Platz für eigene Notizen

Darum geht es:

Um Zahlen multiplikativ zerlegen zu können, benötigen Schülerinnen und Schüler ein ausreichendes Verständnis der Division. Bei der entsprechenden Zerlegung von Zahlen zeigt sich die die Abhängigkeit der Multiplikation und Division voneinander (Umkehroperation).

Zerlegungsbäume ermöglichen ein schnelles Gewinnen von Zerlegungen, bieten aber auch eine übersichtliche Darstellung mit dem Potenzial, Strukturen aufzudecken zu beschreiben und damit weiterzuarbeiten. So bietet sich durch den Einsatz von Zerlegungsbäumen die Förderung inhaltsbezogener und prozessbezogener Kompetenzen an.

MSW Lehrplan Mathematik 2008

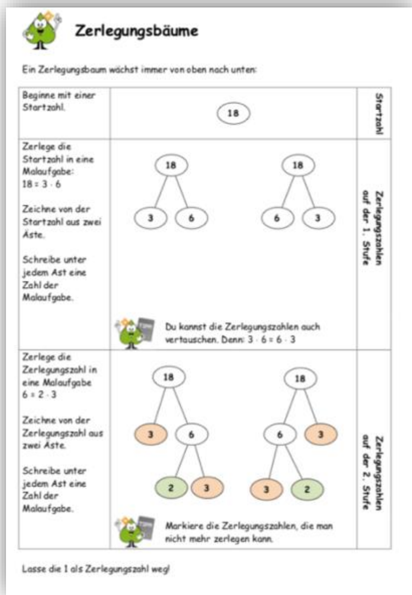
Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
<u>Kompetenzerwartungen nach Klasse 4</u> Die SuS entdecken Beziehungen zwischen einzelnen Zahlen und in komplexen Zahlenfolgen und beschreiben diese unter Verwendung von Fachbegriffen (z.B. ist Vorgänger / Nachfolger von, ist Nachbarzehner / Nachbarhunderter von / ist die Hälfte / Das doppelte von, ist Vielfaches von / Teiler von)."	Sind den jeweiligen Phasen des Unterrichtsvorhabens/ Aufgabenstellungen zugeordnet

Einstieg: Zerlegungsbäume kennenlernen

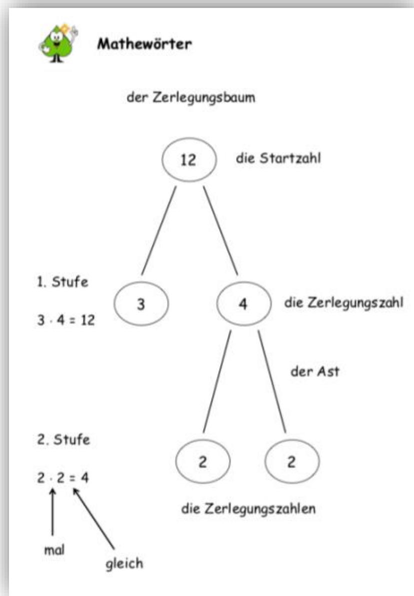
In einem gemeinsamen Einstieg klärt die Lehrperson mit den Kindern den Aufbau und die mathematischen Hintergründe der Zerlegungsbäume. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, wo sich in einem Zerlegungsbaum Startzahl und Zerlegungszahlen befinden und wie diese zueinander in Beziehung stehen. Dabei hilft das Regelplakat.

Bereits in dieser Phase beginnt sinnvollerweise die Wortspeicherarbeit. Zum einen kann das Vokabular den Verständnisprozess über die Strukturen von Zerlegungsbäumen unterstützen (Wo wird begonnen (Start). Wie entstehen weitere Äste (Zerlegung), Begriffe wie „mal“ und „geteilt“ usw.). Zum anderen ist ein Fachvokabular notwendig, um sich bereits von Beginn an über Elemente oder Aspekte von Zerlegungsbäumen austauschen zu

können. Darüber hinaus verdeutlicht ein bestehender Wortspeicher immer auch eine Verbindlichkeit von fachbezogener Sprache, die im Unterricht einzusetzen ist.
In dieser frühen Phase des Prozesses wird der Wortspeicher allerdings nur reduziert, mit den notwendigsten Begriffen, gefüllt. Weitere Begrifflichkeiten und/ oder Beziehungen werden im weiteren Lernprozess mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam erarbeitet und ergänzt.



