



## Sachinformation Haus 2.3:

### Mathematikunterricht kontinuierlich von Klasse 1-6

**Langfristiger Kompetenzaufbau über die Grundschulzeit hinweg aufgezeigt an der fundamentalen Idee „Symmetrie“**

#### Worum geht es?

Fundamentale Ideen sollen zu einem besseren Verständnis der Mathematik und der realen Welt beitragen und über die Fach- und Jahrgangsgrenzen hinaus im Mathematikunterricht kontinuierlich Beachtung finden. Sie sind „Ideen, die starke Bezüge der Wirklichkeit haben, verschiedene Aspekte und Zugänge aufweisen, sich durch hohen inneren Beziehungsreichtum auszeichnen und in den folgenden Schuljahren immer weiter ausbauen lassen.“ (Winter, 1976, S. 15). Folglich sollte sich die Auswahl, Strukturierung und Akzentuierung mathematischer Lerninhalte an diesen Grundsätzen orientieren. Bei Lehrerinnen und Lehrern soll Bewusstheit darüber geschaffen werden, was für den Mathematikunterricht als wesentlich und zentral anzusehen ist, damit die fundamentalen Ideen bei der Unterrichtsplanung stärker in den Fokus genommen und kontinuierlich im Verlauf der gesamten Schulzeit berücksichtigt werden. (vgl. Winter, 2001, S.1). Zu den fundamentalen Ideen in der Grundschule zählen nach Winter:

- Stellenwertdarstellung von Zahlen
- Symmetrie
- Algorithmus
- Messung
- Näherung
- Funktion
- Teil-Ganzes-Relation

Im vorliegenden Modul wird die Bedeutung der **Symmetrie** als **fundamentale Idee** des Mathematikunterrichts in der Grundschule und darüber hinaus untersucht.

#### Symmetrie als fundamentale Idee

Das Wort „Symmetrie“ stammt aus dem Altgriechischen und kann mit „Ebenmaß / Gleichmaß“ übersetzt werden. Symmetrie zeigt sich „in der Wiederholung von Gleichartigem“ und ist eine über die geometrischen Erscheinungen hinaus umfassende Idee. „Überall, wo Muster zu erkennen sind oder erkennbar gemacht werden können, liegt ein Symmetriephänomen vor.“ (Winter, 2001, S. 2) Symmetrie lässt sich überall entdecken und fasziniert die Menschheit von Alters her. Symmetrische Phänomene begegnen uns in vielen Lebensbereichen wie z.B. in Natur, Kunst, Technik oder Musik. Es lassen sich räumliche und zeitliche Muster (Tag und Nacht, Jahreszeiten) sowie auditive und motorische Muster



erkennen. Im Mathematikunterricht beschränkt sich die Auseinandersetzung mit Symmetrie häufig auf die Geometrie. Doch auch die Welt der Zahlen ist geprägt von Mustern und Strukturen; Symmetrien können zur Lösung problemhaltiger Aufgabenstellungen genutzt werden (siehe hierzu auch die Vorschläge im Unterrichtsmaterial). Ein solches „verallgemeinertes“ Symmetrieverständnis spiegelt sich in den folgenden drei Aspekten wider:

### 1. Ausgewogenheit

Hierunter sind das **Prinzip des Gleichgewichts** (im physikalischen Sinn z.B. Balance des Menschen beim Gehen oder eines Vogels beim Fliegen sowie im übertragenen Sinne z.B. Ausgeglichenheit des physischen Zustands eines Menschen oder der Argumente beim Gespräch), das **Prinzip der Gleichberechtigung** (z.B. von Gruppierungen, Geschlechterverteilung in Politik und Wirtschaft) und das **Prinzip von Harmonie, Ebenmaß, Vollkommenheit und Schönheit** (z.B. in Kunst und Architektur) zu verstehen.

