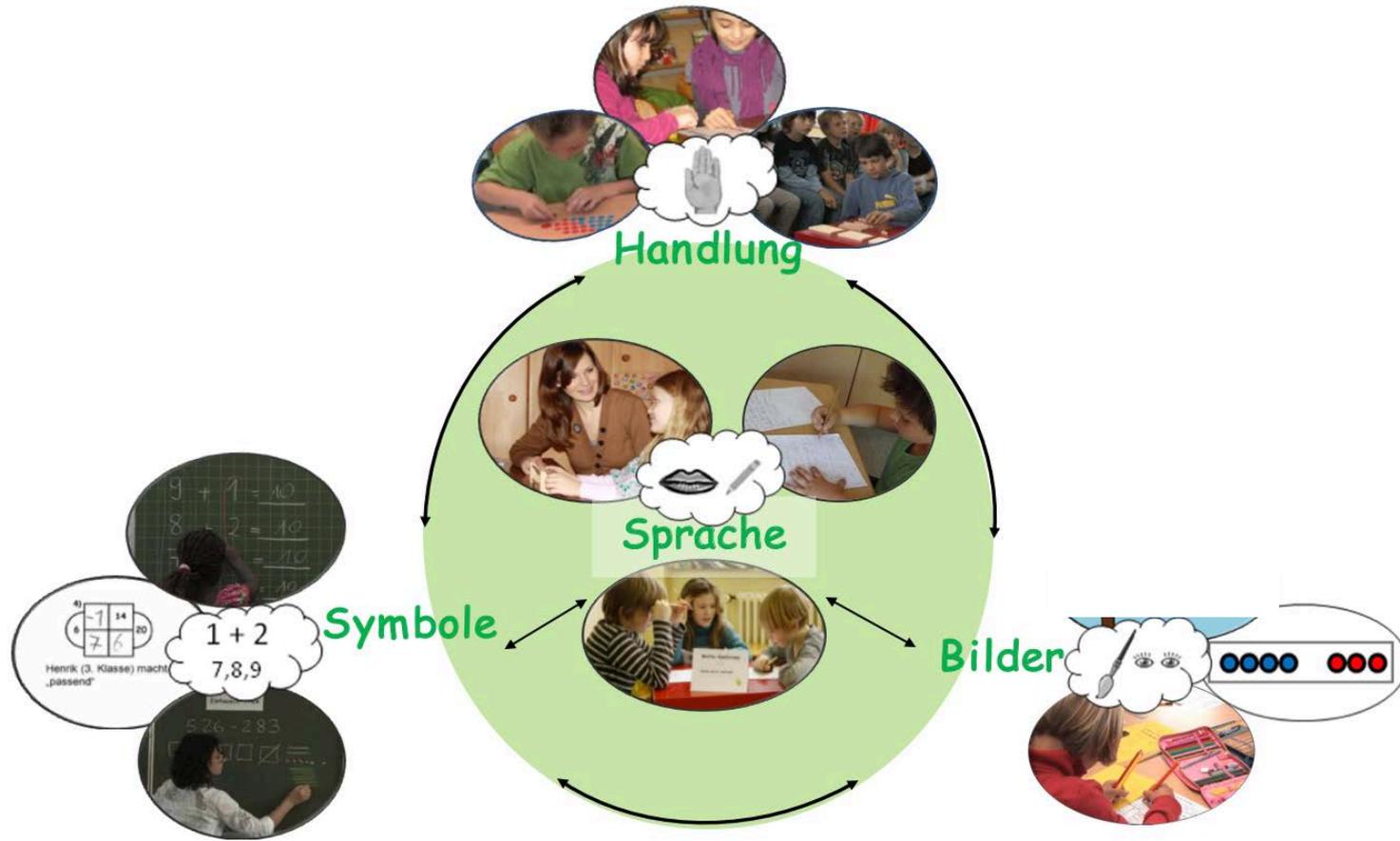
kardinal: Zahlen als Bezeichnung für Mengen





1. Was ist ein tragfähiges Zahlverständnis?

Fähigkeit zum Darstellungswechsel





1. Was ist ein tragfähiges Zahlverständnis?

Beziehungen zwischen Zahlen

- Teile – Ganzes Beziehung
- Relationale Beziehung

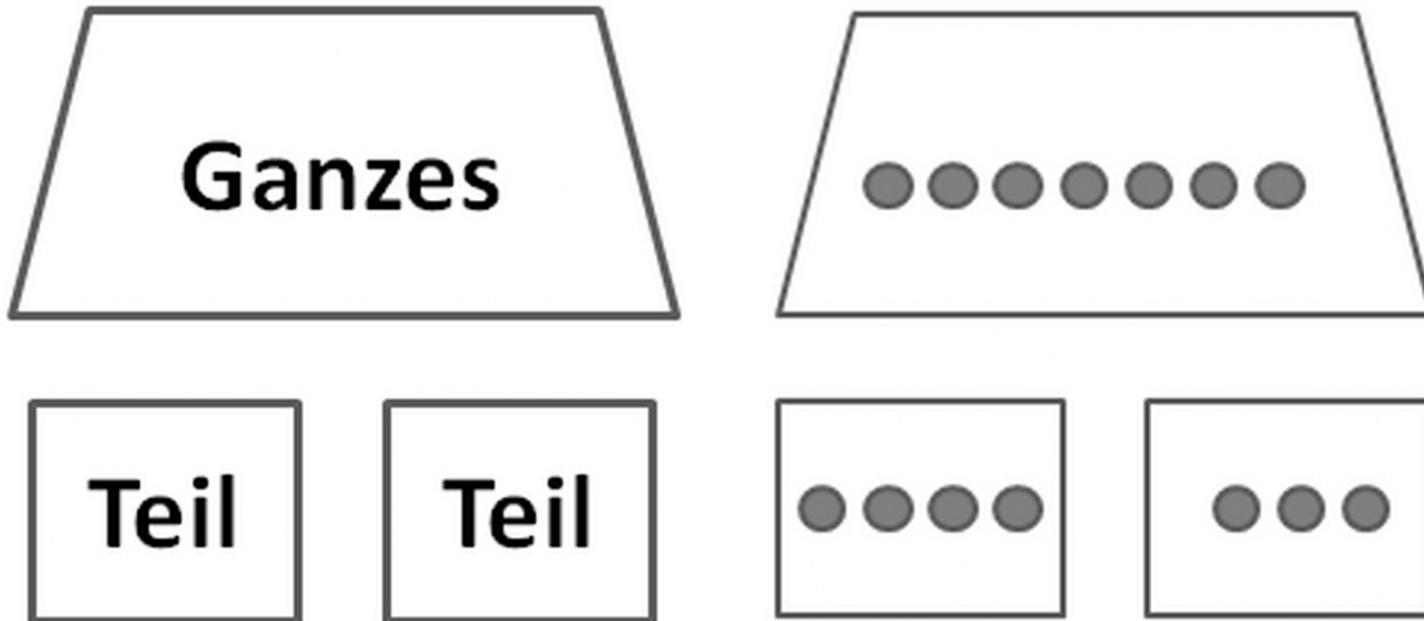




1. Was ist ein tragfähiges Zahlverständnis?

Teile – Ganzes Beziehung

Zahlen sind zerlegbar und aus Teilen/ anderen Zahlen zusammengesetzt





1. Was ist ein tragfähiges Zahlverständnis?

Relationale Beziehung

Zahlen können in Beziehung zu anderen Zahlen gesetzt werden.

Zum Beispiel: 8 ist ...

- zwei mehr als 6; drei weniger als 1
- der Vorgänger von 9 ; Nachfolger von 7
- doppelt so viel wie 4 ; halb so viel wie 16
- größer als 2 / kleiner als 12

- ...





Aufbau des Fortbildungsmoduls 3.1

1. **Was ist ein tragfähiges Zahlverständnis?**
 - **Bedeutung von Zahlen**
 - **Fähigkeit zum Darstellungswechsel**
 - **Beziehungen zwischen Zahlen**
2. **Warum ist Zahlverständnis wichtig für die Überwindung/Prävention von Rechenschwierigkeiten?**
3. **Welche Darstellungsmittel können wie zur Entwicklung eines Zahlverständnisses eingesetzt werden?**
 - **Analyse verschiedener Darstellungsmittel**
 - **Aufgabenformate**
4. **Abschluss und Ausblick**

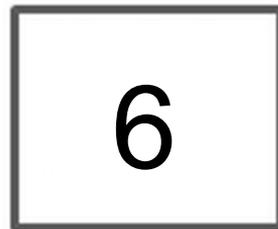
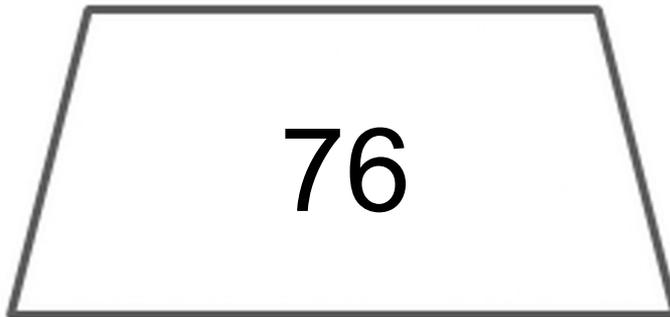




2. Warum ist Zahlverständnis wichtig?

76

- Was bedeutet die „7“ in „76“? Was bedeutet die „6“?



Kardinales Zahlverständnis...

→ ist notwendig für die passende Deutung von Zahlen!

→ Ist Grundlage für Verständnis über das dezimale Stellenwertsystem!





2. Warum ist Zahlverständnis wichtig?

Bitte rechnen Sie: $G - D =$

A entspricht 1, B entspricht 2, ...

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	..
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	..





2. Warum ist Zahlverständnis wichtig?

Bitte rechnen Sie: $N - M =$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	..
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	..

N ist um A größer als M
M ist um A kleiner als N





2. Warum ist Zahlverständnis wichtig?

- Wenn Zahlen nur als Reihen zum Abzählen verstanden werden, kann nur zählend gerechnet werden

Die Einsicht in ...

- die **Bedeutungen von Zahlen** und
- die **Beziehungen zwischen Zahlen** sowie
- die **Fähigkeit zum Darstellungswechsel**

bilden die Grundlagen für die Deutung von Zahlen sowie das Ausnutzen von Zahlbeziehungen beim geschickten Rechnen und damit für die Ablösung vom zählenden Rechnen.





