



PIKAS

Prozessbezogene und Inhaltsbezogene Kompetenzen & Anregung von fachbezogener Schulentwicklung

Moderationspfad

Haus 2.1: Mathematikunterricht kontinuierlich von Klasse 1-6: Langfristiger Kompetenzaufbau über die Grundschulzeit hinweg aufgezeigt an der fundamentalen Idee Symmetrie

Dauer: ca. 3,5 h

Kürzungsmöglichkeiten werden am Ende dieses Dokuments aufgeführt

Zeit	Kommentar	Material
	<p><u>Begrüßung / Annäherung ans Thema</u></p> <p><u>Intention:</u> Sensibilisiert werden für die vielfältigen Erscheinungsformen symmetrischer Gegebenheiten</p> <p>M lädt die TN dazu ein, die Abbildung (<u>Folie 3</u>) mit der „Symmetriebrille“ zu betrachten. Anschließend fasst M die Äußerungen zusammen und weist evtl. auf noch nicht genannte Aspekte hin.</p> <p><i>Anmerkung: Im Bild sind über die Spiegelungen im Wasser Symmetrien zu erkennen. Auch das abgebildete Gebäude weist durch seine Architektur, das Muster in der Tür und am Dach achsensymmetrische Phänomene auf. Das im Wasser liegende Boot und die Wellenbewegungen können als Beispiel für Balance genannt werden. Insgesamt wirkt das Bild –nicht zuletzt durch die Symmetrien beruhigend und ästhetisch.</i></p> <p>M verknüpft die Aussagen mit dem Zitat von Weyl (<u>Folie 4</u>).</p>	<p>Laptop / Beamer</p> <p>Folie 3</p>

Phase 0:

Transparenz über Ziele und Verlauf der Fortbildung

Intention: Orientierung

M gibt Transparenz über den geplanten Verlauf und die daraus resultierenden Zielsetzungen der Fortbildung (Folien 5 und 6).

Anmerkung: Der Inhalt der Folien kann auch auf einen Flipchartbogen übertragen werden, so dass der Verlauf den TN während der Fortbildung präsent bleibt.

Folien 5 / 6



Aufbau des Fortbildungsmoduls 2.3

- 1. Begriffsklärung:** Symmetrie als „fundamentale Idee“
- 2. Bewusstmachung des Facettenreichtums:**
Symmetrien in unterschiedlichen Kontexten
- 3. Klärung des mathematischen Hintergrunds:**
 - Symmetrieeigenschaften: Um welche geht es?
 - Aktivität: Untersuchung ausgewählter Beispiele
- 4. Aspekte der „Verallgemeinerten Symmetrie“ kennen lernen:** Ausgewogenheit – Optimalität – Regelmäßigkeit
- 5. Über Konsequenzen für den Unterricht nachdenken:**
 - Wichtige Grunderfahrungen
 - Warum es sich lohnt, Symmetrien zu kennen

Juni 2012 © PIK AS (<http://www.pikas.dzmn.de>)



5



Aufbau des Fortbildungsmoduls 2.3

- 6. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an unterschiedlichen Unterrichtsinhalten in einer Jahrgangsstufe untersuchen:**
 - Horizontaler Schnitt: Inhalte aufgeführt am 3. und 4. Jahrgang
 - Aktivität: Zuordnung zu TOP 4 und/oder TOP 5
- 7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen untersuchen:**
 - Aktivität: Auseinandersetzung mit ausgewählten Aufgabenstellungen zur Symmetrie in Zahlenfeldern
 - Dokumentation aus den jeweiligen Unterrichtsdurchführungen
- 8. Abschluss und weitere Hinweise**

Juni 2012 © PIK AS (<http://www.pikas.dzmn.de>)



6

Phase 1:

Fundamentale Ideen im Mathematikunterricht

Intention: Fundamentale Ideen als wesentliche Merkmale des Mathematikunterrichts vergegenwärtigen und sensibilisiert werden für den Stellenwert der fundamentalen Idee „Symmetrie“.

M zeigt zunächst die Bedeutung fundamentaler Ideen für den MU anhand der Zitate von Heinrich Winter (Folien 7,8) auf und erläutert, dass die Definition (Folie 8, unten) als verbindlich für dieses Fortbildungsmodul angesehen wird. Daraus ergibt sich, dass im Folgenden weiter mit der Auflistung der fundamentalen Ideen nach Winter gearbeitet und die „Symmetrie“ genauer betrachtet wird (Folien 9 und 10).

