PIKAS
Prozessbezogene und **I**nhaltsbezogene **K**ompetenzen & **A**nregung von fachbezogener **S**chulentwicklung

Moderationspfad

Haus 2.1: Mathematikunterricht kontinuierlich von Klasse 1-6: Langfristiger Kompetenzaufbau über die Grundschulzeit hinweg aufgezeigt an ausgewählten Unterrichtsbeispielen
Dauer: ca. 3 Zeitstunden einschl. Pause
Kürzungsmöglichkeiten: Phase 2 (ca. 25 Minuten) oder Phasen 4 und 5 (ca. 60 Minuten) auslassen

<table>
<tr><th>Zeit</th><th>Kommentar</th><th>Material</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td>

Phase 0:

Begrüßung / Transparenz über Ziele und Verlauf der Fortbildung

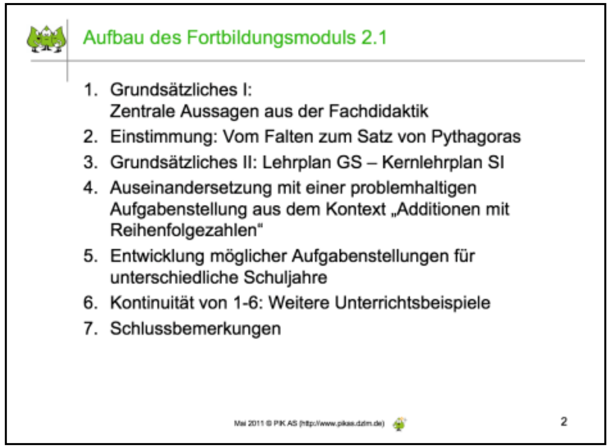
Intention: Orientierung

M gibt Transparenz über den geplanten Verlauf und die daraus resultierenden Zielsetzungen der Fortbildung (Folie 2).

Anmerkung: *Der Inhalt der Folie kann auch auf einen Flipchartbogen übertragen werden, so dass der Verlauf den TN während der Fortbildung präsent bleibt.*

</td>
<td>

Laptop / Beamer
Evtl. Flipchartbögen
Folie 2



</td>
</tr>
</table>

<u>Phase 1</u>:

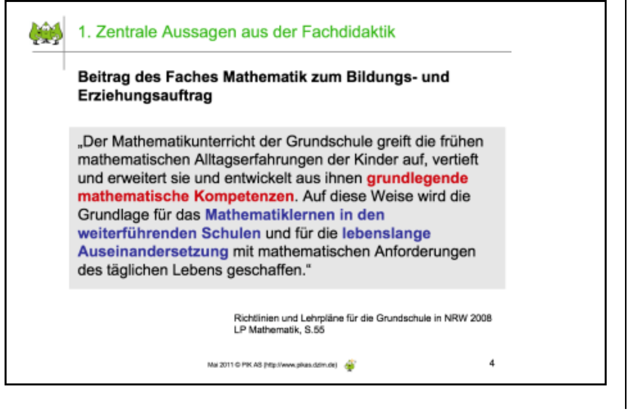
<u>Grundsätzliches I: Zentrale Aussagen aus der Fachdidaktik</u>

<u>Intention:</u> Bedeutung von Mustern und Strukturen als fachliches Grundkonzept für die Kompetenzentwicklung innerhalb einzelner Schuljahre als auch schuljahresübergreifend erkennen

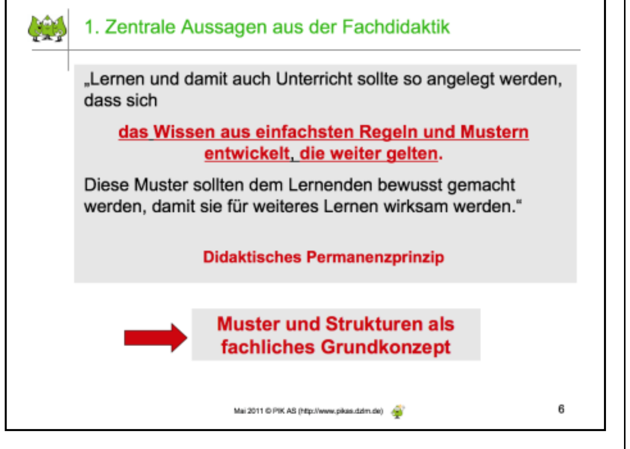
Anhand des Lehrplanauszugs <u>Folie 4</u> hebt **M** die Bedeutung des Mathematikunterrichts in der Grundschule für die Entwicklung grundlegender mathematischer Kompetenzen hervor. Damit wird deutlich, dass Kontinuität gewährleistet sein muss, und zwar innerhalb eines Schuljahres, einer Schulform und in der Zusammenarbeit mit sich anschließenden weiterführenden Schulen. Die Aussage kann auch als Argumentationshilfe dienen und der Argumentation: „In der weiterführenden Schule wird die Arbeit der Grundschullehrerinnen nicht fortgesetzt" entgegenwirken.