Regelplakat Teil 1



Mathewörter Teil 1

Für den weiteren Verlauf sind zwei Varianten denkbar:

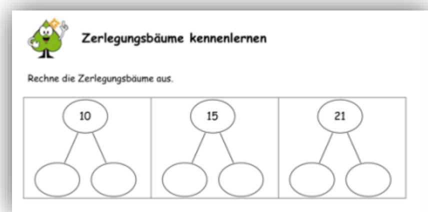
Variante A:	Variante B:
Zerlegungsbäume näher kennenlernen durch Ausrechnen mit vorgegebenen Zahlen.	Mit der Aktivität „Wer legt zuletzt“ die Zerlegungsbäume kennenlernen.

Variante A: Zerlegungsbäume ausrechnen.

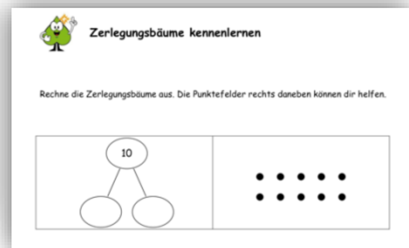
Beim Ausrechnen von Zerlegungsbäumen wird den Kindern zunächst ein Gerüst an die Hand gegeben, mit dem Sie die Zerlegungsbäume bearbeiten können. Dabei sind neben Startzahl auch Äste und nötige Felder für Zerlegungszahlen vorgegeben. An diese Aufgaben schließen sich Eigenproduktionen an – das sind in diesem Fall Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler ihre Startzahlen selbst bestimmen und eigene Zerlegungsbäume erfinden und beschreiben. (Diese Aufgabe wird zum Abschluss des Unterrichtsvorhabens ein weiteres Mal gestellt und ermöglicht so einen guten Überblick über erworbene Kompetenzen.)

Eigenproduktionen regen die Schülerinnen und Schüler dazu an, mit selbst gewähltem Zahlenmaterial selbst den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe mitzubestimmen. Dies ermöglicht der Lehrperson in diesem Beispiel einen Einblick, inwieweit die Lernenden auch größere und komplexere Zahlen multiplikativ zerlegen können. Beschreibungen der Kinder ermöglichen einen weiteren Einblick in Vorgehensweisen und Gedanken der Kinder (Prozessbezogene Kompetenz: Darstellen/ Kommunizieren).

Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten haben multiplikative Zerlegungen von Zahlen auf rein formaler Ebene herzustellen, können alternativ eine Veranschaulichung in Form von Punktmustern erhalten. Diese sollten allerdings nicht als selbsterklärend verstanden werden, können aber unterstützend eingesetzt werden, wenn Kinder multiplikative Darstellungen dieser Art bereits kennengelernt und verstanden haben.
Die Verknüpfung der formalen mit der bildlichen Darstellungsebene gibt der Lehrperson ggf. auch noch einmal Aufschluss über den Lernstand des Kindes. Schülerinnen und Schüler können ggf. durchaus Zerlegungsbäume lösen, wenn sie die Aufgaben des Einmaleins automatisiert haben. Allerdings ist zu beachten, dass die Fähigkeit die Bäume lösen zu können nicht notwendiger Weise einen Aufschluss über ein Verständnis zur Multiplikation und multiplikativen Zerlegungen gibt, denn SuS können Zerlegungsbäume auch mithilfe auswendig gelernter Aufgabensätze lösen. Über ihr Verständnis zur Multiplikation und multiplikativen Zerlegungen muss dies nicht notwendigerweise Aufschluss geben. Insofern stellt die Erweiterung der Aufgabenstellung durch Hinzunahme einer weiteren Darstellungsebene (Punktmuster) eine Unterstützung wie auch neue Herausforderung dar.