Anmerkung: weitere Kategorisierungen findet man z.B. bei Wittmann (Grundideen) oder in den Bildungsstandards (Leitideen).

Mit den Zitaten auf Folie 11 leitet M über zum Facettenreichtum symmetrischer Erscheinungen.

Phase 2:

Facettenreichtum der Symmetrie

Intention: Bewusstmachung vielfältiger Erscheinungsformen der Symmetrie in unterschiedlichen mathematischen und außermathematischen Kontexten.

Für die Fortbildung werden auf den folgenden Folien Beispiele gezeigt aus: **Natur und Umwelt** (Schmetterling, Spiegelungen am Strand, Blüte, Seestern, Eisblume (Folie 12))

Folie 8



1. Begriffsklärung: Symmetrie als „fundamentale Idee“

Begriffsklärung (Heinrich Winter):

„Fundamentale Ideen lassen sich im Unterricht anhand unterschiedlicher mathematischer Fragestellungen und auf verschiedenen Niveaustufen immer wieder aufgreifen. Zugleich öffnen sie Übergänge zu angrenzenden Lernfeldern (...). Damit verknüpfen sie mathematische und außermathematische Phänomene in inhaltlich sinnvoller Weise.“

Fundamentale Ideen sind ...

„Ideen, die starke Bezüge der Wirklichkeit haben, verschiedene Aspekte und Zugänge aufweisen, sich durch hohen inneren Beziehungsreichtum auszeichnen und in den folgenden Schuljahren immer weiter ausbauen lassen.“

Winter, Heinrich: Fundamentale Ideen in der Grundschule: http://www.schulbibliothek.de/Wechselspiele/winter_ideen.html
Download vom 06.09.2011

Juni 2012 © PIK AS (<http://www.pikas.dzlm.de>)



8

Folie 11



1. Begriffsklärung: Symmetrie als „fundamentale Idee“

„Die Symmetrie ist eine weit zu fassende Idee, sie ist sozusagen kosmisches Prinzip“

„Überall, wo Muster erkennbar sind, liegt ein Symmetriephänomen vor.“

„Offenbar ist unser Wahrnehmen von Erscheinungen der Welt um uns stark geprägt von unserer Fähigkeit, sensorische Eindrücke in zu vergleichende Teile zu gliedern. Wahrnehmen ist Erkennen von gegliederten Gestalten, von Mustern.“

Winter, Heinrich: Fundamentale Ideen in der Grundschule: http://www.schulbibliothek.de/Wechselspiele/winter_ideen.html
Download vom 06.09.2011

Juni 2012 © PIK AS (<http://www.pikas.dzlm.de>)



Natur und Umwelt (Spielkarte, Wandmosaik, Hasenfenster in Paderborn, unterschiedliche Radfelgen) (Folie 13)
Architektur (Rom) (Folie 14)
Kunst M.C. Escher, Paul Klee (Folie 15)
Musik: Noten zu Bruder Jakob (Verschiebung) (Folie 16)
Mathematik: Oft wird bei Symmetrie nur an den Bereich Geometrie gedacht. Die aufgeführten Beispiele zeigen, dass Symmetrien auch in anderen Bereichen des MU wie z.B. in der Arithmetik und Kombinatorik eine Rolle spielen. (Folie 17)

Phase 3: Symmetrieeigenschaften: Um welche geht es?

Intention: Klärung des mathematischen Hintergrunds und Anwendung an zwei ausgewählten Abbildungen

Auf den folgenden Folien erläutert **M** den für die Grundschulmathematik relevanten fachwissenschaftlichen Hintergrund.

Die Gliederung erfolgt nach:

Grundtypen der Symmetrie

Kongruente Figuren

Kongruenzabbildungen in der Ebene

Verknüpfung von Kongruenzabbildungen

Folie 17

2. Bewusstmachung des Facettenreichtums: Symmetrien in unterschiedlichen Kontexten

Mathematik:

The grid contains four panels:

- Top-left: A colorful circular pattern with a central flower-like shape, representing symmetry in nature.
- Top-right: A grid of colored dots (red, green, blue) arranged in a pattern, with a list of numbers: $11 \times 11 = 121$, $111 \times 111 = 12321$, $1111 \times 1111 = 1234321$, ..., $111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$.
- Bottom-left: Three rows of colored bars representing multiplication: $6 = 3 + 3$, $8 = 4 + 4$, $7 = 3 + 4$, and $4 = 3$.
- Bottom-right: A Pascal's triangle with numbers: 1, 1 1, 1 2 1, 1 3 3 1, 1 4 6 4 1, 1 5 10 10 5 1, 1 6 15 20 15 6 1, 1 7 21 35 35 21 7 1.