Aufbau des Fortbildungsmoduls 3.1

1. **Was ist ein tragfähiges Zahlverständnis?**
 - **Bedeutung von Zahlen**
 - **Fähigkeit zum Darstellungswechsel**
 - **Beziehungen zwischen Zahlen**
2. **Warum ist Zahlverständnis wichtig für die Überwindung/Prävention von Rechenschwierigkeiten?**
3. **Welche Darstellungsmittel können wie zur Entwicklung eines Zahlverständnisses eingesetzt werden?**
 - **Analyse verschiedener Darstellungsmittel**
 - **Aufgabenformate**
4. **Abschluss und Ausblick**





Aufbau des Fortbildungsmoduls 3.1

1. **Was ist ein tragfähiges Zahlverständnis?**
 - **Bedeutung von Zahlen**
 - **Fähigkeit zum Darstellungswechsel**
 - **Beziehungen zwischen Zahlen**
2. **Warum ist Zahlverständnis wichtig für die Überwindung/Prävention von Rechenschwierigkeiten?**
3. **Welche Darstellungsmittel können wie zur Entwicklung eines Zahlverständnisses eingesetzt werden?**
 - **Analyse verschiedener Darstellungsmittel**
 - **Aufgabenformate**
4. **Abschluss und Ausblick**





1. Was ist ein tragfähiges Zahlverständnis?

Beim Aufbau der Zahlvorstellung sind 3 Dinge wichtig zu verstehen:

1. Die vielfältige **Bedeutung von Zahlen** muss deutlich werden:
 - Kenntnis über Zahlaspekte;
 - Hervorgehobene Bedeutung des Kardinalzahl- und des Ordinalzahlaspekts
2. Die **Fähigkeit zum Darstellungswechsel** muss geschult werden
 - Darstellungen einer Zahl (Zahlwort, Zahlzeichen, Menge) in eine jeweils andere Darstellung übersetzen können.
3. Die **Beziehung zwischen den Zahlen** muss thematisiert werden
 - Die Zahlerlegung zeigt die **Teile-Ganzes-Beziehung** der Zahlen untereinander.
 - Durch das Herstellen **relationaler Beziehungen** zwischen Zahlen lassen sich u.a. Differenzmengen bestimmen.

Wichtig: Mithilfe von didaktischen Materialien sollten Zahlen und Mengen auf unterschiedlichste Art dargestellt werden, so dass ihre unterschiedlichen Bedeutungen klar werden!



3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse



Im Folgenden werden nun einige didaktische Materialien vorgestellt und schlagwortartig einige PRO und CONTRA Aspekte aufgezeigt.

 **Überlegen Sie für sich und dann gemeinsam:** 

Können Sie die Argumente nachvollziehen?

Welche Materialien setzen Sie zum Aufbau von Zahlvorstellung ein. Und warum?

Worauf würden Sie in Zukunft besonders achten?

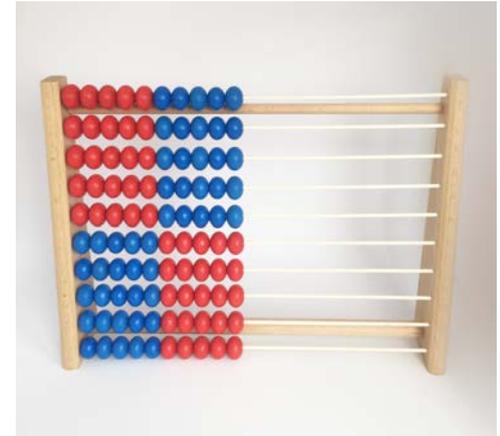


3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse

Rechenrahmen



- 5er/10er Struktur (Farbe und Anordnung)
- erleichtert Einstellen und Zeigen der Zahlen
- Quasi-simultane Anzahlerfassung möglich
- Einstellen von Zahlen kann schnell und geschickt mit „einem (wenigen) Fingerstreich(en)“ erfolgen



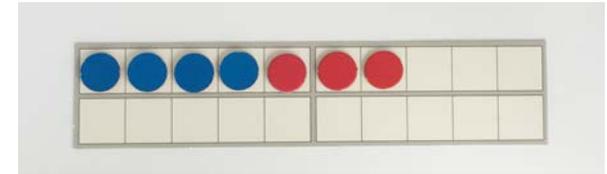
- Das Einstellen der Zahlen/ Mengen muss geübt werden, damit dies „geschickt“ erfolgt und nicht zum Abzählen der einzelnen Kugeln führt!
- Einzelnes Entnehmen und Verschieben von Kugeln ist nicht möglich





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse

20er Feld und Plättchen



- 😊 Betonung 5er und 10er Struktur
Übertragbar in höhere Zahlräume: Strukturen unterschiedlicher Felder bauen aufeinander auf und haben Wiedererkennungseffekt (Stichwort: vom 10er Feld zum Tausenderbuch)
- 😞 Das Legen von einzelnen Plättchen zur Darstellung von Zahlen dauert lang und verleitet zum Abzählen



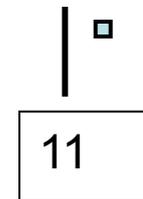


3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse

10er System Material (*Dienes*)



- Bietet sich besonders zur Vorstellungsbildung der dekadischen Struktur an
- Begleitende Zifferschreibweise kann anschaulich dargestellt werden



Darstellung der Zahlen bis 10 kann zum Abzählen führen, da die Kraft der 5 nicht sichtbar ist (durch Farbe oder Kennzeichnung)



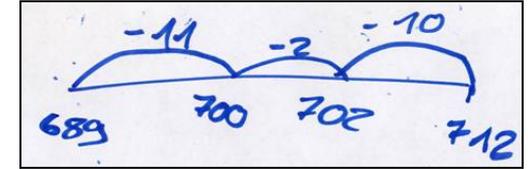


3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse

Rechenstrich



- Lineare Vorstellung wird unterstützt .
- Kann in jeden Zahlenraum übertragen werden.

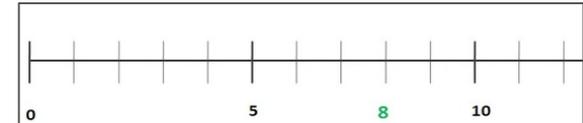


- Ohne ausreichende Übungen zur Zahlverortung (*Nachbarzahlen finden, Nachbarzehner zeigen, ...*) ist der Einsatz schwierig
- Um Zahlen zeigen zu können, muss das Kind bereits eine elementare Zahlvorstellung ausgebildet haben

Zahlenstrahl



- Grundidee der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen ist gut vermittelbar



- Ohne ausreichende Einführung oder Herleitung häufig schwer zu verstehen
- Verleitet zum vorwärts und rückwärts abzählen am Material





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse

Daraus folgt...

Jedes Material bietet Vor- und Nachteile.

Die Auswahl geeigneter Materialien beruht auch auf eigenen Kenntnissen/ Erfahrungen/ Vorlieben.

Am Ende muss aufmerksam reflektiert werden, wann welches Material zielführend ist.





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse

Nutzen Sie zur Auswahl von Materialien auch unseren **Stiftung Warentest – TEIL 1**, um selbst PRO und CONTRA Erfahrungen mit unterschiedlichen Materialien zu dokumentieren.



1. Arbeiten Sie zunächst allein (ICH) 😊
2. Tauschen Sie Ihre Erkenntnisse mit den anderen aus (DU)
Stellen Sie sich gegenseitig Aufgaben zur Zahldarstellung und -erfassung mit den Materialien.
3. Entscheiden Sie am Ende gemeinsam, wann welches Material in Ihrem Unterricht eingesetzt werden soll (WIR) 😊😊😊

Halten Sie alles schriftlich fest.





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse



„Stiftung Warentest“ zur Beurteilung von didaktischen Materialien für den Einsatz im Mathematikunterricht

Im vorliegenden „Warentest“ sollen didaktische Materialien daraufhin überprüft werden, ob sie sich

- a) zur **Zahldarstellung**, aber auch
- b) zur **Darstellung von Operationen** eignen!

Denn: Nicht jedes Material kann alles!

Für den Unterricht bedeutet das am Ende, Materialien auszuwählen und einzuführen, die für alle Schuljahre und Zahlräume zielführend eingesetzt werden können.

Aufgabe:

- Nehmen Sie die didaktischen Materialien zur Hand, die Sie im Unterricht einsetzen möchten.
- Füllen Sie für jedes einzelne Material beide Teile des „Stiftung Warentest“ aus.

★ Diskutieren Sie anschließend mit einem Kollegen oder dem ganzen Stufenteam Ihre Ergebnisse. Finden Sie gemeinsam eine Entscheidung für Material, das den „Warentest“ gut bestanden hat, das aber auch zu ihrem Buch und ihrem Unterricht passt.

★ Überlegen Sie, ob nicht auch ihre Schüler den „Warentest“ zur Darstellung von Operationen (Teil 2) im Unterricht durchführen können, um selbst über die Vor- und Nachteile ins Gespräch zu kommen.

Literatur

Radatz/ Schipper: Handbuch für den Mathematikunterricht 1. Schuljahr. Hannover 1996.

„Stiftung Warentest zur Beurteilung von didaktischen Materialien“

(In Anlehnung an Radatz/ Schipper: Handbuch für den Mathematikunterricht 1. Schulj.)

Name des didaktischen Materials: _____

Praktische Kriterien

	Ist das Material...	voll zu- treffend	weit- gehend	teil- weise	nicht zu- treffend
1	... für Kinder leicht handhabbar?				
2	... haltbar?				
3	... seinen Preis wert?				

Didaktische Kriterien Teil 1

	Können mithilfe des Materials...	voll zu- treffend	weit- gehend	teil- weise	nicht zu- treffend
1	... Mengen simultan (bis 4) erfasst werden?				
2	... Mengen quasi-simultan erfasst werden, weil das Material eine klare 5er- und 10er Struktur aufweist?				
3	... vermeidet das Material „zählendes Rechnen“ ¹				
4	... Zusammenhänge zwischen Handlung, Bild, Symbol und Sprache hergestellt werden? ²				
5	... ordinale (Zahl in der Reihe) UND kardinale (Zahl als Menge) Zahlaspekte dargestellt werden? ³				
	Ist das Material...				
6	... fortsetzbar in höheren Zahlräumen? ⁴				
7	... einsetzbar für andere Unterrichtsinhalte?				

¹ Hinweis: Abgezählt werden kann prinzipiell immer. Jedoch bieten bestimmte Materialien durch farbliche Gestaltung und bestimmte Anordnung schneller die Möglichkeit, Anzahlen mit einem Blick zu erkennen!

² Ein Beispiel: *Handlung* am 20er Feld: Summe addieren durch legen des 1. Summanden und Dazulegen des 2. Summanden mit Wendeplättchen/ *Bild*: beide Summanden mit 2 Farben in 20er Feld einzeichnen/ *Symbol*: Mengen beider Summanden ermitteln und als „Plusaufgabe“ notieren/ *Sprache*: Kind erklärt seine Handlung. Vgl. auch Sachinfo „Mathe in den Kopf!“.

³ Zum Aufbau der Zahlvorstellung ist es unerlässlich, die kardinale Sicht auf Zahlen im Unterricht zu eröffnen. Dies kann am selben Material gezeigt werden, erfordert nur „anderes Gucken“ (vgl. Sachinfo „Wie führe ich DM ein?“). Am Bsp. der Zahl **8** ist das zum Einen mit dem Blick auf eine bestimmte „Stelle“ in der Zahlenreihe schauen, zum Anderen mit dem Blick auf die gesamte Menge **8** blicken.

⁴ Bsp.: 20er-Feld/ 100er-Feld/ 1000er-Buch.



3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse

„Da nicht jedes Arbeitsmittel und jede Veranschaulichung unmittelbar eine Hilfe darstellt, sollte hier **keine Beliebigkeit** herrschen. (...)

