 PIKAS

**P**rozessbezogene und **I**nhaltsbezogene **K**ompetenzen & **A**nregung von fachbezogener **S**chulentwicklung

# Moderationspfad

Haus 2.1: Mathematikunterricht kontinuierlich von Klasse 1-6: Langfristiger Kompetenzaufbau über die Grundschulzeit hinweg aufgezeigt an der fundamentalen Idee Symmetrie

Dauer: ca. 3,5 h

Kürzungsmöglichkeiten werden am Ende dieses Dokuments aufgeführt

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zeit | Kommentar | **Material** |
| Folie 27 | **Begrüßung / Annäherung ans Thema**  Intention: Sensibilisiert werden für die vielfältigen Erscheinungsformen symmetrischer Gegebenheiten  **M** lädt die TN dazu ein, die Abbildung (Folie 3) mit der „Symmetriebrille“ zu betrachten. Anschließend fasst M die Äußerungen zusammen und weist evtl. auf noch nicht genannte Aspekte hin.  *Anmerkung: Im Bild sind über die Spiegelungen im Wasser Symmetrien zu erkennen. Auch das abgebildete Gebäude weist durch seine Architektur, das Muster in der Tür und am Dach achsensymmetrische Phänomene auf. Das im Wasser liegende Boot und die Wellenbewegungen können als Beispiel für Balance genannt werden. Insgesamt wirkt das Bild –nicht zuletzt durch die Symmetrien beruhigend und ästhetisch.*  **M** verknüpft die Aussagen mit dem Zitat von Weyl (Folie 4).  Folien 5 / 6  **Phase 0**:  **Transparenz über Ziele und Verlauf der Fortbildung**    Intention: Orientierung  **M** gibt Transparenz über den geplanten Verlauf und die daraus resultierenden Zielsetzungen der Fortbildung (Folien 5 und 6).  *Anmerkung****:*** *Der Inhalt der Folien kann auch auf einen Flipchartbogen übertragen werden, so dass der Verlauf den TN während der Fortbildung präsent bleibt.*    **Phase 1**:  Folie 8  **Fundamentale Ideen im Mathematikunterricht**    Intention: Fundamentale Ideen als wesentliche Merkmale des Mathematikunterrichts vergegenwärtigen und sensibilisiert werden für den Stellenwert der fundamentalen Idee „Symmetrie“.  **M** zeigt zunächst die Bedeutung fundamentaler Ideen für den MU anhand der Zitate von Heinrich Winter (Folien 7,8) auf und erläutert, dass die Definition (Folie 8, unten) als verbindlich für dieses Fortbildungsmodul angesehen wird. Daraus ergibt sich, dass im Folgenden weiter mit der Auflistung der fundamentalen Ideen nach Winter gearbeitet und die „Symmetrie“ genauer betrachtet wird (Folien 9 und 10).  *Anmerkung: weitere Kategorisierungen findet man z.B. bei Wittmann (Grundideen) oder in den Bildungsstandards (Leitideen).*  Folie 11  Mit den Zitaten auf Folie 11 leitet M über zum Facettenreichtum symmetrischer Erscheinungen.    **Phase 2:**  **Facettenreichtum der Symmetrie**  Intention: Bewusstmachung vielfältiger Erscheinungsformen der Symmetrie in unterschiedlichen mathematischen und außermathematischen Kontexten.  Für die Fortbildung werden auf den folgenden Folien Beispiele gezeigt aus:  **Natur und Umwelt** (Schmetterling, Spiegelungen am Strand, Blüte, Seestern, Eisblume (Folie 12)  **Natur und Umwelt** (Spielkarte, Wandmosaik, Hasenfenster in Paderborn, unterschiedliche Radfelgen) (Folie 13)  **Architektur** (Rom) (Folie 14)  Folie 17  **Kunst** M.C. Escher, Paul Klee (Folie 15)    **Musik:** Noten zu Bruder Jakob (Verschiebung) (Folie 16)  **Mathematik:** Oft wird bei Symmetrie nur an den Bereich Geometrie gedacht. Die aufgeführten Beispiele zeigen, dass Symmetrien auch in anderen Bereichen des MU wie z.B. in der Arithmetik und Kombinatorik eine Rolle spielen. (Folie 17)  Folie 18    **Phase 3:Symmetrieeigenschaften: Um welche geht es?