



**Basisinformation:
Zerlegungsbäume –
Ein grundlegendes und variationsreiches Aufgabenformat**

Division – Ein grundlegender Inhalt

Sowohl im täglichen Leben als auch während der gesamten Schullaufbahn spielt die Division eine fundamentale Rolle. Die Kinder *begegnen* der Division bereits vor dem Schuleintritt, indem sie beispielsweise Bonbons gleichmäßig auf Tüten aufteilen oder Freunde in gleich große Mannschaften verteilen. Diese Grundvorstellungen – also das Aufteilen und Verteilen – werden später in der Grundschule *wiederaufgegriffen*, um die Division als fortgesetzte Subtraktion und als Umkehroperation der Multiplikation zu abstrahieren. Dabei erarbeiten die Kinder eine ganze Reihe neuer Fachbegriffe, wie zum Beispiel „Dividend“, „Divisor“ und „Quotient“, aber ebenso „Teiler“ und „Koteiler“. Auf dieser Grundlage können die Kinder in der Sekundarstufe I ihr Divisionsverständnis *vertiefen*. Dort lernen sie nun Teiler als multiplikative Bausteine natürlicher Zahlen kennen und bestimmen sie auf systematischer Weise. Hierzu wenden sie auch Teilbarkeitsregeln an. Dabei stoßen sie auf Zahlen, die sich nicht „teilen“ lassen – den sogenannten „Primzahlen“. Sie sind die kleinsten multiplikativen Bausteine der natürlichen Zahlen. Selbstverständlich geht die Vertiefung der Division im weiteren Verlauf der Sekundarstufe I noch weiter. Zum Beispiel brauchen die Kinder beim Kürzen einer Bruchzahl wieder ihre Kenntnisse über Teiler. Genauer gesagt suchen sie nach dem größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner eines Bruches. Man kann also bei der Division durchaus von einem **grundlegenden Inhalt** sprechen, mit dem sich die Kinder über mehrere Schuljahre hinweg auf einem immer höher werdenden Niveau auseinandersetzen. In dieser Zeit kommen die Schülerinnen und Schüler mit einer Vielzahl an Fachbegriffen in Kontakt, die zueinander in Beziehung stehen. Jedoch wird die Vernetzung der Begriffe kaum nachzuvollziehen sein, wenn man viele isolierte, beziehungslose Rechenaufgaben bearbeitet. Stattdessen wird die Vernetzung insbesondere durch den Einsatz **grundlegender Aufgabenformate** vorangetrieben. Diese Aufgabenformate können von Schuljahr zu Schuljahr flexibel eingesetzt werden, indem man ihre Aufgabenstellungen auf vielfältige Weisen variiert. Dadurch leisten sie einen Beitrag zu einem kontinuierlichen Aufbau inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen. Im Rahmen der Division sind die **Zerlegungsbäume** ein grundlegendes Aufgabenformat.

Zerlegungsbäume – Ein grundlegendes Aufgabenformat

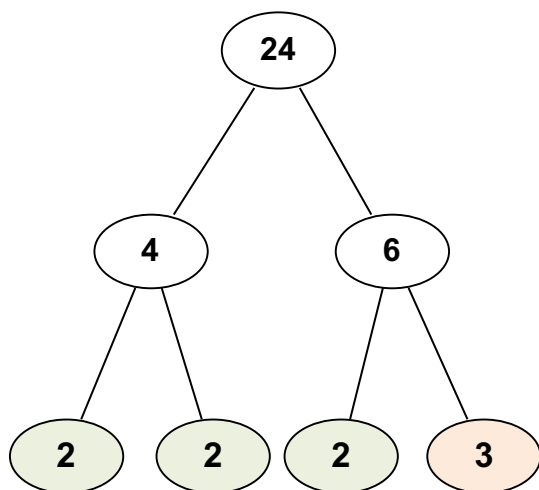
Der Aufbau dieses Aufgabenformats beruht immer auf demselben Prinzip und ist für Kinder relativ leicht nachvollziehbar. So beginnen Zerlegungsbäume stets mit einer **Startzahl**. Ausgehend von dieser Startzahl wachsen sie sozusagen von oben nach unten. Das Wachstum soll anhand der Startzahl 24 beispielhaft demonstriert werden: Zunächst wird die Startzahl 24 multiplikativ in die Faktoren 4 und 6 zerlegt. Man nennt die beiden Faktoren auch **Zerlegungszahlen**, die sich auf der **ersten Stufe** des Zerlegungsbaums befinden. Die Zerlegungszahlen 4 und 6 werden dann jeweils wiederum in zwei Faktoren zerlegt – nämlich in die Faktoren 2 und 2 (denn $4 = 2 \cdot 2$) sowie 2 und 3 (denn $6 = 2 \cdot 3$). Somit hat man es mit Zerlegungszahlen auf der **zweiten Stufe** des Zerlegungsbaums zu tun. Diese Faktoren können nun nicht mehr zer-

legt werden, sodass man insgesamt einen zweistufigen Zerlegungsbaum erhält. Aber wann hören Zerlegungsbäume generell auf zu wachsen? Das ist genau dann der Fall, wenn man auf Zerlegungszahlen stößt, die sich nicht mehr multiplikativ zerlegen lassen. Man spricht in diesem Zusammenhang von **Primzahlen**. Sie sind die kleinsten multiplikativen Bausteine natürlicher Zahlen und lassen sich nur durch 1 sowie durch sich selbst teilen. Damit Zerlegungsbäume nicht unaufhörlich wachsen, werden diese *trivialen Teiler* einfach weggelassen.