Zerlegungsbäume ausrechnen - formal



Zerlegungsbäume ausrechnen - gestützt

Variante B: Spiel: „Wer zerlegt zuletzt?“

Das Spiel stellt einen alternativen Weg zum Kennenlernen von Zerlegungsbäumen dar.

Dabei regt diese Form bereits intensiver dazu an, sich über Strukturen der Zerlegungsbäume Gedanken zu machen. Schülerinnen und Schüler können herausgefordert werden, Startzahlen bewusst zu wählen, um ihre Gewinnchancen zu erhöhen. Diese gemeinsamen Spiel- und Lernanlässe bieten zudem bereits in einer frühen Phase des Unterrichtvorhabens das Potenzial, dass der Wortspeicher zum gemeinsamen Austausch von den Schülerinnen und Schülern eingesetzt wird.
Dabei können die Spieler untereinander in den Austausch kommen, aber auch Überlegungen innerhalb der Klasse können Strukturen und Spielstrategien zu ertragreichen Gesprächen führen, die neben inhaltlichen Aspekten auch prozessbezogene Kompetenzen wie Kommunizieren und Darstellen oder Problemlösen (z.B. bei der sich ergebenden Fragestellung: Welche Zahl muss ich wählen, um zu gewinnen?) herausfordern und fördern.

Wer zerlegt zuletzt?

Ein Spieler nennt eine Startzahl.
Zum Beispiel 48.
Er notiert sie als Startzahl des Zerlegungsbaums.

Der zweite Spieler zerlegt diese Zahl genau einmal.
Er zeichnet also die erste Stufe des Zerlegungsbaums.

Der erste Spieler führt den Zerlegungsbaum genau einmal weiter.

Jetzt muss der zweite Spieler den Zerlegungsbaum weiterführen.

Und so weiter...

Gewonnen hat der Spieler, der zuletzt zerlegt!

Spiel; Wer zerlegt zuletzt?

Zerlegungsbäume erforschen

Das Dividieren und ermitteln von Teilern ist auf inhaltlicher Ebene zentraler Bestandteil des Unterrichtsvorhabens. Zudem soll neben inhaltlichen Aspekten im Folgenden ein Schwerpunkt auf dem Erforschen der Zerlegungsbäume liegen. Dabei werden die Schülerinnen und Schüler weiterhin ihre Fähigkeiten des Dividierens vertiefen. Das alleinige Trainieren der Rechenfertigkeiten ist allerdings nicht ausreichend und soll daher, mehr noch als bereits beim Kennenlernen der Zerlegungsbäume, um die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen erweitert werden. Dazu werden Aufgabenstellungen zu Zerlegungsbäumen bearbeitet, die das Problemlösen, Argumentieren sowie das Darstellen/Kommunizieren anregen. Diese werden als Forscheraufträge formuliert.

Alle Forscheraufträge haben meist einen problemlösenden und argumentativen Charakter. Die Aufforderung zu begründen ist, je nach Erfahrungsstand der Kinder, eine beachtliche Herausforderung. Daher ist es wichtig,

Schülerinnen und Schülern viele Möglichkeiten zu geben, Behauptungen und Erkenntnisse zu begründen. Erst im Verlauf der Grundschulzeit werden sie sicherer und präziser in ihren Begründungen insbesondere auch dann, wenn ihnen ein adäquater Wortspeicher zum Beschreiben und begründen zur Verfügung steht. Daher sind in dieser Phase die Nutzung und ggf. Weiterentwicklung des Wortspeichers weiterhin von großer Bedeutung.
Für das Begründen kann der Wortspeicher zudem um Satzphrasen erweitert werden, die den Schülerinnen und Schülern als sprachliches Gerüst dienen können, mit denen Sie ihre Gedanken strukturiert und für andere Kinder verständlich formulieren können (siehe Mathewörter Teil 2).