**  Intention: Klärung des mathematischen Hintergrunds und Anwendung an zwei ausgewählten Abbildungen  Auf den folgenden Folien erläutert  **M** den für die Grundschulmathematik relevanten fachwissenschaftlichen Hintergrund.  Die Gliederung erfolgt nach:  Grundtypen der Symmetrie  Kongruente Figuren  Kongruenzabbildungen in der Ebene  Verknüpfung von Kongruenzabbildungen  Folie 27  Folie 19: Grundtypen sind Spiegelung, Drehung, Verschiebung (Translation)  Folie 20 und Folie 21: Beispiele für kongruente Figuren (achsen-, punkt und drehsymmetrisch)  Folie 22: Klärung: Kongruenzabbildung  Folien 23-25: Definitionen und Abbildungen zu Achsenspiegelung, Punktspiegelung, Drehung, Verschiebung, Schubspiegelung  Folie 26 zeigt exemplarisch eine Verkettung von Kongruenzabbildungen  *Anmerkung: Detailliertere Hinweise zum mathematischen Hintergrund befinden sich in der Sachinformation „Symmetrie“ (Fortbildungs- bzw. Informationsmaterial – Haus 2.3)*  **M** erläutert die nächste Teilnehmeraktivität: Die Teilnehmer sollen die Bandornamenten und/oder den Ausschnitt aus dem Bild „Schmetterlinge“ von M.C. Escher auf Symmetrieeigenschaften hin untersuchen. Dabei sollen Symmetrieachsen, Verschiebungspfeile oder Drehpunkte eingezeichnet werden. Mithilfe des kleinen ausgeschnittenen Schmetterlings können die Symmetrien konkret handelnd festgestellt werden.  Folien 28-30  Eine Übersicht der Folien 22-26 (TN-Material) sollte als Hilfe bereit liegen.  Im Anschluss koordiniert **M** den Austausch über die Entdeckungen der TN und blendet ggf. die Folien 28-30 ein.  **Phase 4: Verallgemeinerte Symmetrie**  Intention: Kennen lernen der drei Aspekte zur „Verallgemeinerten Symmetrie“  **M** erläutert zusammenfassend, dass Symmetrien in vielen Lebensbereichen eine besondere Rolle spielen. Die Thematisierung von Symmetrien in der Schule muss deshalb ein breiteres Verständnis ermöglichen. In diesem Zusammenhang nennt Graumann (2010, S.12) drei wesentliche Aspekte der sog. „verallgemeinerten Symmetrie“: (Folien 31-33)  **1. Ausgewogenheit**  Balance: (im physikalischen Sinn z.B. Balance des Menschen beim Gehen oder eines Vogels beim Fliegen sowie im übertragenen Sinne z.B. Ausgeglichenheit des physischen Zustands eines Menschen oder der Argumente beim Gespräch)  Gleichberechtigung (z.B. von Gruppierungen, Geschlechterverteilung in Politik und Wirtschaft)  Harmonie, Ebenmaß, Vollkommenheit und Schönheit (z.B. in Kunst und Architektur)  Folie 34  **2. Optimalität** in Bezug auf die Funktionalität von Gegenständen und Formen in der Technik sowie bei Konstruktionen beispielsweise die paarige Formung von Werkzeugen (z.B. Zangen).    **3. Regelmäßigkeit** z.B. in Ornamenten und Parkettierungen oder beim Takt der Musik und im Wechsel der Jahreszeiten / Gesetzmäßigkeiten z.B. bei Kommutativgesetz von Verknüpfungen.  **Phase 5: Konsequenzen für den Unterricht**  Intention: Nachdenken über Konsequenzen für den Unterricht unter der Fragestellung, warum es sich lohnt, Symmetrien zu kennen  Anhand des Zitats auf Folie 34 leitet **M** über zur Grundaussage bezogen auf die Konsequenzen für den Unterricht: Symmetrie muss als durchgängiges Prinzip für den Unterricht sowohl innerhalb der Jahrgangsstufen als auch über die Jahrgangsstufen hinweg Beachtung finden. (Folie 35)  Die Schülerinnen und Schüler sollten wichtige Grunderfahrungen machen können (Folie 37) und in den Lernsituationen erfahren, dass Symmetriekenntnisse vielfältig genutzt werden können (Folie 36).  Folie 35    Zu den Grunderfahrungen zählen:   * **sich bewegen** (Gleichgewicht, symmetrische Körperformen bilden, symmetrische Bewegungsabläufe) * **ertasten** (symmetrische Flächen und Körper) * **hören (**harmonische Klänge, periodische und und symmetrische Melodien) * **falten** (Klecksbilder, Origami, Faltschnitte) * **spiegeln** (auch mehrfach und mit halbdurchsichtigen Spiegeln) * **Dinge bewegen** (klappen, drehen, verschieben) * **sortieren** (von Objekten nach Symmetrieeigenschaften) * **erzeugen** symmetrischer Formen (Geobrett, Friese, Parkettierungen, ...) * **Symmetrieorgane einzeichnen** (Spiegelachse und –punkte, Drehzentren, Verschiebungspfeile)   Folie 36   * **Kongruenzabbildungen durchführen** (Papier und Bleistift, Zirkel und Lineal, ...)   Symmetrien müssen erfahrbar werden als:   * kreatives Mittel (Hasenfenster in Paderborn) * Ordnungsmerkmal (Anzahl der Symmetrieachsen in Buchstaben) * Nebeneffekt (Muster in den Ergebnissen der Multiplikation zu 11x11, ...) * Anlass für Problemstellungen (Ist die Spielkarte symmetrisch?) * Hilfe beim Problemlösen ( Drehen der halbierten Spielkarte)   Mit der Fragestellung von Folie 38 (Welche Inhalte lassen sich im Laufe der Schulzeit behandeln, um diese Kernidee in ihrem Facettenreichtum entstehen und in ihrer Heuristik wirksam werden zu lassen?) leitet **M** über zu Phase 6.  **Phase 6: Horizontaler Schnitt: Inhalte beispielhaft aufgeführt am 3. und 4. Jahrgang**  Folie 39  Intention: Symmetrie als durchgängiges Prinzip innerhalb einer Jahrgangsstufe erkennen und bezogen auf die Aspekte verallgemeinerter Symmetrie und auf mögliche Konsequenzen für den Unterricht hin untersuchen.  **M** stellt mit Folie 39 einen horizontalen Schnitt zu möglichen Inhalten des Mathematikunterrichts im Jahrgang 3 und 4, die den Facettenreichtum der fundamentalen Idee Symmetrie widerspiegeln, vor. Es handelt sich hierbei um Beispiele aus den Bereichen „Raum und Form“, „“Zahlen und Operationen“ sowie Kontexte, die mit mathematischen Mitteln verdeutlicht werden können.  Diese Auflistung ist Grundlage für eine weitere Teilnehmeraktivität. Sie wird in zwei Varianten angeboten:   1. Die TN untersuchen die Beispiele bezogen auf die Aspekte „Verallgemeinerte Symmetrie“ und „Lohnenswertes Wissen über Symmetrie“.   Folie 43     1. Der Aspekt: Verallgemeinerte Symmetrie“ wird ersetzt durch die Frage nach den „wichtigen Grunderfahrungen“.   Beide Aufträge befinden sich im Material für die TN. Die Folie mit dem Arbeitsauftrag muss entsprechend der Auswahl eingeblendet werden.  Im Anschluss moderiert **M** den Austausch und blendet ggf. zur Verdeutlichung die Folien 42-48 mit den einzelnen Beispielen ein.  **Phase 7: Vertikaler Schnitt: Symmetrien in Zahlenfelder aufgezeigt an den Unterrichtsinhalten „Die Hälfte färben“ und „Vierersummen“**  Folie 50    Intention: Ausgehend von Selbsterfahrungsprozessen zu den o.g. Unterrichtsinhalten Symmetrie als durchgängiges Prinzip am Beispiel von Mustern in Zahlenfeldern untersuchen und auf weitere Beispiele aus dem Kontext „Zahlenfelder“ übertragen.  