Startzahl

Zerlegungszahlen auf der 1. Stufe

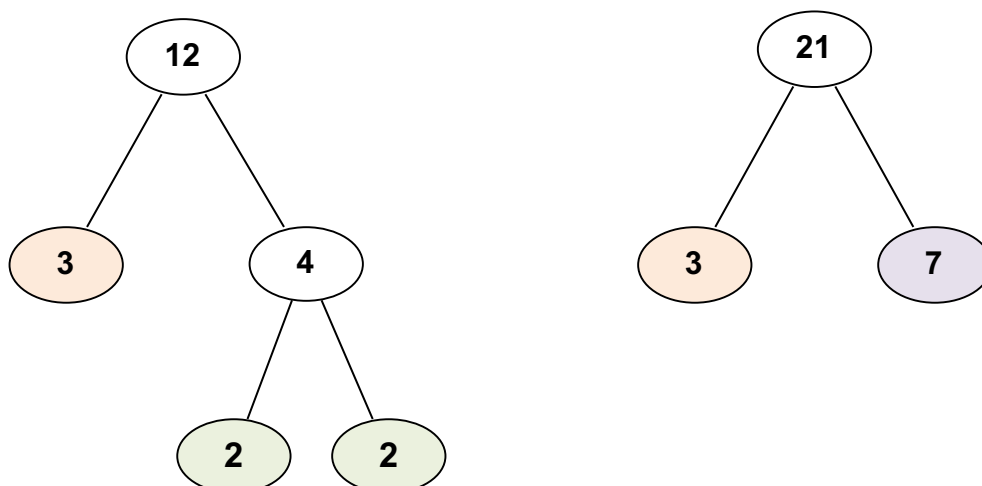
Zerlegungszahlen auf der 2. Stufe



Teiler:
multiplikative Bausteine der natürlichen Zahl

Primzahlen:
kleinste multiplikative Bausteine der natürlichen Zahl

Natürlich wären auch andere Zerlegungen zur Startzahl 24 denkbar, wie zum Beispiel 2 und 12 oder 3 und 8. Infolgedessen würde der Zerlegungsbaum sein Aussehen verändern. Zudem könnte man aufgrund des Kommutativgesetzes der Multiplikation die Zerlegungszahlen auf jeder Stufe des Baums vertauschen, wodurch es ebenfalls zu einer Veränderung seines Aussehens käme. Demzufolge kann es für ein und dieselbe Startzahl verschiedene Zerlegungsbäume geben. Das bedeutet allerdings noch nicht, dass die Anzahl und Komplexität der Zerlegungsbäume mit der Größe ihrer Startzahlen steigt.



Obwohl die Startzahl 21 größer als die Startzahl 12 ist, hat der rechte Zerlegungsbaum nur eine Stufe. Darüber hinaus gibt es zur Startzahl 21 ohnehin weniger multiplikative Zerlegungen. Sie lässt sich nämlich nur in die Primfaktoren 3 und 7 zerlegen, die wiederum nicht mehr zerlegbar sind. Das bedeutet, dass es zur Startzahl 21



weniger Zerlegungsbäume gibt. Es existieren sogar Startzahlen, aus denen überhaupt kein Zerlegungsbaum wachsen kann. Diese Situation tritt beispielsweise bei der Startzahl 23 auf, weil sie selbst eine Primzahl ist, die sich nicht zerlegen lässt.

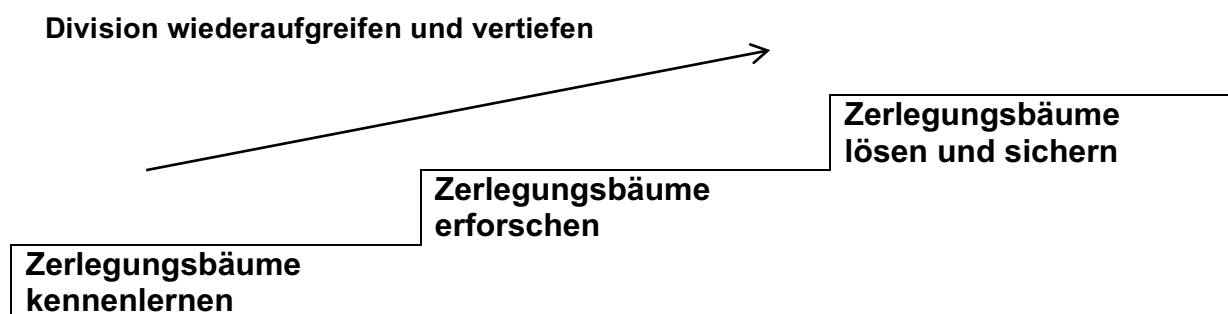
Wir können also die wichtigsten Eigenschaften eines Zerlegungsbaums folgendermaßen zusammenfassen:

1. Sowohl die Zerlegungszahlen als auch die Startzahl selbst sind Teiler bzw. multiplikative Bausteine der Startzahl.
2. Der Zerlegungsbaum endet mit Primzahlen, die sich nicht weiter multiplikativ zerlegen lassen und somit die kleinsten multiplikativen Bausteine der Startzahl sind.
3. Die Primzahlen des Zerlegungsbaums stellen in ihrer Gesamtheit die Primfaktorzerlegung der Startzahl dar. Wenn man sie nämlich alle miteinander multipliziert, dann erhält man wieder die Startzahl.