<u>Hinweise zu den Forscheraufträgen</u>

Für alle Forscheraufträge ist es hilfreich bzw. notwendig, sie selbst vorab auszuführen – im Beispiel von Forscherauftrag 1 sich z.B. eine Liste oder eine Übersicht mit den möglichen Zerlegungsbäumen anzulegen. So ist man für ein Gespräch mit den Schülerinnen und Schülern inhaltlich gut vorbereitet und hat Hürden, die von den Schülern zu nehmen sind, ggf. bereits selbst genommen, kann diese besser nachvollziehen und Unterstützung anbieten.

<u>Forscherauftrag 1</u>
Grundsätzlich kann man sagen, je größer und komplexer (bzgl. der Primfaktorzerlegung der Zahl) die Startzahl ist, desto schwieriger kann sich die Suche nach allen Zerlegungen gestalten.
Dabei wird auch die Frage zu diskutieren sein, ob sich die Zerlegungszahlen in jeder Stufe vertauschen lassen sollen und dadurch zusätzliche Zerlegungsbäume hinzukommen oder ob diese Variationen als gleiche bzw. nicht neue Möglichkeiten betrachtet werden.
Diese Gesprächsanlass bietet sich an, um das Kommutativgesetz gemeinsam in den Blick zu nehmen.

Bei den Tippkarten gilt ähnliches wie bereits oben beschrieben. Die zusätzliche Darstellungsebene kann unter bestimmten Voraussetzungen als Hilfestellung angesehen werden.

FA1: Zerlegungsbäume zu einer Startzahl finden

Der Folgeauftrag zielt darauf ab, Begriffe wie Teiler (Endzahlen sind Teiler der Startzahl) oder Primzahlen (Zahlen, die keine weiteren Teiler außer der eins und sich selbst haben) in den Blick zu nehmen.

<u>Forscherauftrag 2</u>

Hier besteht ein Unterschied zu vielen anderen kombinatorischen Aufgaben, die die Schülerinnen und Schüler ggf. aus anderen Kontexten kennen. Daher bietet dieser Forscherauftrag eine authentische Fragestellung an, die in diesem Fall nach entsprechender Untersuchung mit der entsprechenden Begründung zu widerlegen ist.
Einfache und sehr anschauliche Beispiele, dass nicht die Größe der Zahl, sondern die Anzahl der Teiler von Bedeutung ist, sind hierbei Quadratzahlen aus Primzahlen (5x5, 7x7,13x13, etc.)

Forscherauftrag

Piko vermutet:

Je größer die Startzahl ist, desto mehr Stufen und Äste hat der Zerlegungsbaum.

Findet jeweils für die Startzahlen 2 bis 13 alle möglichen Zerlegungsbäume. Findet also alle Zerlegungsbäume mit der Startzahl 2, alle mit der Startzahl 3, und so weiter.

Tragt in die Tabelle ein, wie viele Zerlegungsbäume jede Startzahl hat.

Stimmt ihr Pikos Vermutung zu oder nicht? Begründet.

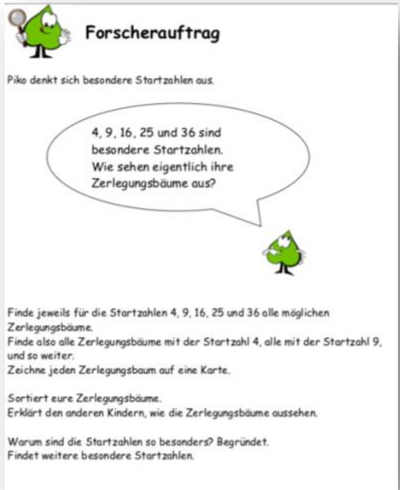
FA2: Je größer die Startzahl, desto größer der Zerlegungsbaum?

Die Tippkarten und Folgeaufträge zielen wieder auf die Thematisierung von Primzahlen ab und können hier im Rahmen von Festigung der Fachsprache zentraler Bestandteil des Forscherauftrags werden.