Hilfen können daher nur Arbeitsmittel und Veranschaulichungen bieten, die die **mathematischen Strukturen** möglichst klar widerspiegeln und Einsichten in diese Strukturen ermöglichen, (...).

Daneben kommt dem **Vertrautwerden mit entsprechende Arbeitsmitteln** zentrale Bedeutung zu, d. h., in jedem Zahlenraum (und nicht nur zu Schulbeginn im Zehner- und Zwanzigerraum!) sind **ausreichende Orientierungsphasen** empfehlenswert.“

(Scherer 2003, S. 17)

„Im Umgang mit verschiedenen Materialien ist deren **Verzahnung zu einem zusammenhängenden System** von entscheidender Bedeutung (...). Anzahlen sollten daher in **Orientierungsphasen an allen verwendeten Veranschaulichungen** dargestellt werden, um so strukturelle Gemeinsamkeiten herauszustellen.“

(Ebd., S. 20f)





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse

Neben der bewussten Auswahl von didaktischen Materialien und Veranschaulichungen kommt ein weiterer wichtiger Gedanke hinzu:

In welcher Reihenfolge sollten Materialien am besten eingeführt werden?

Auch hier gibt es zahlreiche Vorschläge und Empfehlungen in der Literatur. Im Folgenden zeigen wir ein mögliches Beispiel für eine bestimmte Abfolge zur Einführung von Darstellungsmitteln beim Aufbau von Zahlvorstellung. Dieses Beispiel soll nicht generalisieren, es soll zunächst einmal aufzeigen, welche unterschiedlichen Überlegungen dazu geführt haben, genau diese Reihenfolge zu wählen. Sie finden vielleicht eine andere gute Reihenfolge, die auch zu Ihrem Lehrwerk passt.

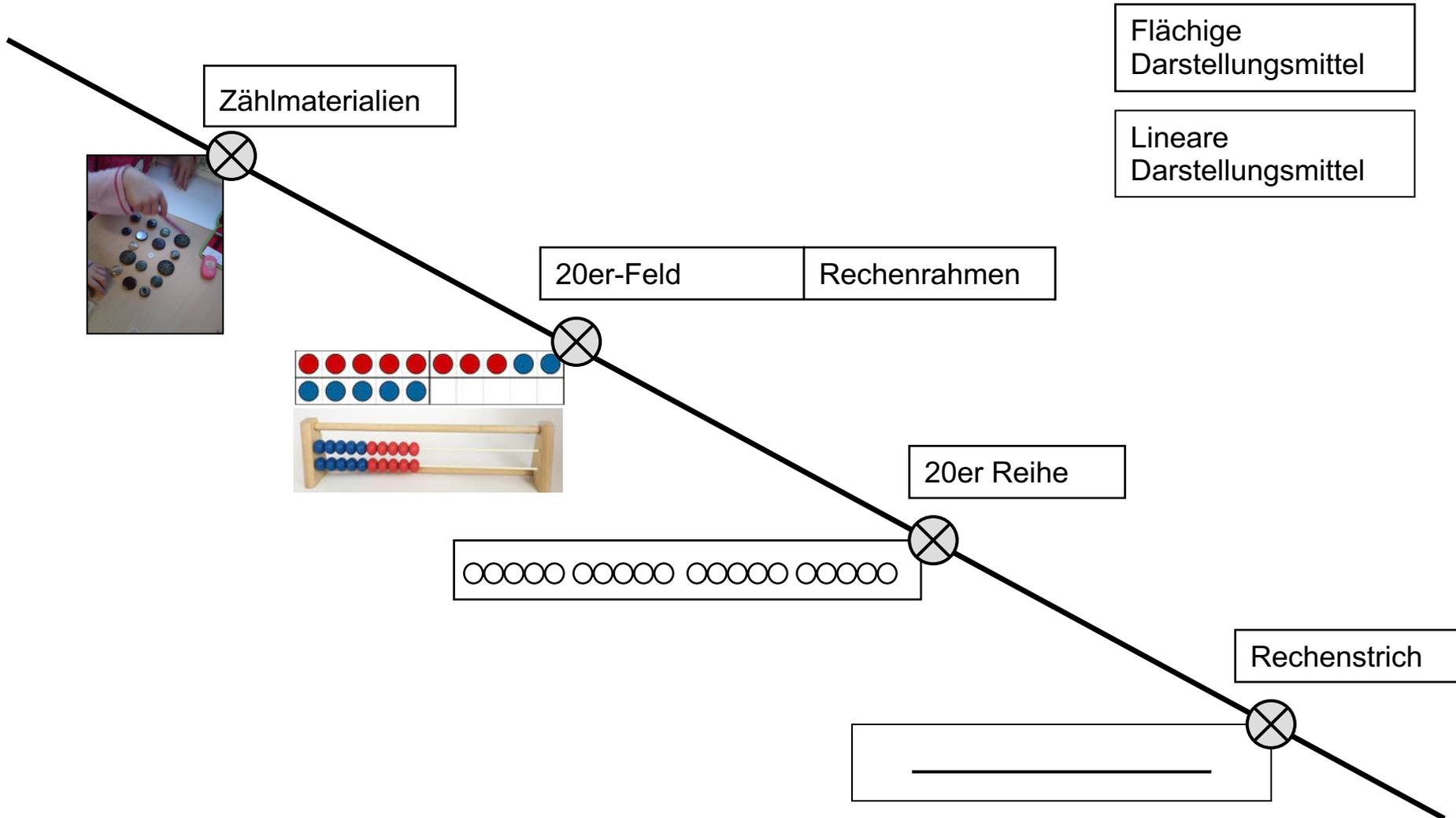
Wesentlich ist nicht, eine bestimmte Reihenfolge nachzuahmen, sondern sich bewusst für eine eigene Reihenfolge zu entscheiden, die Sie durchdacht und reflektiert haben.



Diskutieren Sie am Ende gemeinsam darüber.