Die Aufgabenstellung zum Unterrichtsinhalt „Die Hälfte färben“ wird am Zwanzigerfeld durchgeführt. Dazu bittet **M** die TN, sich mit der Aufgabenstellung von Folie 50 auseinander zu setzen und verteilt das entsprechende Schülerarbeitsblatt sowie leere Zwanzigerfelder und Buntstifte.  In der sich anschließenden Austauschphase sollten geschickte Vorgehensweisen beschrieben (Nutzung von Symmetrien) und ggf. Musterbeschreibungen vorgestellt werden.  Folie 52  Daran schließt sich die Vorstellung der Dokumente aus den Unterrichtsdurchführungen an. (51-66)    Folie 51 zeigt ausgewählte Muster der Kinder, die in Bezug zu den Ergebnissen der TN gesetzt werden können.  Folie 52 zeigt die Ergebnisse der Kinder zu dem Auftrag, sog. „Musterpaare“ zu finden. Im UM gibt es dazu zwei unterschiedliche Aufträge. Die Kinder können ihre gefundenen Muster daraufhin untersuchen, ob Musterpaare vorhanden sind. Es ist auch möglich, zu einem vorgegebenen Muster den „Partner“ zu zeichnen. An diesen Beispielen kann diskutiert werden, welche Symmetrien die Kinder genutzt haben.  Folie 53 und Folie 54 zeigen Beschreibungen zu Mustern. Im ersten Beispiel beschreibt das Kind anhand der Anzahlen der gefärbten Felder; in Beispiel 2 werden zu Beschreibung auch Zahleigenschaften (gerade/ungerade) benutzt.  In der Unterrichtsdurchführung wurde durch die Fragestellung, ob die Summe der Zahlen auf den gefärbten Feldern auch der Hälfte der Gesamtsumme entspricht, ein weiterer Bezug zur Arithmetik hergestellt. (Folie 55)  Die Folien 56-58 zeigen dazu einige Schülerlösungen. Im ersten Dokument (Folie 56) werden allgemeine Aussagen über die Größe der Zahlen gemacht; in Dokument 2 (Folie 57) werden geometrische (spiegelverkehrt) und arithmetische (es wechseln die Zehner) Aussagen verknüpft. In Dokument 3 (Folie 58) wird die Beziehung zwischen den Zahlen (jeweils um 10 größer) genutzt, um den Unterschied in den Summen zu begründen.  Folie 55    **M** erläutert, dass die Problemstellung „Die Hälfte färben“ auf die Hundertertafel übertragen werden kann und dazu auch die Arbeitsaufträge und Problemstellungen kontinuierlich weiter verfolgt werden können. Exemplarisch zeigen die Folien 61-63 Musterpaare sowie die Folien 64-66 Musterbeschreibungen auf. Es wird deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler Symmetrien zur Problemlösung anwenden.  Folie 62  Folie 63  Folie 66        Die TN-Aktivität für das zweite Unterrichtsbeispiel wird an 4x4-Ausschnitten auf der Hundertertafel durchgeführt.  **M** bittet die TN sich zunächst mit der Aufgabenstellung zu beschäftigen, Vierersummen in einem 4x4 Ausschnitt aus der Hundertertafel zu bilden. Dabei sollen Sie möglichst geschickt – also unter Nutzung von Symmetrien – gleiche Summen finden. Es geht nicht darum, alle Möglichkeiten zu berechnen. (Folie 67) Dazu erhalten die TN das AB mit den Arbeitsaufträgen und ein Probierblatt mit leeren 4x4-Tafeln.    Im 2. Schritt soll ein Austausch zu zweit stattfinden. Auf einem Blatt mit vergrößerten leeren 4x4-Feldern soll dann eine mögliche geschickte Abfolge eingezeichnet und kommentiert werden. So lassen sich ausgehend von einer Lösung durch Drehung oder Verschiebung weitere Lösungen finden. Dazu können z.B. die Spiegelachsen, Verschiebungspfeile oder Drehpunkte eingezeichnet werden. (Folien 68 und 69)  Folie 69  Im Anschluss können einige Abfolgen vorgestellt werden.      