Abbildungen obere Reihe: 1 und 2: Heinz Klaus Strick: Mathematik ist schön: Immerwährender Kalender, Leverkusen 2011; rechte Bilder erstellt durch studentische Hilfskraft
 Juni 2012 © PIK AS (<http://www.pikas.dzfm.de>)

Folie 18

3. Klärung des mathematischen Hintergrunds: Symmetrieeigenschaften

Grundtypen der Symmetrie

Kongruente Figuren

Kongruenzabbildungen in der Ebene

Verknüpfungen von Kongruenzabbildungen

Juni 2012 © PIK AS (<http://www.pikas.dzfm.de>)

Folie 19: Grundtypen sind Spiegelung, Drehung, Verschiebung (Translation)
Folie 20 und Folie 21: Beispiele für kongruente Figuren (achsen-, punkt und drehsymmetrisch)

Folie 22: Klärung: Kongruenzabbildung

Folien 23-25: Definitionen und Abbildungen zu Achsenspiegelung, Punktspiegelung, Drehung, Verschiebung, Schubspiegelung

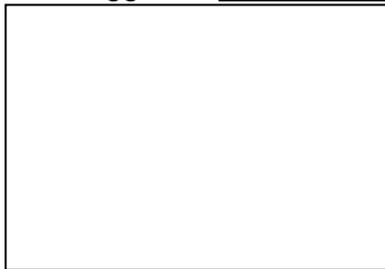
Folie 26 zeigt exemplarisch eine Verkettung von Kongruenzabbildungen

Anmerkung: Detailliertere Hinweise zum mathematischen Hintergrund befinden sich in der Sachinformation „Symmetrie“ (Fortbildungs- bzw. Informationsmaterial – Haus 2.3)

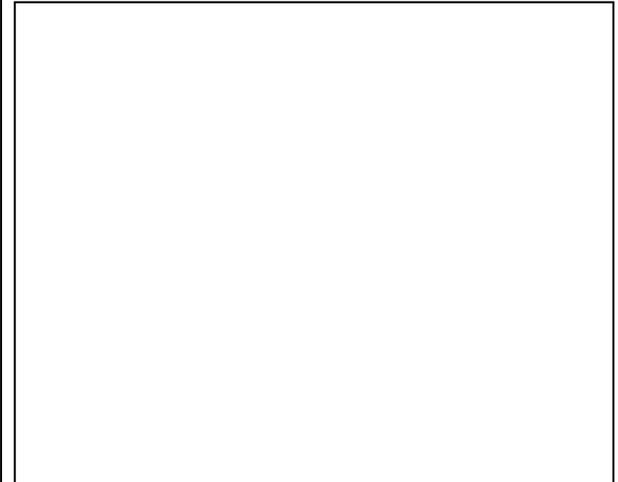
M erläutert die nächste Teilnehmeraktivität: Die Teilnehmer sollen die Bandornamente und/oder den Ausschnitt aus dem Bild „Schmetterlinge“ von M.C. Escher auf Symmetrieeigenschaften hin untersuchen. Dabei sollen Symmetrieachsen, Verschiebungspfeile oder Drehpunkte eingezeichnet werden. Mithilfe des kleinen ausgeschnittenen Schmetterlings können die Symmetrien konkret handelnd festgestellt werden.

Eine Übersicht der Folien 22-26 (TN-Material) sollte als Hilfe bereit liegen.

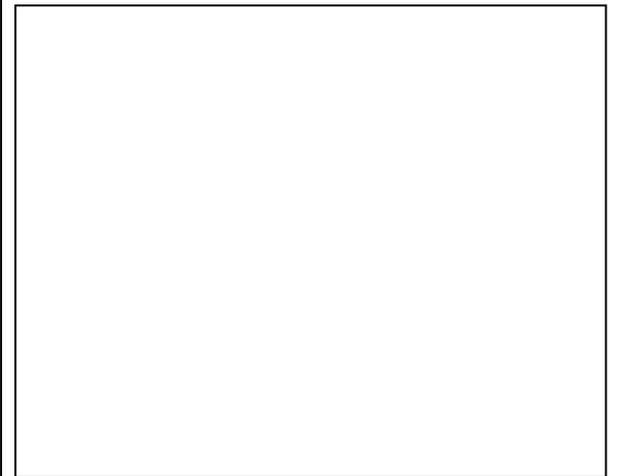
Im Anschluss koordiniert **M** den Austausch über die Entdeckungen der TN und blendet ggf. die Folien 28-30 ein.