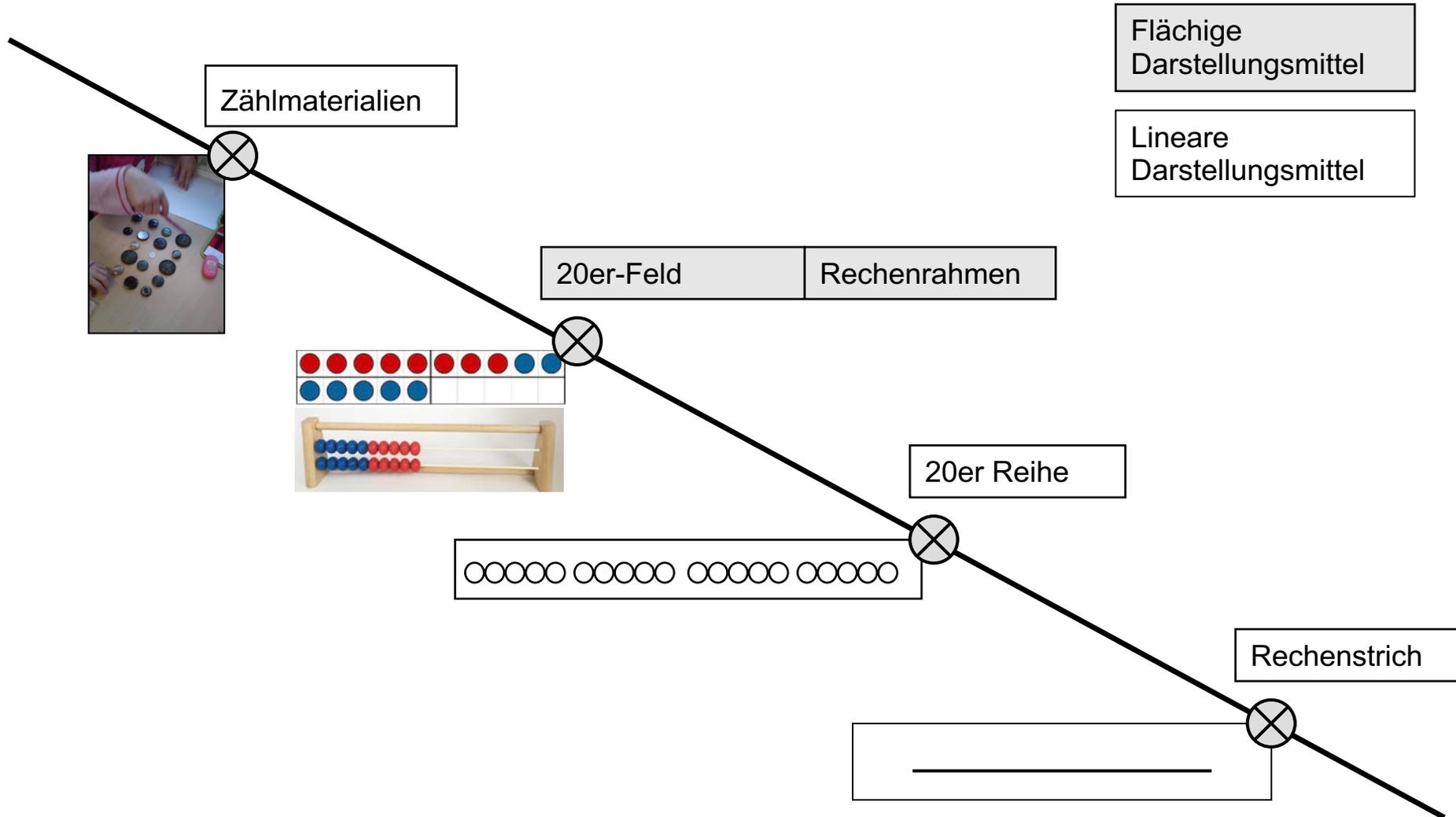


3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse

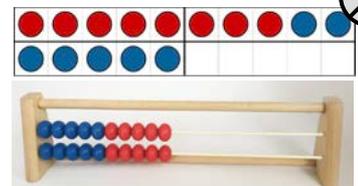
Flächige
Darstellungsmittel

Lineare
Darstellungsmittel

Zählmaterialien



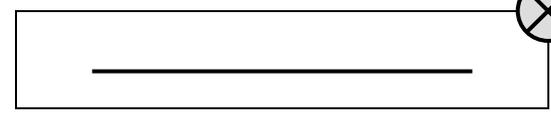
20er-Feld Rechenrahmen



20er Reihe

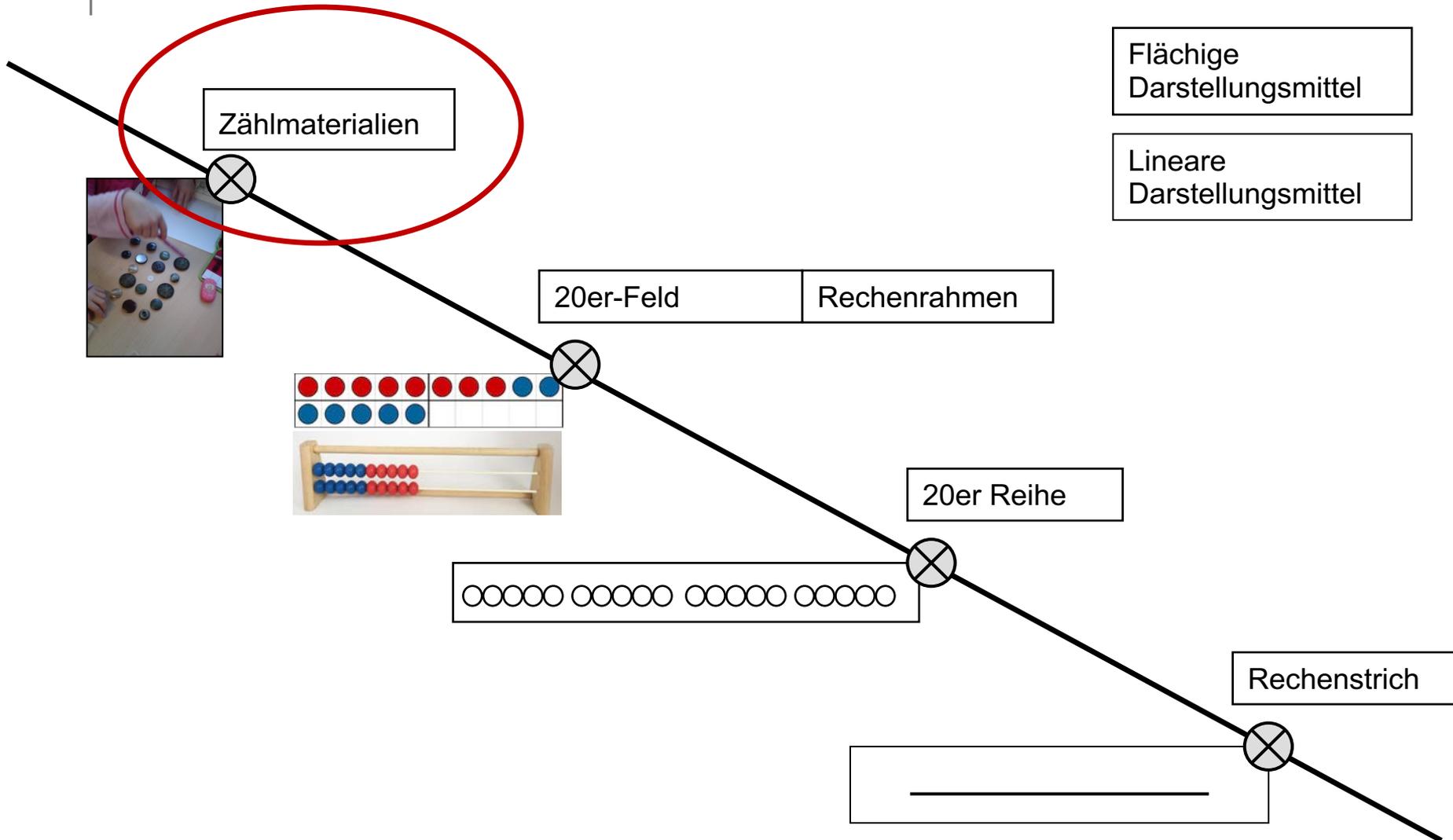


Rechenstrich





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse

Im Folgenden werden diese wiederkehrenden Punkte auf dem Weg „von einem“ zum „anderen“ Material immer wieder beschrieben:

1. Gründe zur Herleitung eines Materials
2. Verschiedene Übungen zur Einführung
3. Beispiele um „mentales Handeln“ anzuregen





Zählmaterialien zum Aufbau von Zahlvorstellung

Herleitung:

„Da starten, wo das Kind steht: Meistens im Konkreten!“

Übungen zum Zählen:

- Mengen abzählen (In der Klasse, zu Hause, auf der Straße, Gegenstände in Zählgläsern)
- Beim Abzählen größerer Mengen irritieren, so dass Kinder Einsicht gewinnen, geschickter zu verfahren, um nicht immer wieder von vorne mit dem Abzählen anfangen zu müssen.
- Anzahlen durch (geschicktes) Zählen (2er, 5er, 10er Bündel) ermitteln.
- Rückwärts zählen, in Schritten zählen, Abzählreime.
- Mengen „blitzschnell“ erfassen: Punktefelder, Mengenbilder, ... kurz betrachten und Anzahl benennen.

Erste „Übersetzungen“ vornehmen:

- Anzahlen in Form einer Strichliste darstellen (5er Struktur entwickeln)
- Anzahl auf flächige Darstellungsmittel übertragen (10er Struktur entwickeln)

„Rückübersetzungen“ anstreben:

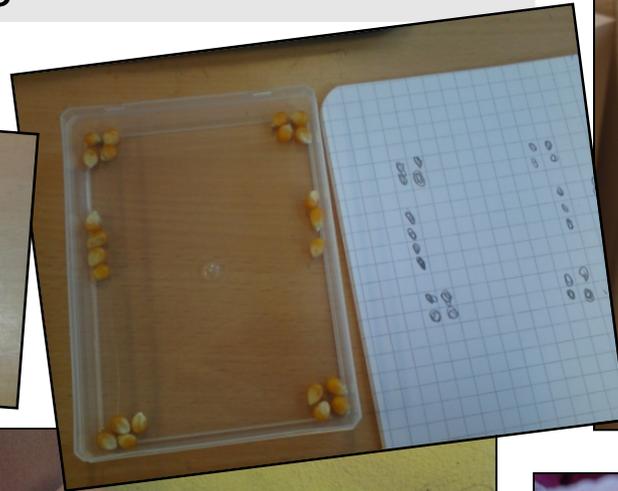
- Zu einer vorgegebenen Strichliste eine Menge legen
- Zu einer Zahl (6) eine Zahlengeschichte erfinden (Bsp.: 6. Geburtstag, 6 Kinder mit blondem Haar, ...)
- Zu einem Zahlenbild, das mit 10er System-Material gelegt wurde, Anzahlen ermitteln und Zahl notieren.





Zählmaterialien zum Aufbau von Zahlvorstellung

Vorwärts, rückwärts, in Schritten zählen, Mengen bündeln u. v. m. an **KONKRETEN** Materialien aus dem Alltag der Kinder





Zählmaterialien zum Aufbau von Zahlvorstellung

Weitere Anregungen:

(Ideen u. a. aus: Peter-Koop/ Grüßing 2007)

Mengen vergleichen

★ „Du hast mehr Klötze als ich!“
„Wie viel mehr genau?“

Dinge sortieren/ vergleichen

Lang oder kurz? Leicht oder schwer?

Hoch, höher am höchsten!

Rote, gelbe, blaue, rote Autos! Wie viele von jeder Farbe?



Welche Übungen/ Spiele fallen Ihnen ein?
Tauschen Sie sich aus!

Zahlen in der Umwelt suchen

(unterschiedliche Zahlaspekte ermitteln)

„*Mein Tisch ist 2 m lang!*“ (Maßzahlaspekt)

„*Ich wähle Omas Nummer: 738492.*“ (Ordnungzahlaspekt)

„*Dort liegen 35 Gummibärchen!*“ (Kardinalzahlaspekt)

„*Thomas ist 2. geworden!*“ (Ordinalzahlaspekt)

Zahlen zerlegen

Immer 8! (Spiel mit Würfeln oder Fingern.)

„*Meine Hand kann 5 (7, 9, 12, ...) Steine tragen! 2 (5, 6, ...) davon sind weiß! Lege die Steine in meine Hand.*“

(Spiel zu zweit mit schwarzen und weißen Spielsteinen.)

Das „Atom-Spiel“ (Gruppe von Kindern findet sich auf Ansage des Spielleiters in 3er, 5er, ... Gruppen zusammen)





Zählmaterialien zum Aufbau von Zahlvorstellung

Das Material, das Sie in Haus 3 finden, hat sich besonders mit der Frage beschäftigt, wie Mathematik eigentlich in die Köpfe der Kinder gelangen kann.

Als wesentlicher Aspekt wird dabei immer wieder herausgestellt, wie mithilfe von Übungen am mathematischen Material allmählich so genannte „innere Bilder“ von mathematischen Strukturen im Kopf eines Kindes entstehen sollen.

Hat ein Kind solche Strukturen mit der Zeit verinnerlicht, gilt es, sich durch das bewusste Vorstellen dieser Bilder im Kopf am Ende auch wieder von dem mathematischen Material zu lösen. Dies sollte dann zur Folge haben, dass das Kind z. B. „flexibel“ im Kopf rechnen kann.

Daher wollen wir im Folgenden noch einmal darauf eingehen, wie mathematisches Material beim Aufbau von Zahlvorstellung (im weiteren Verlauf dann auch zur Operationsvorstellung usw.) eingesetzt werden soll, um „innere Bilder“, also mentales Handeln bei Kindern zu etablieren!





Von der Handlung zur mentalen Vorstellung („Mathe in den Kopf“)

1

Das Kind handelt am geeigneten Material.

Die mathematische Bedeutung der Handlung wird beschrieben.

Zentral: Versprachlichen der Handlung und der mathematischen Symbole.

2

Das Kind beschreibt die Materialhandlung mit Sicht auf das Material.

Es handelt jedoch nicht mehr selbst, sondern diktiert einem Partner die Handlung und kontrolliert den Handlungsprozess durch Beobachtung.

3

Das Kind beschreibt die Materialhandlung ohne Sicht auf das Material.

Für die Beschreibung der Handlung ist es darauf angewiesen, sich den Prozess am Material vorzustellen.

4

Das Kind arbeitet auf symbolischer Ebene, übt und automatisiert.

Gegebenenfalls wird die entsprechende Handlung in der Vorstellung aktiviert.





Von der Handlung zur mentalen Vorstellung („Mathe in den Kopf“)

1

Das Kind handelt am geeigneten Material.

Die mathematische Bedeutung der Handlung wird beschrieben.

Zentral: Versprachlichen der Handlung und der mathematischen Symbole.

2

Das Kind beschreibt die Materialhandlung mit Sicht auf das Material.

Es handelt jedoch nicht mehr selbst, sondern diktiert einem Partner die

Vom „konkreten Tun“ über das Arbeiten mit Darstellungsmitteln“ zur „Mathe im Kopf“!

Wir wissen aber auch:

Das, was genau im Kopf eines Kindes passiert, können wir immer wieder nur erahnen.

Im Austausch mit ihm, kann es uns jedoch verschiedene Einblicke in seinen „Kopf“ gewähren.

Mit diesen Informationen kann dann der weitere Lernweg besprochen und beschlossen werden.

Mehr dazu: H3, UM, Text: „Mathe in den Kopf?!“ und Vierphasenmodell-Seite

nach wartna & Schulz 2011, S.11





Zählmaterialien zum Aufbau von Zahlvorstellung

„Mentales Handeln“ anregen

1



Erst MIT „gucken“ ...

„Wie viele Finger links und rechts?“

dann OHNE „gucken“
(Bild im Kopf machen) ...



W. Schipper, Förderkartei: www.uni-bielefeld.de/idm/serv/rechenstoer.htm





Ein neues Darstellungsmittel kommt hinzu!