Folie 68  Folie 67  Für die unterrichtliche Umsetzung bieten sich im Sinne der Qualititätsmerkmale guter Aufgaben Variationen dieser Aufgabenstellung an. (Folie 70)  **Mögliche Aufgabenvariationen:**  Folie 70  Transfer auf kleinere oder größere quadratische Ausschnitte  Untersuchung von Zahlentafeln mit geraden oder ungeraden Anzahlen an Feldern    Transfer auf Multiplikationstafeln  Transfer auf rechteckige Ausschnitte  Die Dokumente aus dem Unterricht zeigen, dass auch diese Aufgabenstellung kontinuierlich im MU verfolgt werden kann. Die Folien 71-74 beziehen sich auf Vierersummen am Zwanzigerfeld.  Folie 71 zeigt zwei grundlegende Vorgehensweisen der Kinder: Ein gefundenes Muster wurde genutzt, um weitere Muster zu entwickeln (linke Spalte: Achsenspiegelung / rechte Spalte: systematische Verschiebungen einzelner Felder bei Beachtung der Symmetrie innerhalb des Musters).  Folie 71  Zur Beschreibung des Musters werden die Summen in der oberen und unteren Reihe herangezogen bzw. gegensinnige Veränderungen beschrieben.      Folie 72  Im weiteren Verlauf stellt **M** die Dokumente zu den Vierersummen in 4x4-Ausschnitten auf der Hundertertafel vor (Folien 75-79). Auch in diesen Dokumenten wird deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler in ihren Beschreibungen geometrische und arithmetische Aspekte verknüpfen.    Folie 80    Folie 77  Folie 75    Die Aufgabenstellung kann ab Klasse 5 auf die gesamte Hundertertafel (Folien 80-82) sowie auf die Tausendertafel übertragen werden (Folien 80-83). Dazu wird die Problemstellung erweitert: die Schülerinnen und Schüler verbinden die vier gefärbten Felder und erhalten so Parallelogramme, deren Diagonalen sich z. B. in einem Zahlenfeld schneiden. Auch können die Parallelogramme auf der Tafel verschoben und die Auswirkungen thematisiert werden.  *Anmerkung: Weitere Informationen dazu befinden sich im Lehrermaterial (UM) sowie im Informationsmaterial.*  Ergänzend zeigt **M** noch an den Themen „Magische Quadrate“ und „Teiler/Vielfache“ auf, wie das Thema „Symmetrien in Zahlenfeldern“ kontinuierlich über die Schuljahre in den Blick genommen werden kann.(Folien 84-87)  Folie 86    Durch den Überblick über die Schülerdokumente sollte deutlich geworden sein, dass es genügend Anlässe gibt, „mathematische Ideen nicht nur in ihrer symbolischen Form darzustellen, sondern ihren symmetrischen Gehalt sichtbar werden zu lassen.“ (Zitat Lorenz, Folie 88)  Dazu gibt die Folie 89 einen Überblick über das Unterrichtsmaterial sowie den Hinweis auf die weiteren Materialien zu Haus 2.3 (Folien 90-92)  *Anmerkung: Alle Arbeitsblätter und Hinweise zur Unterrichtsdurchführung befinden sich im Unterrichtsmaterial zu Haus 2.3.*  **Vorschläge zu möglichen Kürzungen:**  Annäherung ans Thema (Folien 2-4)  Teilnehmeraktivität zu den Symmetrieeigenschaften ( Folien 27-30)  Ausführungen zur verallgemeinerten Symmetrie (Folien 31-33 ) und entsprechende Teilnehmeraktivität (Folie 40)  Beschränkung auf ein Unterrichtsbeispiel  Ergänzende Hinweise zu weiteren Themen (Folien 84-87) | Laptop / Beamer  Folie 3  Folie 50 |