Folie 27



Folien 28-30



Phase 4: Verallgemeinerte Symmetrie

Intention: Kennen lernen der drei Aspekte zur „Verallgemeinerten Symmetrie“

M erläutert zusammenfassend, dass Symmetrien in vielen Lebensbereichen eine besondere Rolle spielen. Die Thematisierung von Symmetrien in der Schule muss deshalb ein breiteres Verständnis ermöglichen. In diesem Zusammenhang nennt Graumann (2010, S.12) drei wesentliche Aspekte der sog. „verallgemeinerten Symmetrie“: (Folien 31-33)

1. Ausgewogenheit

Balance: (im physikalischen Sinn z.B. Balance des Menschen beim Gehen oder eines Vogels beim Fliegen sowie im übertragenen Sinne z.B.

Ausgeglichenheit des physischen Zustands eines Menschen oder der Argumente beim Gespräch)

Gleichberechtigung (z.B. von Gruppierungen, Geschlechterverteilung in Politik und Wirtschaft)

Harmonie, Ebenmaß, Vollkommenheit und Schönheit (z.B. in Kunst und Architektur)

2. Optimalität in Bezug auf die Funktionalität von Gegenständen und Formen in der Technik sowie bei Konstruktionen beispielsweise die paarige Formung von Werkzeugen (z.B. Zangen).

3. Regelmäßigkeit z.B. in Ornamenten und Parkettierungen oder beim Takt der Musik und im Wechsel der Jahreszeiten / Gesetzmäßigkeiten z.B. bei Kommutativgesetz von Verknüpfungen.

Phase 5: Konsequenzen für den Unterricht

Intention: Nachdenken über Konsequenzen für den Unterricht unter der Fragestellung, warum es sich lohnt, Symmetrien zu kennen

Folie 34



5. Über Konsequenzen für den Unterricht nachdenken

Wie kann Schule helfen,
dass Schüler diesen kraftvollen,
verallgemeinerten, übertragbaren Begriff
der Symmetrie entwickeln,
der sich als durchdringendes Konzept
in vielen Aspekten des Lebens,
der Natur und der Kunst wieder findet?

Lorenz, Jens Holger: Symmetrie – Entwicklung einer Idee über dreizehn Schuljahre,
in: Schönböck, Jürgen (ed.), Mosakleitner, moderner
Schulmathematik, Werner Aal zum 88. Geburtstag,
Heidelberg: Mattes Verlag (ISBN 978-3-86859-005-0/ink),
Schriftenreihe der Pädagogischen Hochschule Heidelberg 51, 127-138 (2008), S. 128

Juni 2012 © PIK AS (http://www.pikas.dtm.de)



34

Anhand des Zitats auf Folie 34 leitet **M** über zur Grundaussage bezogen auf die Konsequenzen für den Unterricht: Symmetrie muss als durchgängiges Prinzip für den Unterricht sowohl innerhalb der Jahrgangsstufen als auch über die Jahrgangsstufen hinweg Beachtung finden. (Folie 35)

Die Schülerinnen und Schüler sollten wichtige Grunderfahrungen machen können (Folie 37) und in den Lernsituationen erfahren, dass Symmetriekenntnisse vielfältig genutzt werden können (Folie 36).