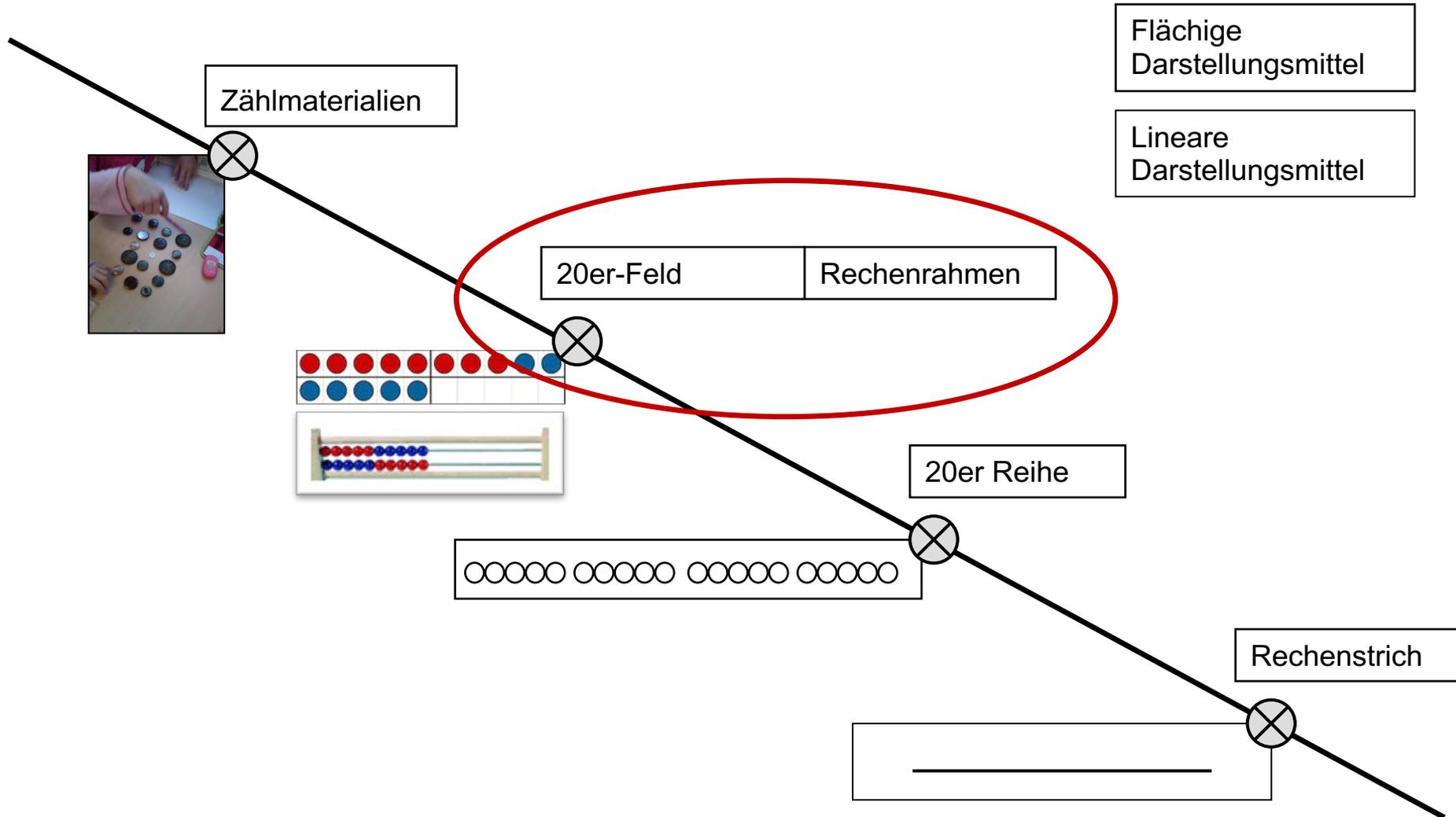
Aufgepasst!

Überlege gut den nächsten Schritt
zur Einführung eines
neuen, nach (5-er und 10er-Struktur)
strukturierten Darstellungsmittels!





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse



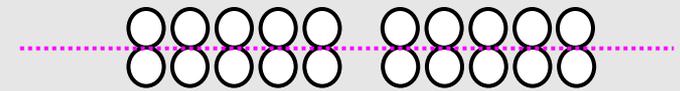
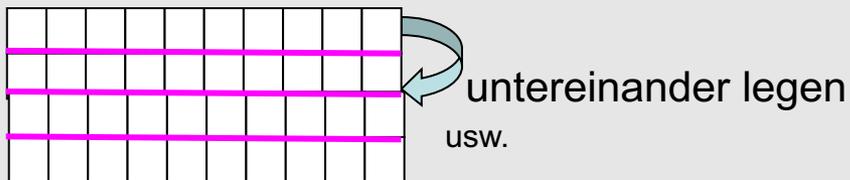


Zahlenfelder zum Aufbau von Zahlvorstellung

Herleitung:

Durch verschiedene Zählansätze haben Kinder die Einsicht entwickelt, dass das Bündeln von Mengen zum schnelleren Zusammenzählen der Gesamtmenge verhilft. Hierbei können die Kinder bspw. durch Eintauschübungen von 10 Plättchen, einen Zehnerstreifen erhalten.

Durch Untereinanderlegen von jeweils 10 nebeneinander positionierten Plättchen ergibt sich eine flächige Anordnung. Hieraus kann ein Zahlenfeld (20er Feld oder andere) entwickelt werden, das die Kinder durch Aneinanderkleben von 10er Streifen (Papier) selbst herstellen.



Darstellung mit runden Zahlenfeldern

Durch Untereinanderlegen (-kleben) von 10er Streifen können unterschiedliche Zahlenfelder entstehen, die z.B. der jeweiligen Zahlvorstellung des Kindes entsprechen und auch individuell entstehen können.

Übungen dazu:

- Zahlen am Zahlenfeld suchen/ zeigen
- Zahlen suchen/ zeigen und „Trick“ erklären, wie die Zahl schnell gefunden werden kann
- „Blitzgucken“ üben (**Tipp**: „Blitzgucken“ auf dem OHP mit allen Kindern im Kreis. Steine, Holzwürfel, Knöpfe auflegen und mit einem Papier abdecken.)



„Mentales Handeln“ anregen

2

Erst MIT „gucken“ ...



3

dann OHNE „gucken“ ...

„Blitzgucken“

- auch am **20er** Rechenrahmen
- auch am **20er** Feld
- auch am **100er** Feld

(Vgl. auch „Blitzrechnen aus mathe2000“)

Bilder: W. Schipper, Förderkartei: www.uni-bielefeld.de/idm/serv/rechenstoer.htm





Ein neues Material kommt hinzu!



Achtung!

Es folgt ein Darstellungswechsel

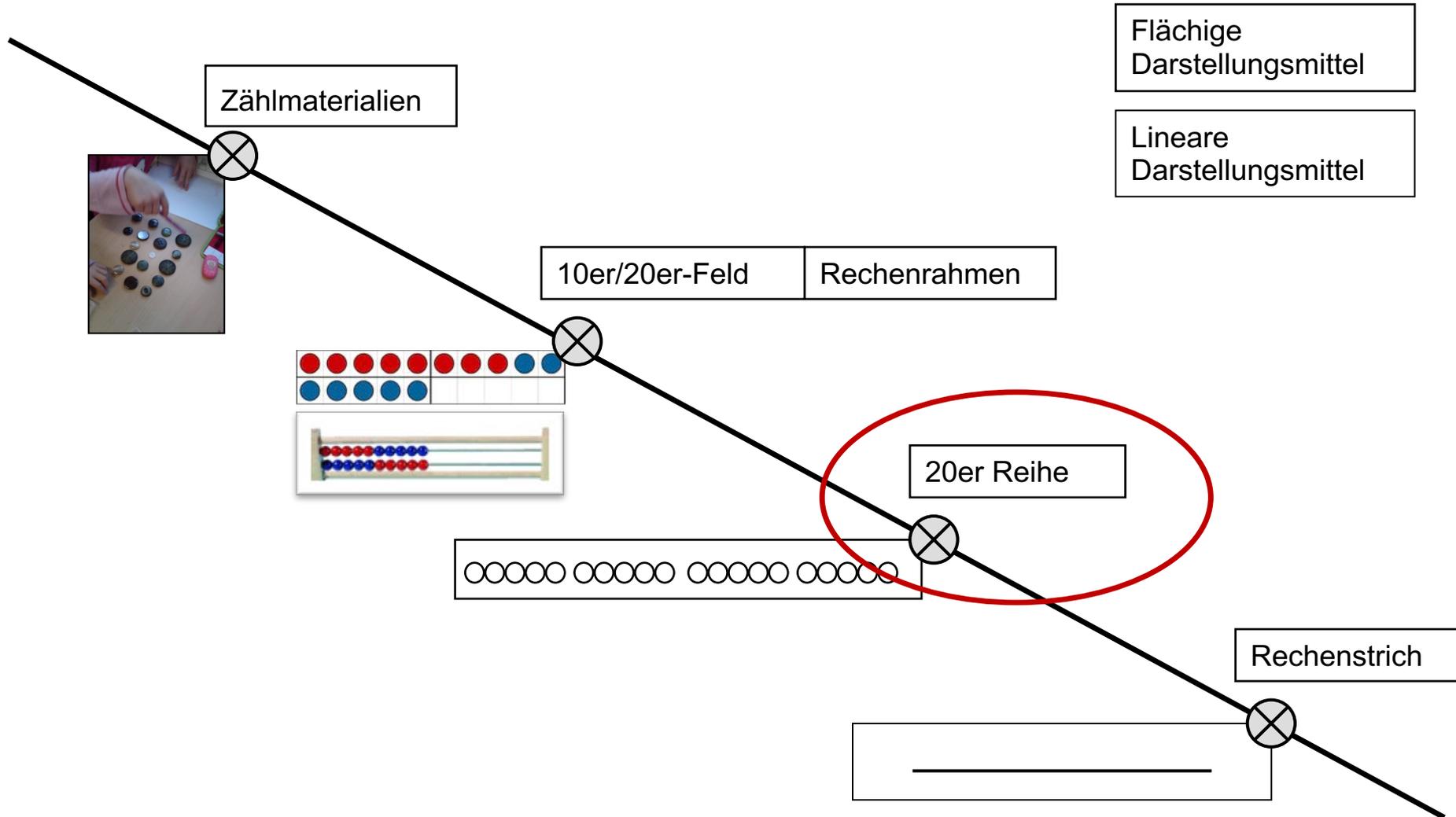
vom Feld (flächige Anordnung)
zum Band (lineare Anordnung).

Auch hier ist das erneute „anders gucken“ nicht für jedes Kind einfach und selbstverständlich!





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse





Zahlenbänder zum Aufbau von Zahlvorstellung

Herleitung:

Vom 10er Feld zum Zahlenband

Durch Nebeneinanderlegen von Zehnerfeldern ergibt sich eine lineare Anordnung. Hieraus kann ein Zahlenband entwickelt werden, das die Kinder durch Aneinanderkleben von 10er Streifen (Papier) selbst herstellen.



zusammen legen oder



aneinander kleben

Vom 20er Feld zum Zahlenband

Außerdem kann das 20er Feldes durch Zerschneiden hergestellt werden. Dies macht dann die Verbindung vom Feld zum Band klar.