Insgesamt wird hier deutlich, dass die Forscheraufträge zu diesem Format (Zerlegungsbäume) den Schülerinnen und Schülern viele (inhaltliche) Übungsanlässe ermöglichen, dabei außerdem viel über Strukturen von Zahlen erfahren werden kann und zudem die Möglichkeit gegeben wird, prozessbezogenen Kompetenzen zu erweitern.

Forscherauftrag 3

Im 3. Forscherauftrag werden die Zerlegungsbäume von 2er Potenzen in den Blick genommen. Neben der Tatsache, dass bei 2er Potenzen die Endzahlen immer 2 sind (Primfaktorzerlegung besteht nur aus zweien), ist zu entdecken, dass die Zerlegungsbäume der kleineren 2er Potenzen immer in den Zerlegungsbäumen größerer 2er Potenzen wiederzufinden sind.


Forscherauftrag

Piko denkt sich besondere Startzahlen aus.

4, 9, 16, 25 und 36 sind besondere Startzahlen. Wie sehen eigentlich ihre Zerlegungsbäume aus?

Finde jeweils für die Startzahlen 4, 9, 16, 25 und 36 alle möglichen Zerlegungsbäume.
Finde also alle Zerlegungsbäume mit der Startzahl 4, alle mit der Startzahl 9, und so weiter.
Zeichne jeden Zerlegungsbaum auf eine Karte.

Sortiert eure Zerlegungsbäume.
Erklärt den anderen Kindern, wie die Zerlegungsbäume aussehen.

Warum sind die Startzahlen so besonders? Begründet.
Findet weitere besondere Startzahlen.

FA3: Zerlegungsbäume mit besonderen Startzahlen?


Forscherauftrag

Piko hat einen leeren Zerlegungsbaum gezeichnet:

Wie kann ich schnell und einfach passende Zahlen für den Zerlegungsbaum finden?

Finde möglichst **viele verschiedene Startzahlen** für den leeren Zerlegungsbaum.
Achte darauf, dass die Zahlen zum Zerlegungsbaum passen.
Benutze die Karten mit den leeren Zerlegungsbäumen.

Wie gehst du vor? Erkläre dein Vorgehen einem anderen Kind.

Vergleicht eure Zerlegungsbäume miteinander.
Zeigt den anderen Kindern, wie man schnell und einfach passende Startzahlen finden kann.

FA4: Start und Zerlegungszahlen zu leeren Zerlegungsbäumen finden

Forscherauftrag 4

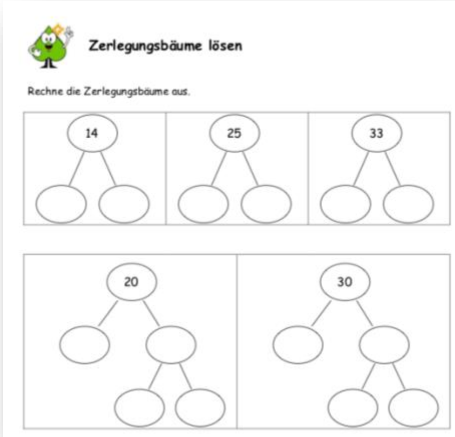
Um verschiedene Startzahlen zu produzieren, können Zerlegungsbäume durch Auswahl verschiedener Endzahlen (Primfaktorzerlegungen) entstehen, die dann von unten nach oben miteinander multipliziert werden. Da die Primfaktorzerlegung jeder Zahl bis auf die Anordnung der Primfaktoren (Endzahlen) eindeutig ist, entstehen so immer neue Startzahlen. Auch die Umkehrbarkeit der Division (und Multiplikation) kann hier in den Fokus genommen werden. Außerdem kommt die Strategie des Rückwärtsarbeiten, die auch in anderen Kontexten wieder aufgegriffen werden kann zum Einsatz.