Zu den Grunderfahrungen zählen:

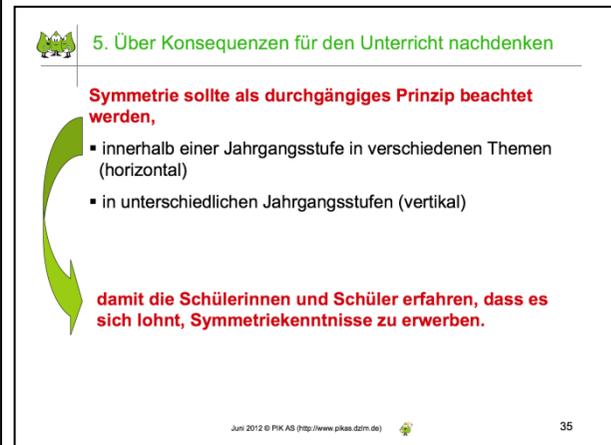
- **sich bewegen** (Gleichgewicht, symmetrische Körperformen bilden, symmetrische Bewegungsabläufe)
- **ertasten** (symmetrische Flächen und Körper)
- **hören** (harmonische Klänge, periodische und und symmetrische Melodien)
- **falten** (Klecksbilder, Origami, Faltschnitte)
- **spiegeln** (auch mehrfach und mit halbdurchsichtigen Spiegeln)
- **Dinge bewegen** (klappen, drehen, verschieben)
- **sortieren** (von Objekten nach Symmetrieeigenschaften)
- **erzeugen** symmetrischer Formen (Geobrett, Friese, Parkettierungen, ...)
- **Symmetrieorgane einzeichnen** (Spiegelachse und –punkte, Drehzentren, Verschiebungspfeile)
- **Kongruenzabbildungen durchführen** (Papier und Bleistift, Zirkel und Lineal, ...)

Symmetrien müssen erfahrbar werden als:

- kreatives Mittel (Hasenfenster in Paderborn)
- Ordnungsmerkmal (Anzahl der Symmetrieachsen in Buchstaben)
- Nebeneffekt (Muster in den Ergebnissen der Multiplikation zu 11×11 , ...)
- Anlass für Problemstellungen (Ist die Spielkarte symmetrisch?)
- Hilfe beim Problemlösen (Drehen der halbierten Spielkarte)

Mit der Fragestellung von Folie 38 (Welche Inhalte lassen sich im Laufe der Schulzeit behandeln, um diese Kernidee in ihrem Facettenreichtum entstehen und in ihrer Heuristik wirksam werden zu lassen?) leitet **M** über zu Phase 6.

Folie 35



5. Über Konsequenzen für den Unterricht nachdenken

Symmetrie sollte als durchgängiges Prinzip beachtet werden,

- innerhalb einer Jahrgangsstufe in verschiedenen Themen (horizontal)
- in unterschiedlichen Jahrgangsstufen (vertikal)

damit die Schülerinnen und Schüler erfahren, dass es sich lohnt, Symmetriekenntnisse zu erwerben.

Juni 2012 © PIK AS (<http://www.pikas.dtm.de>) 35

Folie 36



Phase 6: Horizontaler Schnitt: Inhalte beispielhaft aufgeführt am 3. und 4. Jahrgang

Intention: Symmetrie als durchgängiges Prinzip innerhalb einer Jahrgangsstufe erkennen und bezogen auf die Aspekte verallgemeinerter Symmetrie und auf mögliche Konsequenzen für den Unterricht hin untersuchen.

M stellt mit Folie 39 einen horizontalen Schnitt zu möglichen Inhalten des Mathematikunterrichts im Jahrgang 3 und 4, die den Facettenreichtum der fundamentalen Idee Symmetrie widerspiegeln, vor. Es handelt sich hierbei um Beispiele aus den Bereichen „Raum und Form“, „Zahlen und Operationen“ sowie Kontexte, die mit mathematischen Mitteln verdeutlicht werden können.

Diese Auflistung ist Grundlage für eine weitere Teilnehmeraktivität. Sie wird in zwei Varianten angeboten:

1. Die TN untersuchen die Beispiele bezogen auf die Aspekte „Verallgemeinerte Symmetrie“ und „Lohnenswertes Wissen über Symmetrie“.
2. Der Aspekt: „Verallgemeinerte Symmetrie“ wird ersetzt durch die Frage nach den „wichtigen Grunderfahrungen“.

Beide Aufträge befinden sich im Material für die TN. Die Folie mit dem Arbeitsauftrag muss entsprechend der Auswahl eingeblendet werden.

Im Anschluss moderiert **M** den Austausch und blendet ggf. zur Verdeutlichung die Folien 42-48 mit den einzelnen Beispielen ein.