Übungen Zahlenband:

1. „Zahl finden“ (Beispiele am selbst hergestellten 20er Band)

- Leere Kärtchen beschriften, die mit Wäscheklammern an der realen Zwanzigerkette befestigt sind
- Anschließend an der ikonischen Zwanzigerkette.
- Zunächst mit Orientierungspunkten, später ohne.
- Anfangs vorgegebene Orte, dann selbst gewählte.

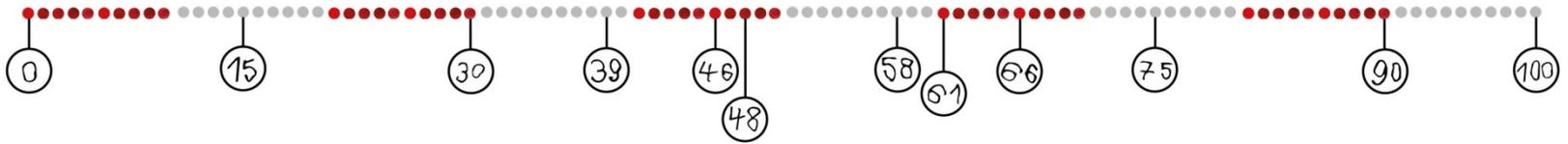
2. „Ort finden“

- zu unzusammenhängenden Zahlen und Zahlenfolgen
- Ergebnisse von Aufgaben (hier Malaufgaben) eintragen

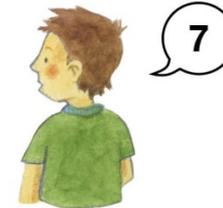


Zahlenbänder zum Aufbau von Zahlvorstellung

Zahl finden



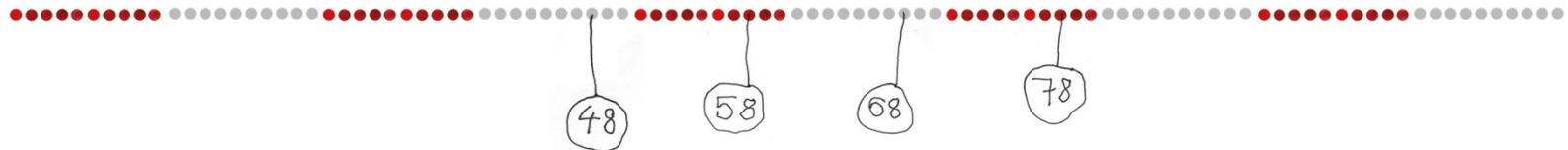
Zahl zeigen.



Zahl nennen.

Ort finden

~~48, 58, 68, 78~~





Ein neues Material kommt hinzu!



Wichtig:

Das mentale Bild der 20er Reihe
vor
dem Rechenstrich einführen!!!

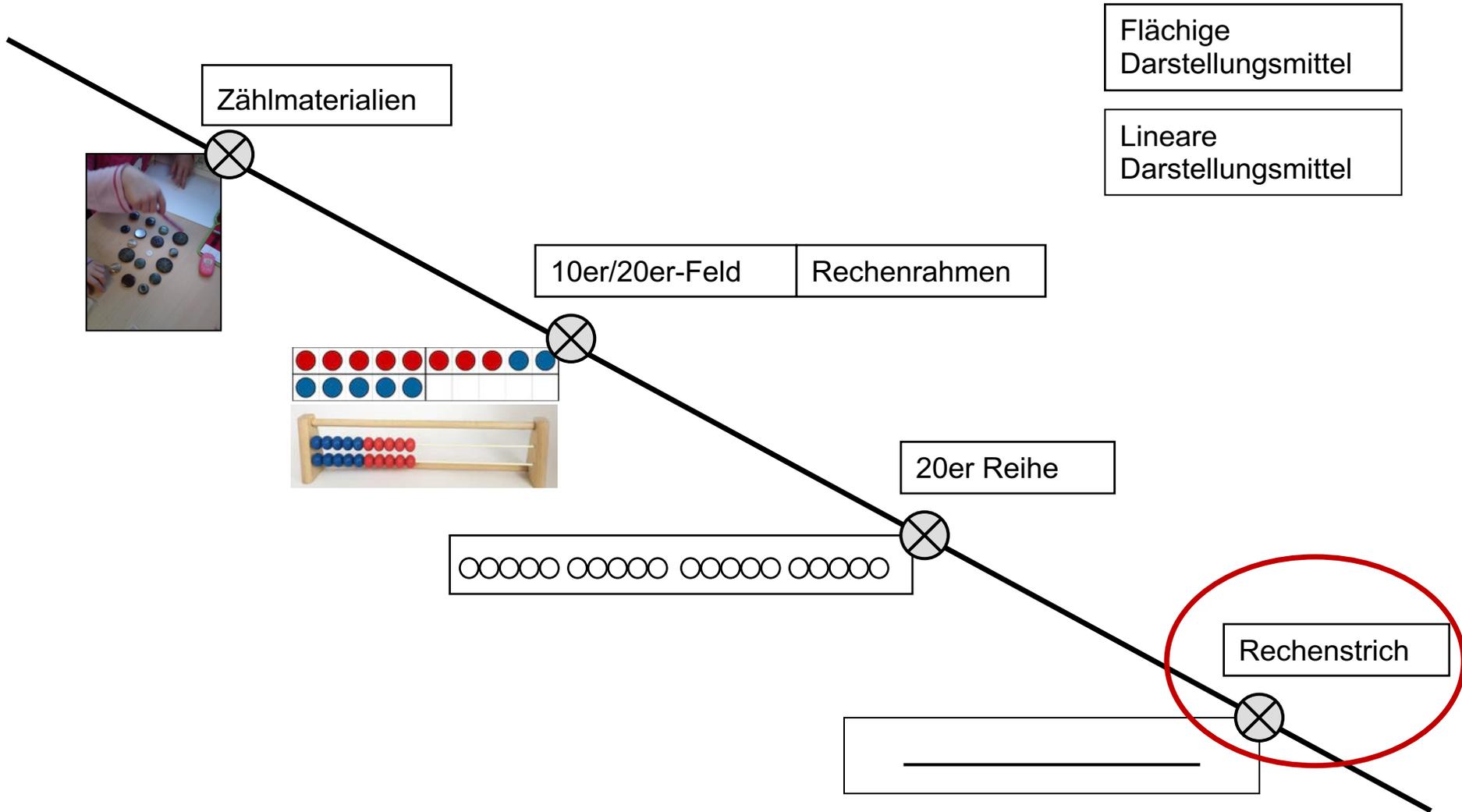
Denn:

Grundlegende Vorstellung vom Aufbau der 20er-Reihe
(*Orte von Zahlen, Nachbarzahlen, Nachbarzehnern, Abständen etc.*)
muss vorhanden sein, um den Rechenstrich später z. B. zum
Darstellen von Rechenwegen einsetzen zu können.





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse





Rechenstrich zum Aufbau von Zahlvorstellung

Herleitung:

„Der leere Zahlenstrahl muss aus der Abstraktion von Handlungen an der Reihendarstellung mit dem Zehnermaterial erwachsen. Hierbei ist die Versprachlichung des Gedachten besonders wichtig.“ (Kaufmann/Wessolowski, S. 44)

- Erarbeiten der Aufbauprinzipien der Zahlenreihe
- Herstellen einer eigenen Zahlenreihe

Am Beispiel der Hunderterreihe:

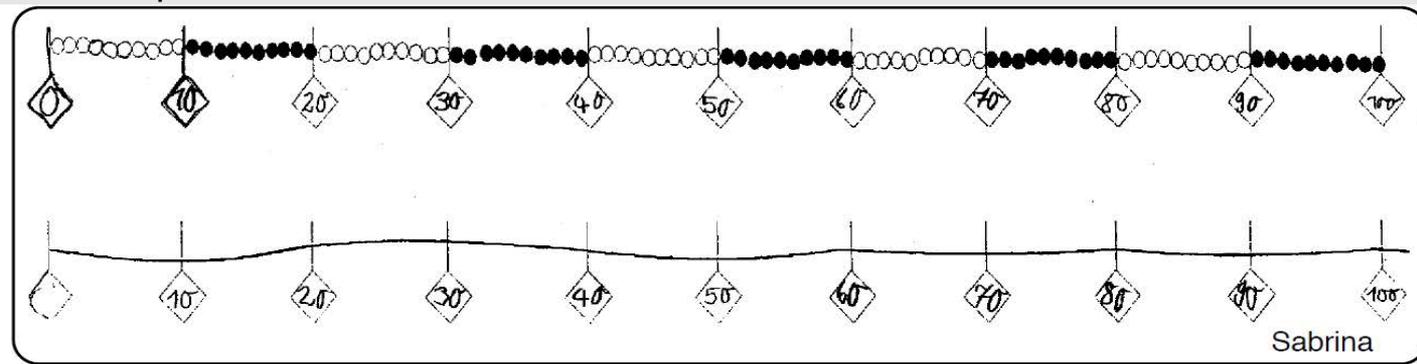


Abbildung aus Höhtker/Selter (1995)

Übungen am Rechenstrich:

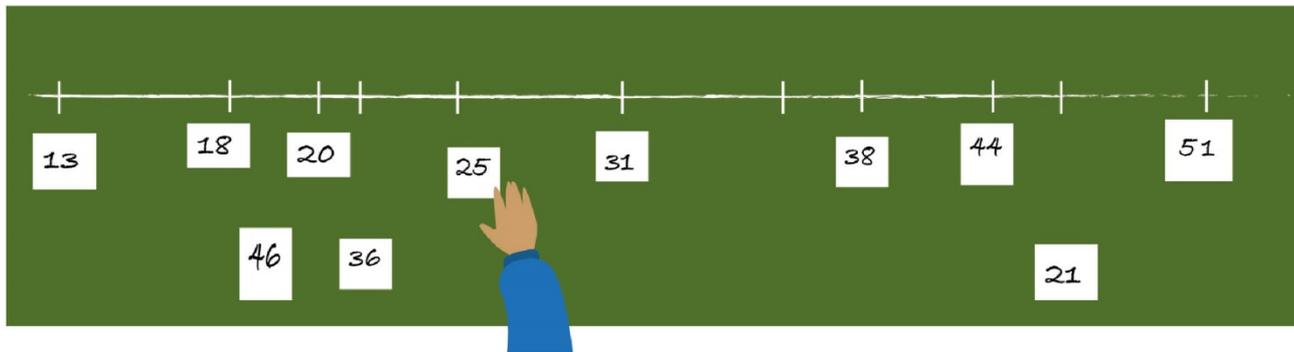
- *Zahl finden*: Ort vorgegeben, Zahl benennen
 - *Ort finden*: Zahl vorgegeben, Ort lokalisieren
- (Vergleich oben: Übungen an der 20er Reihe)



Rechenstrich zum Aufbau von Zahlvorstellung

Mathematisches Material benutzen

Rechenstrich



Zeichne einen Rechenstrich und trage die Zahlen ungefähr ein.





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse

Dies waren einige Beispiele zum Einsatz von mathematischen Materialien bei dem Aufbau von Zahlvorstellung.



Dabei haben wir entlang einer bestimmten Reihenfolge argumentiert.