Zerlegungsbäume lösen und sichern

Die folgenden Übungen ermöglichen den Lernenden zunehmend mehr Routine und Sicherheit bei der multiplikativen Zerlegung natürlicher Zahlen zu entwickeln. Dazu werden unstrukturierte Übungsaufgaben und strukturierte Übungsaufgaben (dabei stehen die Aufgaben in einem übergeordneten Zusammenhang) eingesetzt. Dem Wortspeicher kommt in dieser Phase des Unterrichts weiterhin eine zentrale Bedeutung zu. Hier kann über korrektives Feedback immer wieder auch deutlich gemacht werden, dass gemeinsame Fachsprache verbindlich von Lehrkräften sowie Schülerinnen und Schülern einzusetzen ist. Insbesondere beim Beschreiben und Begründen stellt die Fachsprache ein wesentliches Mittel für eine präzise und verständliche Kommunikation dar.

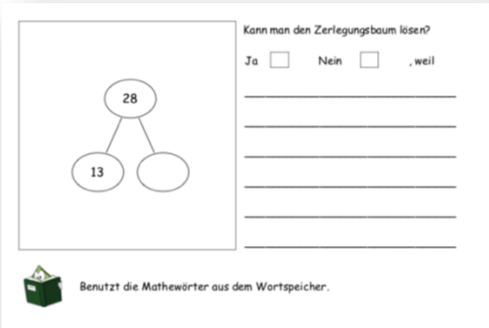
Unstrukturierte Übungen:

Bei unstrukturierten Übungen sind im Gegensatz zu strukturierten Übungen die Aufgaben nicht durch einen übergeordneten Strukturzusammenhang aufeinander bezogen. Unstrukturierte Übungen sind insbesondere dann einsetzbar, wenn es zunächst darum geht ein Aufgabenformat kennenzulernen und erste Erfahrungen damit zu sammeln.

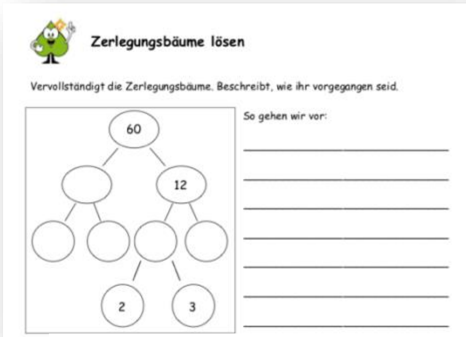


AB1: Zerlegungsbäume mit vorgegebenen Startzahlen

Neben dem Üben inhaltlicher Fähigkeiten steht der Wortspeicher beim Austausch über Lösungen, Vorgehensweisen immer im Fokus und kann an dieser Stelle durchaus auch durch weitere Begriffe und Satzphrasen ergänzt (siehe Beispiel)werden. Insbesondere Beschreibungen von Vorgehensweisen oder Begründungen fordern die oben bereits beschriebenen prozessbezogenen Kompetenzen heraus und erfordern das Anwenden einer entsprechenden Fachsprache.



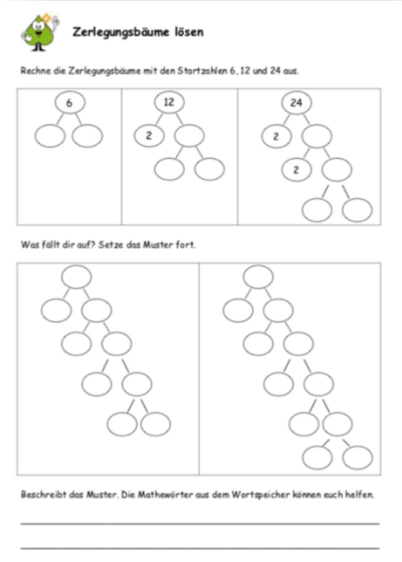
AB2: Lösbare und nicht lösbare Zerlegungsbäume