Folie 39

Folie 43



6. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an unterschiedlichen Unterrichtsinhalten in einer Jahrgangsstufe

Horizontaler Schnitt 3./4. Schuljahr

MU: Zahlen und Operationen

Finden und Finden:
Umkehrzahlen subtrahieren - Ergebnis 9

Gewählte Zahl:	34
Umkehrzahl:	43
43 - 34 = 9	
Gewählte Zahl:	56
Umkehrzahl:	65
65 - 56 = 9	
Gewählte Zahl:	23
Umkehrzahl:	32
32 - 23 = 9	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	17	18	19	20	
21	22	24	25	26	27	28	29	30	
31	33	35	36	37	38	39	40		
41	42	44	45	46	47	48	49	50	
51	52	53	54	55	57	58	59	60	
61	62	63	64	66	67	68	69	70	
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

a) Bei welchen Zahlen gelangst du zum Ergebnis 9?
b) Färbe die Zahlen an der Hundertertafel!

43

Phase 7: Vertikaler Schnitt: Symmetrien in Zahlenfelder aufgezeigt an den Unterrichtsinhalten „Die Hälfte färben“ und „Vierersummen“

Intention: Ausgehend von Selbsterfahrungsprozessen zu den o.g. Unterrichtsinhalten Symmetrie als durchgängiges Prinzip am Beispiel von Mustern in Zahlenfeldern untersuchen und auf weitere Beispiele aus dem Kontext „Zahlenfelder“ übertragen.

Die Aufgabenstellung zum Unterrichtsinhalt „Die Hälfte färben“ wird am Zwanzigerfeld durchgeführt. Dazu bittet **M** die TN, sich mit der Aufgabenstellung von Folie 50 auseinander zu setzen und verteilt das entsprechende Schülerarbeitsblatt sowie leere Zwanzigerfelder und Buntstifte. In der sich anschließenden Austauschphase sollten geschickte Vorgehensweisen beschrieben (Nutzung von Symmetrien) und ggf. Musterbeschreibungen vorgestellt werden. Daran schließt sich die Vorstellung der Dokumente aus den Unterrichtsdurchführungen an. (51-66)

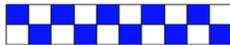
Folie 51 zeigt ausgewählte Muster der Kinder, die in Bezug zu den Ergebnissen der TN gesetzt werden können. Folie 52 zeigt die Ergebnisse der Kinder zu dem Auftrag, sog. „Musterpaare“ zu finden. Im UM gibt es dazu zwei unterschiedliche Aufträge. Die Kinder können ihre gefundenen Muster daraufhin untersuchen, ob Musterpaare vorhanden sind. Es ist auch möglich, zu einem vorgegebenen Muster den „Partner“ zu zeichnen. An diesen Beispielen kann diskutiert werden, welche Symmetrien die Kinder genutzt haben. Folie 53 und Folie 54 zeigen Beschreibungen zu Mustern. Im ersten Beispiel beschreibt das Kind anhand der Anzahlen der gefärbten Felder; in Beispiel 2 werden zu Beschreibung auch Zahleigenschaften (gerade/ungerade) benutzt.

Folie 50

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

Symmetrien in Zahlenfeldern
Beispiel 1: Die Hälfte färben

In diesem Zwanzigerfeld ist die Hälfte der Felder gefärbt.



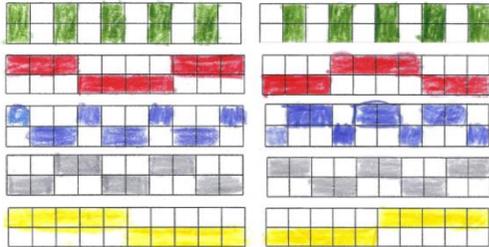
1. Machen Sie sich bitte mit der Aufgabenstellung vertraut, indem Sie in weiteren Zwanzigerfeldern die Hälfte färben. Dabei sollen schöne Muster entstehen.
2. Wie kann „geschickt“ vorgegangen werden?

Juni 2012 © PIK AS (<http://www.pikas.dzlm.de>) 51

Folie 52

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

Symmetrien in Zahlenfeldern
„Musterpaare“



Juni 2012 © PIK AS (<http://www.pikas.dzlm.de>) 52

In der Unterrichtsdurchführung wurde durch die Fragestellung, ob die Summe der Zahlen auf den gefärbten Feldern auch der Hälfte der Gesamtsumme entspricht, ein weiterer Bezug zur Arithmetik hergestellt. (Folie 55)
 Die Folien 56-58 zeigen dazu einige Schülerlösungen. Im ersten Dokument (Folie 56) werden allgemeine Aussagen über die Größe der Zahlen gemacht; in Dokument 2 (Folie 57) werden geometrische (spiegelverkehrt) und arithmetische (es wechseln die Zehner) Aussagen verknüpft. In Dokument 3 (Folie 58) wird die Beziehung zwischen den Zahlen (jeweils um 10 größer) genutzt, um den Unterschied in den Summen zu begründen.