 **Entwickeln Sie nun mithilfe des** 
„ICH-DU-WIR“ – Prinzips
einen eigenen „Fahrplan“
zur Einführung von
mathematischen Materialien und Veranschaulichungen.
(Vorschlag zur Strukturierung auf der folgenden Folie)





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Analyse



Überlegen Sie zunächst allein (ICH)

In welcher Reihenfolge haben Sie mathematische Materialien bisher/ im vergangenen Schuljahr eingeführt? Skizzieren Sie eine Art Material-Leiste wie in unserem Beispiel.

Erscheint Ihnen das Vorgehen im Nachhinein sinnvoll?

Waren die Einführungen und die Auseinandersetzung mit den einzelnen Materialien intensiv genug für alle Kinder?

Was würden Sie in Zukunft verändern?

Stellen Sie sich Ihre Überlegungen gegenseitig vor (DU)

Entwerfen Sie einen „Fahrplan“ für die Zukunft (WIR)

Welche Materialien wollen Sie in Zukunft benutzen?

In welcher Reihenfolge sollen diese eingeführt werden?

Nehmen Sie unbedingt auch Ihr Lehrwerk zur Hand.

Schauen Sie dort, in welcher Reihenfolge Materialien eingeführt werden. Vielleicht können Ihnen dort getroffene Entscheidungen helfen. Vielleicht finden Sie aber auch eine alternative Lösung.





Aufbau des Fortbildungsmoduls 3.1

1. **Was ist ein tragfähiges Zahlverständnis?**
 - **Bedeutung von Zahlen**
 - **Fähigkeit zum Darstellungswechsel**
 - **Beziehungen zwischen Zahlen**
2. **Warum ist Zahlverständnis wichtig für die Überwindung/Prävention von Rechenschwierigkeiten?**
3. **Welche Darstellungsmittel können wie zur Entwicklung eines Zahlverständnisses eingesetzt werden?**
 - **Analyse verschiedener Darstellungsmittel**
 - **Aufgabenformate**
4. **Abschluss und Ausblick**





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Aufgabenformate

Zahlvorstellung: Teile – Ganzes



8

Die Zerlegung einer Menge in zwei Teilmengen ändert nichts an der Gesamtmenge.



8

Kompensierende Mengenveränderung

„Ich nehme einen Würfel und lege ihn zu Dir. Haben wir beide zusammen jetzt noch genauso viele Würfel, wie in der großen Schachtel waren?“

3

5





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Aufgabenformate

Zahlvorstellung: Teile – Ganzes



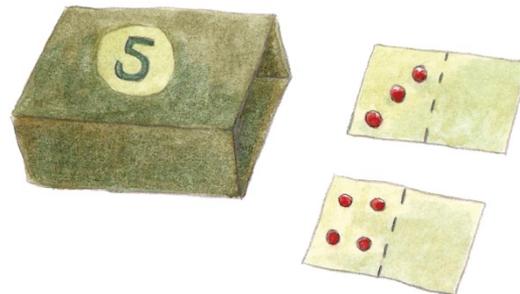
„Ich zerlegen
die 7 in 4
und 3.“



3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Aufgabenformate

Zahlvorstellung: Teile – Ganzes

Plättchen werfen und Schüttelboxen





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Aufgabenformate

Zahlvorstellung: Teile – Ganzes



Schipper: Förderkartei

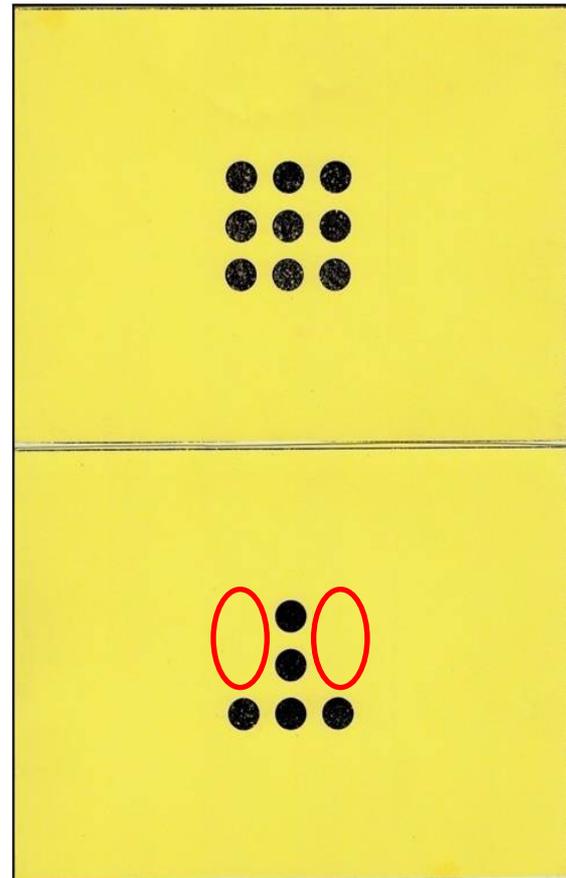
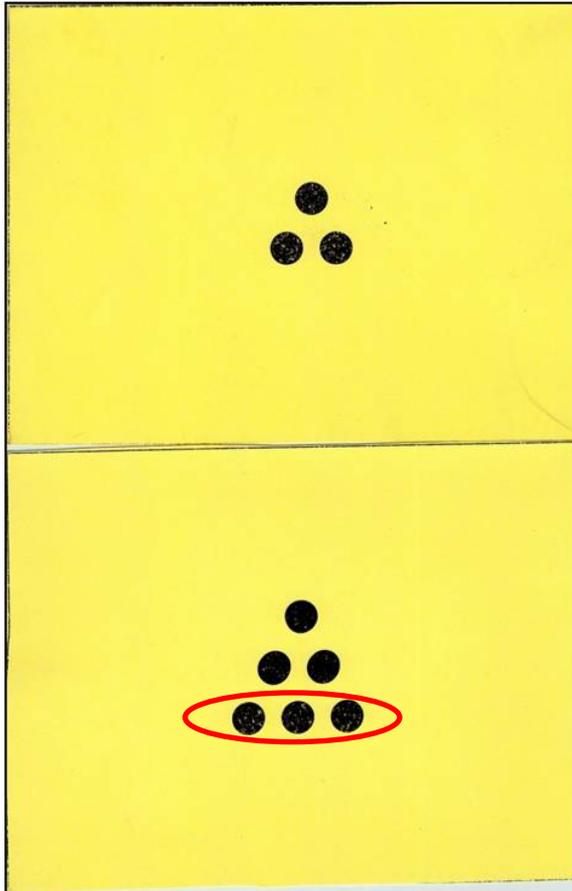




3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Aufgabenformate

Zahlvorstellung: Relational

Anzahlen unterschiedlicher Mengen vergleichen





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Aufgabenformate

Zahlvorstellung: Relational



L: „Könnt ihr jetzt sagen, **wie viel mehr** Nüsse im vollen Glas waren?“

B: „elf!“

M: „sechs!“

„Da sind mehr Nüsse“
(kardinal)





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Aufgabenformate

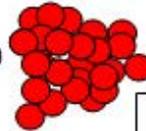
Zahlvorstellung: Relational

Spiel: Hamstern – ein Spiel für 2 😊😊

Ihr braucht:



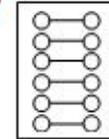
20 bis 40



für den „Topf“



„Vergleichsraster“



Ziel:

Möglichst viele  sammeln

Spielregel:

Beide 😊😊 würfeln



und legen die gewürfelte Anzahl an  an das „Vergleichsraster“.



Der Spieler, der mehr  hat, darf die  die er **mehr** hat „hamstern“ (für sich zur Seite legen).



Die anderen  kommen wieder in den  und eine neue Runde beginnt.

Spielende:

Wenn der  leer ist.

Ju

Gewinner:

Wer am Ende die meisten  hat.



3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Aufgabenformate

Aktivität:



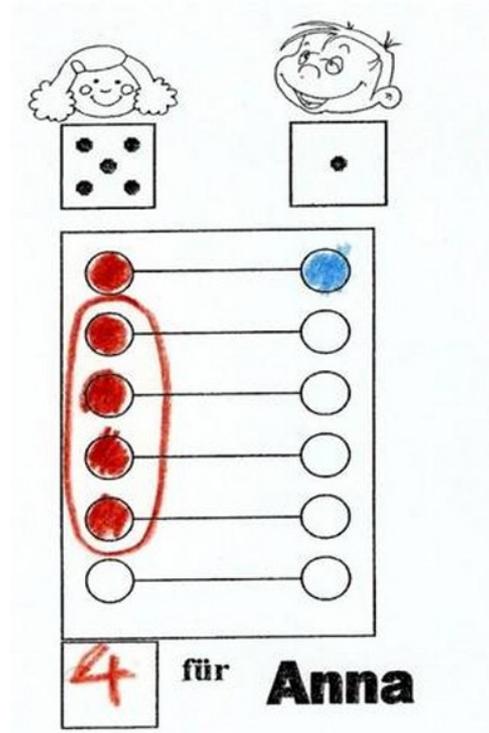
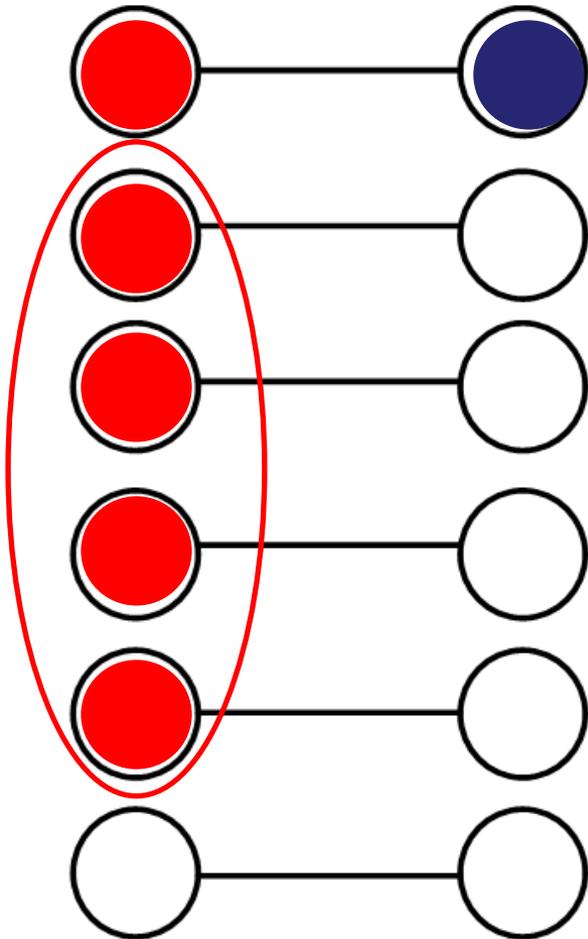
1. Spielen Sie das Spiel „Hamstern“ mehrere Runden.
2. Überlegen Sie gemeinsam, welche Möglichkeiten dieses Spiel in Hinblick auf den weiteren Kompetenzaufbau und Differenzierungsmaßnahmen bietet.