Sämtliche Eigenschaften sowie weitere Muster und Strukturen können die Kinder entdecken, beschreiben und begründen. Man sollte ihnen nur die Chance dazu geben, indem man sie mit **variationsreichen Aufgabenstellungen** herausfordert und fachsprachlichen Hilfestellungen unterstützt. Ganz konkrete Umsetzungsmöglichkeiten erhalten Sie im Unterrichtsmaterial von Haus 2 auf der PIKAS-Website unter <http://pikas.dzlm.de/412>.

Zerlegungsbäume – Ein variationsreiches Aufgabenformat

Das Aufgabenformat lässt sich im Mathematikunterricht flexibel einsetzen. Zum einen kann es an die unterschiedlichen individuellen Bedürfnisse, die innerhalb ein und derselben Lerngruppe vorherrschen, angepasst werden. Eine solche Anpassung beschränkt sich nicht nur auf die Auswahl unterschiedlich großer Startzahlen zum Ausrechnen der entsprechenden Zerlegungsbäume. Vielmehr können eine ganze Reihe von Forscheraufträgen und Übungsaufgaben gestellt werden, bei denen die Schülerinnen und Schüler das Bearbeitungsniveau selbst steuern können. Zum anderen ist das Aufgabenformat über viele Schuljahre hinweg einsetzbar, denn die Begriffe rund um die Division spielen weit über die Grundschule hinaus eine zentrale Rolle. Mithilfe der Zerlegungsbäume können schon die Grundschul Kinder ein erstes Verständnis zu multiplikativen Zerlegungen und Teilern entwickeln. Später kann dieses Verständnis in der Sekundarstufe I wiederaufgegriffen und vertieft werden. Die Kinder arbeiten dann mit einem Aufgabenformat, das ihnen bereits aus der Grundschule bekannt ist. Dieser Wiedererkennungswert erleichtert das Lernen auf höherem Niveau. Allerdings lässt sich nicht mit Bestimmtheit sagen, ob alle Kinder nach dem Übergang von der Grundschule in die Sekundarstufe I die Zerlegungsbäume kennen bzw. wiedererkennen. Aus diesem Grund sollte man bei der unterrichtlichen Behandlung der Zerlegungsbäume darauf achten, dass niveauangemessen folgender Dreischritt eingehalten wird:



Zunächst sollte eine Situation geschaffen werden, in der die Kinder das Aufgabenformat entweder kennenlernen oder aber wiedererkennen können. Hierzu eignet sich der Einsatz eines Regelplakats, aus dem die Schülerinnen und Schüler das Konstruktionsprinzip von Zerlegungsbäumen entnehmen können. Auch ein unfertiger Wortspeicher, der im Verlauf der Unterrichtsreihe nach und nach erweitert wird, kann als fachsprachliche Stütze fungieren. Des Weiteren sollten die Kinder bereits in dieser Phase einfache Zerlegungsbäume mit vorgegebenen Startzahlen ausrechnen, um ihre Erfahrungswerte hinsichtlich des multiplikativen Zerlegens von natürlichen Zahlen zu diagnostizieren. Jedoch reicht das Ausrechnen von einfachen Zerlegungsbäumen nicht aus, um das Divisionsverständnis wiederaufzugreifen und zu vertiefen. Deshalb sollten in einem weiteren Schritt herausfordernde Aufgabenstellungen angeboten werden, die inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen gleichermaßen fordern und fördern. Im Rahmen der Zerlegungsbäume gibt es eine Vielzahl solcher Aufgabenstellungen. Wir bezeichnen sie auch als Forscheraufträge. Im Anschluss daran bietet sich noch ein letzter Schritt an – und zwar das Lösen und Sichern von Zerlegungsbäumen. In dieser Phase bearbeiten die Lernenden sowohl strukturierte als auch unstrukturierte Übungsaufgaben zu Zerlegungsbäumen, damit sie eine gewisse Routine und Sicherheit bei der multiplikativen Zerlegung natürlicher Zahlen gewinnen. Später rundet eine abschließende Standortbestimmung die gesamte Auseinandersetzung mit dem Aufgabenformat ab.

Im Unterrichtsmaterial von Haus 2 finden Sie diese und auch weitere Vorschläge zum Kennenlernen, Erforschen, Lösen und Sichern von Zerlegungsbäumen. Sie erhalten das Unterrichtsmaterial unter <http://pikas.dzlm.de/412>.