M erläutert, dass die Problemstellung „Die Hälfte färben“ auf die Hundertertafel übertragen werden kann und dazu auch die Arbeitsaufträge und Problemstellungen kontinuierlich weiter verfolgt werden können. Exemplarisch zeigen die Folien 61-63 Musterpaare sowie die Folien 64-66 Musterbeschreibungen auf. Es wird deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler Symmetrien zur Problemlösung anwenden.

Folie 62

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

Symmetrien in Zahlenfeldern

1. Diese beiden Muster gehören zusammen. Erkläre, warum sie ein „Muster-Paar“ sind.

Das Muster wurde um 10 nach unten verschoben. Die Zahlen sind gleich.

Das Muster wurde um 10 nach unten verschoben. Die Zahlen sind gleich.

Jun 2012 © PIK AS (<http://www.pikas.dzlm.de>) 62

Folie 63

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

Symmetrien in Zahlenfeldern
 „Musterpaare“

Jun 2012 © PIK AS (<http://www.pikas.dzlm.de>) 63

Folie 55

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

Symmetrien in Zahlenfeldern
 Arithmetischer Bezug

Rechnen mit den Mustern am Zwanzigerfeld

Wenn du alle Zahlen im Zwanzigerfeld addierst, erhältst du als Ergebnis die Zahl 210.

Forscherfrage

Piko behauptet:

„Wenn ich die Zahlen in den gefärbten Feldern addiere, erhalte ich immer als Ergebnis die Hälfte von 210.“

Überprüfe Pikos Behauptung mit deinen gefundenen Mustern!

55

Folie 66

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

Symmetrien in Zahlenfeldern

Man kann die Zahlen in einem 5x5 Feld addieren und erhält ein Muster.

Die Muster können auch gefärbt werden. Man muss jedoch nur die Zahlen nach links oder rechts verschieben.

Die 50er-Felder kommen auch einzeln dran. Jedoch sind sie auch zum Muster.

66

Die TN-Aktivität für das zweite Unterrichtsbeispiel wird an 4x4-Ausschnitten auf der Hundertertafel durchgeführt.

M bittet die TN sich zunächst mit der Aufgabenstellung zu beschäftigen, Vierersummen in einem 4x4 Ausschnitt aus der Hundertertafel zu bilden. Dabei sollen Sie möglichst geschickt – also unter Nutzung von Symmetrien – gleiche Summen finden. Es geht nicht darum, alle Möglichkeiten zu berechnen. (Folie 67) Dazu erhalten die TN das AB mit den Arbeitsaufträgen und ein Proberblatt mit leeren 4x4-Tafeln.

Im 2. Schritt soll ein Austausch zu zweit stattfinden. Auf einem Blatt mit vergrößerten leeren 4x4-Feldern soll dann eine mögliche geschickte Abfolge eingezeichnet und kommentiert werden. So lassen sich ausgehend von einer Lösung durch Drehung oder Verschiebung weitere Lösungen finden. Dazu können z.B. die Spiegelachsen, Verschiebungspfeile oder Drehpunkte eingezeichnet werden. (Folien 68 und 69)

Im Anschluss können einige Abfolgen vorgestellt werden.

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

Symmetrien in Zahlenfeldern

68

Folie 68

Folie 67

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

Symmetrien in Zahlenfeldern
Beispiel 2: Vierersummen in Ausschnitten aus der Hundertertafel

15	16	17	18
25	26	27	28
35	36	37	38
45	46	47	48

Links sehen Sie ein Zahlenquadrat aus der Hundertertafel.
Addieren Sie die im unteren Quadrat markierten Zahlen.
Suchen sie -möglichst geschickt- weitere Kombinationen von vier Zahlen, die zu diesem Ergebnis passen.