### 2. Optimalität

Symmetrische Zustände sind optimal z.B. in Bezug auf die Funktionalität von Gegenständen und Formen in der Technik sowie bei Konstruktionen beispielsweise die paarige Formung von Werkzeugen (z.B. Zangen).

### 3. Regelmäßigkeit

Symmetrie im Sinne von Regelmäßigkeiten durch Wiederholung lässt sich in Ornamenten und Parkettierungen oder beim Takt der Musik und im Wechsel der Jahreszeiten erkennen. Regelmäßigkeiten in Bezug auf Gesetzmäßigkeiten finden sich z.B. bei Kommutativgesetz von Verknüpfungen.

(vgl. Graumann 2010, S. 12/13)

## Konsequenzen für den Unterricht

Die Schule muss Lernsituationen schaffen, in denen Schülerinnen und Schüler diesen allgemeinen und auf viele Aspekte des täglichen Lebens übertragbaren Begriff der Symmetrie entwickeln. Schon in der Grundschule muss nach „Sinn und Bedeutung der Symmetrie“ (Winter, 2001, S.6) gefragt werden. Gegenstände des Alltags müssen auf interessante Fragestellungen hin untersucht werden: Warum sind Lebewesen symmetrisch? Warum sind die meisten technischen Objekte (Autos, Züge, Flugzeuge) symmetrisch? Es sollte keine Beschränkung der unterrichtlichen Untersuchungen auf „Achsensymmetrie“ bzw. den Bereich Geometrie vorgenommen werden. Allgemeine Aspekte müssen kontinuierlich Beachtung finden; fächerübergreifende Bezüge können dabei genutzt werden (vgl. Lorenz, S. 128). Symmetrie sollte als durchgängiges Prinzip innerhalb einer Jahrgangsstufe (horizontal) und in unterschiedlichen Jahrgangsstufen (vertikal) Beachtung finden, damit die Schülerinnen und Schüler erfahren, warum es sich lohnt, Symmetriekenntnisse zu erwerben. Im Mathematikunterricht können Symmetrien als **kreatives Mittel** (z.B. Erfinden von Mustern in Parkettierungen und Ornamenten) oder als **Ordnungsmerkmal** (Sortieren von Buchstaben und Ziffern nach Symmetrieeigenschaften) thematisiert werden. Als **Nebeneffekt** trifft man z.B. auf symmetrische Phänomene in Baumdiagrammen oder dem

Pascal'schen Dreieck. Besonders lohnenswert sind mathematische Lernsituationen, in denen die Symmetrie als **Anlass für Problemstellungen** (Warum ist das Ergebnis der Subtraktion von

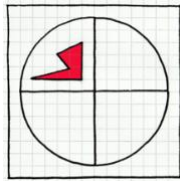
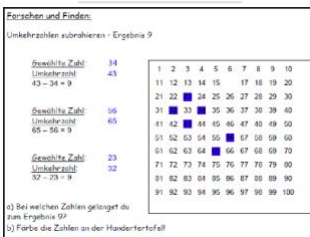
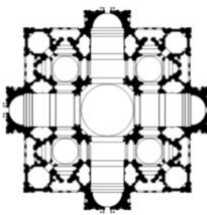



zwei zweistelligen Umkehrzahlen ein Vielfaches von 9?) oder als **Hilfe beim Problemlösen** („Beweisführung“ an der Hundertertafel, siehe dazu Tabelle 1 unten) wirksam wird. Tragfähige Grunderfahrungen, die bereits in der Grundschule gemacht werden können, legen die Basis für inner- und außermathematische Erfahrungen. Heitzer (Heitzer, 2010, S. 7) zählt dazu:

- **sich bewegen** (Gleichgewicht, symmetrische Körperformen bilden, symmetrische Bewegungsabläufe)
- **ertasten** (symmetrische Flächen und Körper)
- **hören** (harmonische Klänge, periodische und und symmetrische Melodien)
- **falten** (Klecksbilder, Origami, Faltschnitte)
- **spiegeln** (auch mehrfach und mit halbdurchsichtigen Spiegeln)
- **Dinge bewegen** (klappen, drehen, verschieben)
- **sortieren** (von Objekten nach Symmetrieeigenschaften)
- **erzeugen** symmetrischer Formen (Geobrett, Friese, Parkettierungen, ...)
- **Symmetriorgane einzeichnen** (Spiegelachse und –punkte, Drehzentren, Verschiebungspfeile)
- **Kongruenzabbildungen durchführen** (Papier und Bleistift, Zirkel und Lineal, ...)