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Aufgabenformate

Zahlvorstellung: Relational



Handlungsbegleitendes Sprechen:
„Ich habe **4 mehr**“
„Du hast **4 weniger**“





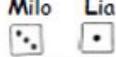
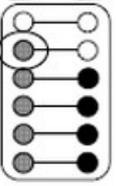
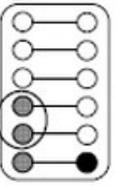
3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Aufgabenformate

Zahlvorstellung: Relational

Hamstern 1



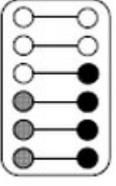
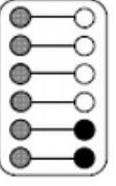
Milo Lia Milo Lia

Milo hat 1 mehr. Milo hat mehr.

Milo Lia Milo Lia



 hat mehr. hat mehr.

 hat weniger. hat weniger.

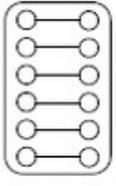
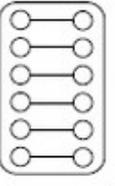
Hamstern 2



Zeichne die Plättchen.
Trage ein, wie viele Plättchen die Kinder bekommen.

Milo Lia Milo Lia



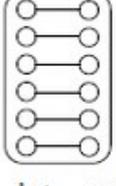
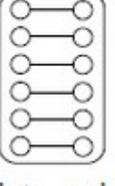



Lia hat mehr. Milo hat mehr.

Milo hat weniger. Lia hat weniger.

Milo Lia Milo Lia



 hat mehr. hat mehr.

 hat weniger. hat weniger.

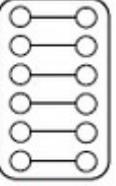
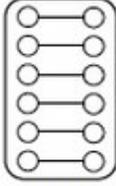
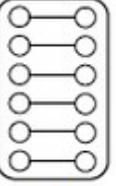
Hamstern 3



Zeichne das Würfelbild und die Plättchen.
Trage ein, wie viele Plättchen die Kinder bekommen.

Milo Lia Milo Lia Milo Lia



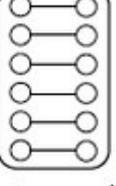
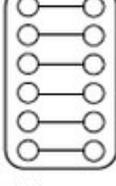
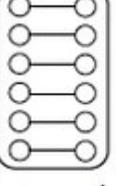





Lia hat 1 mehr. Lia hat 3 mehr. Milo hat 2 mehr.

Milo hat 1 weniger. Milo hat 3 weniger. Lia hat 2 weniger.

Milo Lia Milo Lia Milo Lia



Milo hat mehr. Lia hat mehr. hat mehr.

Lia hat weniger. Milo hat weniger. hat weniger.



3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Aufgabenformate

Zahlvorstellung: Relational

BINGO

„Welche Zahl ist ...?“

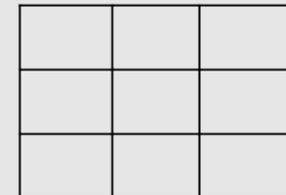
um 1 größer als ___

um 1 kleiner als ___



Selbst spielen:

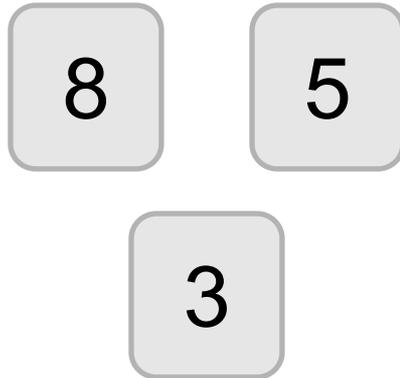
Schreiben Sie die Zahlen zwischen 1 und 9 in ein Neunerfeld.





3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Aufgabenformate

Zahlvorstellung: Relational



Vergleichs-Bingo

	ist um		größer als		.
--	--------	--	------------	--	---

	ist um		größer als		.
--	--------	--	------------	--	---

	ist um		größer als		.
--	--------	--	------------	--	---

	ist um		größer als		.
--	--------	--	------------	--	---



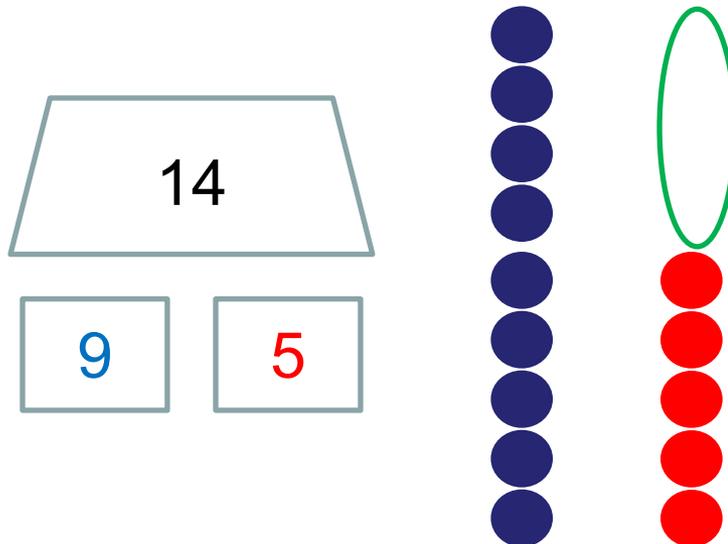
3. Darstellungsmittel wie einsetzen? – Aufgabenformate

Zahlvorstellung: Relational

Aktuelle VERA Aufgabe des 3. Schuljahrs:

John und Paula haben zusammen 14 Fische gefangen.
John hat 9 Fische gefangen.
Wie viele Fische hat Paula weniger gefangen als John?

Antwort: _____ Fische





Aufbau des Fortbildungsmoduls 3.1

1. **Was ist ein tragfähiges Zahlverständnis?**
 - **Bedeutung von Zahlen**
 - **Fähigkeit zum Darstellungswechsel**
 - **Beziehungen zwischen Zahlen**
2. **Warum ist Zahlverständnis wichtig für die Überwindung/Prävention von Rechenschwierigkeiten?**
3. **Welche Darstellungsmittel können wie zur Entwicklung eines Zahlverständnisses eingesetzt werden?**
 - **Analyse verschiedener Darstellungsmittel**
 - **Aufgabenformate**
4. **Abschluss und Ausblick**





4. Abschluss und Ausblick

“Rechenschwache Kinder sind schwach im Rechnen, weil sie es (noch) nicht besser gelernt haben“ (GAIDOSCHIK, 2010)

ABER grundsätzlich erwerben auch diese Kinder mathematisches Wissen nicht anders als andere Kinder

...deshalb gilt für ALLE Kinder:

Tragfähige Vorstellungen von Zahlen aufbauen, indem ...

- ... **Bedeutungen von** und **Beziehungen zwischen Zahlen** sowie die **Fähigkeit zum Darstellungswechsel** von Anfang an thematisiert und geschult werden.
- ... Darstellungsmittel passend eingesetzt und durch ergiebige Aufgabenformate ergänzt werden.





4. Abschluss und Ausblick

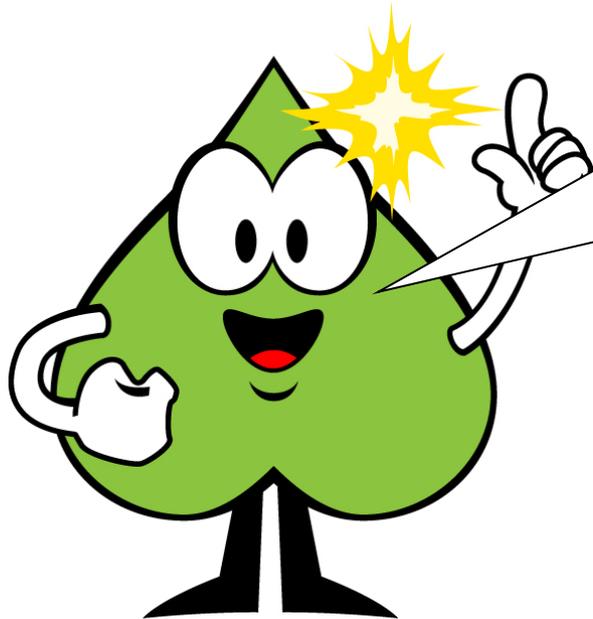
Ausblick:

- Modul 3.1 fokussiert den Aufbau tragfähiger Zahlvorstellungen im Zahlenraum bis 20 im arithmetischen Anfangsunterricht.

Bitte beachten: Dies ist ein *erster* Schritt auf dem Weg zu einem *anschlussfähigen* Zahlverständnis, das im weiteren Verlauf bspw. in den folgenden Bereichen weiter vertieft werden muss:

- Hunderter- / Tausender- / Millionraum, ...
- negative Zahlen
- Bruchzahlen
- ...





Vielen Dank für
Ihre
Aufmerksamkeit!





Literatur

Gaidoschik, M. (2003): Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern. Persen. 5. Auflage 2010

Gerster, H.-D.; Schultz, R. (2000): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen. Pädagogische Hochschule Freiburg. (420 Seiten) Download: www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/1397/

Schipper, W.(2005): Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern. Beschreibung des Moduls 4 für das Projekt Sinus-Transfer Grundschule (abrufbar unter www.sinus-grundschule.de).

Wehrmann, M. (2003): Qualitative Diagnostik von Rechenschwierigkeiten im Grundlagenbereich Arithmetik. Verlag Dr. Köster: Berlin.

Wittmann, E. Ch. (2001): Ein alternativer Ansatz zur Förderung „rechenschwacher“ Kinder. Download: www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/mathe2000/pdf/foerderansatz.pdf

Literatur zu Materialien:

<http://www.lerntherapie-kuhlmann.de/de/onlinetest-2/index.php> (letzter Aufruf 29.06.2011)

Schipper, W. (2005). Übungen zur Prävention von Rechenstörungen. In: Die Grundschulzeitschrift, Heft 182, Karteikarten 1-16. Seelze. Erhard Friedrich Verlag.

Blitzrechen Kartei: Krauthausen, G.; Wittmann, E.Ch. Klett

Haus 3, UM, 1+1 Kartei

Verboom, L. (2010): „Ich habe 3 Plättchen mehr als du“ In: Mathematik Grundschule, H. 25, S. 6 – 7. (hamster)

Verboom, L. (2009): Vom zählenden Rechnen zum Zahlenblick. Workshop auf dem Symposium „mathe 2000“ in Dortmund 2009.

Schulbücher: Fredo , Zahlenbuch, Matheprofis





Hinweise zu den Lizenzbedingungen



Diese Folie gehört zum Material und darf nicht entfernt werden.

- Dieses Material wurde vom PIKAS-Team für das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) konzipiert und kann, soweit nicht anderweitig gekennzeichnet, unter der **Creative Commons Lizenz BY-SA: Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International** weiterverwendet werden.
- Das bedeutet: Alle Folien und Materialien können zum Zweck der Aus- und Fortbildung unter der Bedingung heruntergeladen, verändert und genutzt werden, dass alle Quellenangaben erhalten bleiben, PIKAS als Urheber genannt und das neu entstandene Material unter den gleichen Bedingungen weitergegeben wird.
- Bildnachweise und Zitatquellen finden sich auf den jeweiligen Folien bzw. in den Zusatzmaterialien.
- Weitere Hinweise und Informationen zu PIKAS finden Sie unter <http://pikas.dzlm.de>.