67

Folie 69

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

Symmetrien in Zahlenfeldern

69

Für die unterrichtliche Umsetzung bieten sich im Sinne der Qualitätsmerkmale guter Aufgaben Variationen dieser Aufgabenstellung an. (Folie 70)

Mögliche Aufgabenvariationen:

- Transfer auf kleinere oder größere quadratische Ausschnitte
- Untersuchung von Zahlentafeln mit geraden oder ungeraden Anzahlen an Feldern
- Transfer auf Multiplikationstabellen
- Transfer auf rechteckige Ausschnitte

Die Dokumente aus dem Unterricht zeigen, dass auch diese Aufgabenstellung kontinuierlich im MU verfolgt werden kann. Die Folien 71-74 beziehen sich auf Vierersummen am Zwanzigerfeld.

Folie 71 zeigt zwei grundlegende Vorgehensweisen der Kinder: Ein gefundenes Muster wurde genutzt, um weitere Muster zu entwickeln (linke Spalte: Achsenspiegelung / rechte Spalte: systematische Verschiebungen einzelner Felder bei Beachtung der Symmetrie innerhalb des Musters). Zur Beschreibung des Musters werden die Summen in der oberen und unteren Reihe herangezogen bzw. gegensinnige Veränderungen beschrieben.

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

Mein erstes Muster:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Beschreibung: Ich hab mit roten immer gleich und da kam 42 raus

Mein zweites Muster:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Beschreibung: Es ergibt 42 weil $12+8=20$ $19+3=22$ $20+22=42$

Kannst du erklären, warum das Ergebnis bei beiden Mustern gleich ist?

Weil unten die Zahlen gleich geblieben sind und oben wurde es eine mehr und einer weniger

Folie 72

Folie 70

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

Symmetrien in Zahlenfeldern
Aufgabenvariationen

Ist die Größe des Quadrats von Bedeutung?

Wie unterscheiden sich Quadrate mit gerader Anzahl und mit ungerader Anzahl?

Lassen sich die Kombinationsmöglichkeiten aus der Hundertertafel auf Multiplikationstabellen übertragen?

Kann man auch Muster für vier Zahlen aus Rechtecken der Hundertertafel untersuchen?

Jun 2012 © PIK AS (http://www.pikas.dtm.de)

Folie 71

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

Symmetrien in Zahlenfeldern
Vierersummen am 20er-Feld

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Jun 2012 © PIK AS (http://www.pikas.dtm.de)

Im weiteren Verlauf stellt **M** die Dokumente zu den Vierersummen in 4x4-Ausschnitten auf der Hundertertafel vor (Folien 75-79). Auch in diesen Dokumenten wird deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler in ihren Beschreibungen geometrische und arithmetische Aspekte verknüpfen.

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

Symmetrien in Zahlenfeldern

Wir haben am Anfang zuerst einfache Zahlen aus dem Ausschnitt genommen und die zu einer bestimmten Summe (126)
Es ging einfacher, wenn man die Zahlen spiegelverkehrt genommen oder gedreht hat, z.B.

Jun 2012 © PIK AS (<http://www.pikas.dzlm.de>) 77

Folie 77

Die Aufgabenstellung kann ab Klasse 5 auf die gesamte Hundertertafel (Folien 80-82) sowie auf die Tausendertafel übertragen werden (Folien 80-83). Dazu wird die Problemstellung erweitert: die Schülerinnen und Schüler verbinden die vier gefärbten Felder und erhalten so Parallelogramme, deren Diagonalen sich z. B. in einem Zahlenfeld schneiden. Auch können die Parallelogramme auf der Tafel verschoben und die Auswirkungen thematisiert werden.

Anmerkung: Weitere Informationen dazu befinden sich im Lehrermaterial (UM) sowie im Informationsmaterial.

Folie 75

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

Symmetrien in Zahlenfeldern
Vierersummen in Ausschnitten aus der Hundertertafel

Jun 2012 © PIK AS (<http://www.pikas.dzlm.de>) 75

Folie 80

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

Symmetrien in Zahlenfeldern
Sekundarstufe I

Vierersummen auf der Hundertertafel

Piko hat in der Hundertertafel vier Felder gefärbt und addiert. Als Summe dieser vier Zahlen erhält er 100.

Forscherauftrag

1. Suche **geschickt** weitere Möglichkeiten, die Summe 100 mit vier Zahlen zu erreichen.
2. Zeichne die Möglichkeiten farbig an.
3. Vergleiche deine Ergebnisse mit einem Partner.

* Verbinde gleich gefärbte Zahlen mit Linien und beschreibe die Figuren.

Jun 2012 © PIK AS (<http://www.pikas.dzlm.de>) 80