In den folgenden Übersichten wird exemplarisch dargestellt, wie symmetrische Phänomene im Sinne der oberen beschriebenen Funktionen im Unterricht einer Jahrgangsstufe (horizontal) und über die Jahrgangs- und Schulstufen hinweg (vertikal) wirksam werden können.

### Jahrgang 3/4: (horizontal)

Raum und Form	Zahlen und Operationen	Umwelt / Technik
<p>Übertrage die Figur in dein Heft und spiegele Sie entlang der Achsen</p> 	<p>Forschen und Finden: Warum ist das Ergebnis 9?</p>  <p>4) Bei welchen Zahlen gelangst du zum Ergebnis 9? 5) Farbe die Zahlen an der Hundertertafel!</p>	<p>Bastel einen Papierflieger. Warum ist er symmetrisch? Was passiert mit einem Papierflieger, der nicht symmetrisch ist? Kann das günstig sein?</p>
<p>Architektur</p> <p>Die Peterskirche in Rom wurde in der Zeit von 1444 bis 1514 gebaut. Beschreibe den Umriss vergrößert in dein Heft.</p>  <p>Lorenz, Jens Holger: Mathematik 4, Braunschweig 2005, S. 89</p>	<p>Kunst</p> <p>Im Bild „Butterfly“ (No. 70) des Künstlers M.C. Escher kannst du mithilfe des gelben Schmetterlings Verschiebungen finden.</p> <p>(keine Rechte das Bild anzuzeigen)</p>	<p>Musik</p> <p>Dieses Lied hat der Komponist „Spiegellied“ genannt. Warum wohl?</p> 

## Symmetrien in Zahlenfeldern: (vertikal)

2.-3. Schuljahr	Zwanzigerfeld: - Die Hälfte färben - Symmetrien auf dem Zwanzigerfeld	Magische Quadrate: - 3x3-Zahlen
3. – 6. Schuljahr	Hundertertafel: - Die Hälfte färben - Symmetrien auf der Hundertertafel (Ausschnitte) - Symmetrie auf der Hundertertafel	Magische Quadrate: - Dürerquadrat - Symmetrien im Dürerquadrat
5.-7. Schuljahr	Tausenderbuch: - Die Hälfte färben - Symmetrien auf der Tausendertafel	Magische Quadrate: - Transfer auf magische Quadrate höherer Ordnung

### Literatur:

Winter, Heinrich: Was soll Geometrie in der Grundschule?, in: Zentralblatt der Didaktik der Mathematik, 1976, S. 14-18

Winter, Heinrich: Fundamentale Ideen in der Grundschule,  
<http://www.schulabakus.de/Wechselspiele/winter-ideen.html> (download 6.9.2011)

Graumann, Günter: Verallgemeinerte Geometrie, in: mathematik lehren, 161/2010S.12-15

Heitzer, Johanna: Symmetrie im Mathematikunterricht, in: mathematik lehren 161/2010, S. 4-11

Lorenz, Jens Holger: Symmetrie – Entwicklung einer Idee über dreizehn Schuljahre, in:

Schönbeck, Jürgen (ed.), Mosaiksteine moderner Schulmathematik. Werner Ast zum 65. Geburtstag. Heidelberg: Mattes Verlag (ISBN 978-3-86809-005-5/pbk). Schriftenreihe der Pädagogischen Hochschule Heidelberg 51, 127-136 (2008).