AB3: Zerlegungsbäume vervollständigen

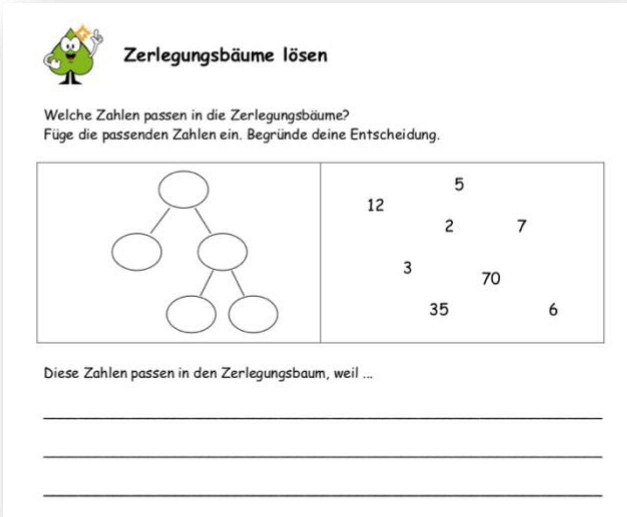
Strukturierte Übungen:

Auch bei den strukturierten Übungen werden inhalts- sowie prozessbezogene Kompetenzen gefördert. Mit Impulsen, die dazu anregen die Strukturen der Zerlegungsbäume in den Blick zu nehmen, werden Strukturen deutlich, die auf alle Zerlegungsbäume anwendbar und zum Lösen der Aufgaben notwendig sind. Zum anschließenden Beschreiben und Begründen der entdeckten Muster stellt der Wortspeicher wieder ein bedeutendes Mittel zum gemeinsamen Kommunizieren und verständlichen Darstellen von Strukturen in Zerlegungsbäumen dar.



AB4: Muster in Zerlegungsbäumen entdecken und beschreiben.

Während bei AB 4 das Beschreiben von Entdeckungen im Vordergrund steht (Was fällt dir auf?), geht es bei AB 5 unter anderem auch um das Begründen, beispielsweise, wie und warum die Startzahl sofort ermittelt werden kann (die größte Zahl muss die Startzahl sein) oder welche Zahlen die Endzahlen sind (Endzahlen sind immer Primzahlen).



AB5: Leere Zerlegungsbäume mit vorgegebenen Zahlen füllen.

Abschlussstandortbestimmung

Die bereits zu Beginn des Unterrichtsvorhabens eingesetzte Eigenproduktion, die zu Beginn Aufschluss darüber geben konnte, auf welchem Lernstand sich die Kinder befinden, kann nun zum Abschluss ein weiteres Mal eingesetzt werden. Durch die Offenheit bietet sie den Schülerinnen und Schülern nun die Möglichkeiten ihre erweiterten Kompetenzen zur Bearbeitung der Aufgabe zu nutzen und zu zeigen. Dadurch, dass die Aufgabe sich mit der Aufgabe der Eingangsstandortbestimmung deckt, können Lehrkräfte wie auch Schülerinnen und Schüler einen direkten Einblick in die erweiterten Kompetenzen erhalten.


Zerlegungsbäume sichern

Erfinde eigene Zerlegungsbäume. Male wie Piko.

Erkläre einem anderen Kind, wie du in einem Zerlegungsbaum rechnen musst.

Zerlegungsbäume erfinden und beschreiben - Teil 2

Folgende und ähnliche Fragen können dabei helfen sich über Fähigkeiten einzelner Schülerinnen und Schüler klar zu werden:

Inwieweit kann eine Schülerin / ein Schüler...

- Zerlegungsbäume zu beliebigen Zahlen erstellen?
- beschreiben, wie beim Erstellen eines Zerlegungsbaums vorzugehen ist?
- verstehen und/ oder beschreiben was ein Teiler/ eine Primzahl ist?
- Fachsprache zum Beschreiben und Begründen von mathematischen Sachverhalten zu Zerlegungsbäumen adäquat einsetzen?
- Strukturen von Zerlegungsbäumen zum lösen von unvollständigen Zerlegungsbäumen (und anderen problemhaltigen Formaten) nutzen?