Ausgehend von dem bei Wittmann (Grundfragen) aufgeführten Prinzip der Fortsetzbarkeit und der Forderung, bei der Auswahl eines Themas einen Ausbau auf höherem Niveau in den Blick zu nehmen, leitet **M** zum fachlichen Grundkonzept „Muster und Strukturen" über. Dieses Konzept wird als Basis für eine kontinuierliche Kompetenzentwicklung innerhalb eines Schuljahres und über einzelne Schuljahre und Schulstufen hinaus hervorgehoben. Es gewährleistet eine Vernetzung von bisher Gelernten mit neuen Inhalten und Entdeckungen. Die Orientierung an immer wieder kehrenden Mustern und Strukturen fördert dabei die Entwicklung inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen (<u>Folien 5-8</u>).

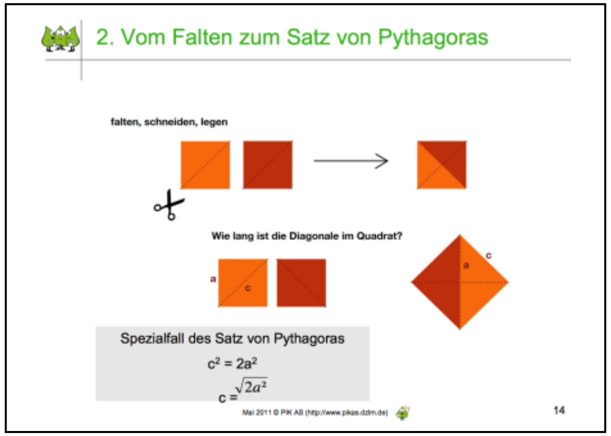
Folie 4



Folien 5, 7, 8: nicht abgebildet
Folie 6



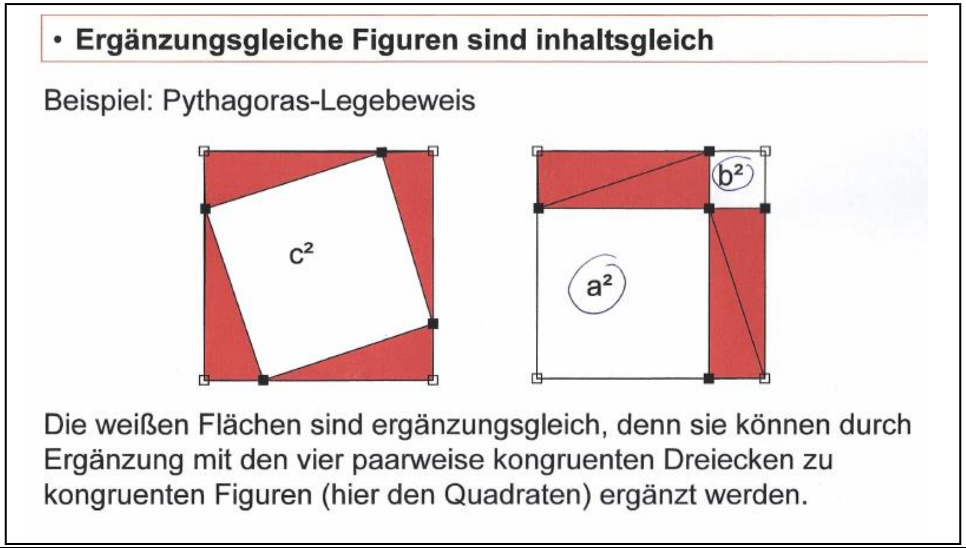
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<u>Phase 2</u>:
<u>Sensibilisierung für die Thematik durch eine angeleitete Handlungserfahrung: Vom Falten zum Satz von Pythagoras</u>
<u>Intention:</u> Sensibel werden für die Thematik und Erkennen des Zusammenhangs zwischen Falten und Schneiden von Quadraten als Inhalt des Mathematikunterrichts in der Schuleingangsphase und der Herleitung des Satz von Pythagoras in der Klasse 8.
M verteilt die Materialien an die TN und bittet sie, je ein farbiges Quadrat an der Diagonalen zu falten und zu schneiden. Danach sollen die TN aus den vier entstandenen kongruenten Dreiecken neue Figuren legen. (<u>Folie 11</u>, oberer Teil). Die TN beschreiben ihre Produkte; zur Visualisierung und Zusammenfassung wird der untere Teil der Folie eingeblendet.
An den folgenden beiden Folien erläutert M die „Wirkungen“ der zuvor durchgeführten Operation: Die Invarianz der Flächeninhalte wird aufgezeigt an zusammengesetzten Flächen aus Rechtecken bzw. Quadraten und Tangramfiguren (<u>Folie 12</u>). Die Anordnungen der regulären Vielecke (<u>Folie 13</u>) macht die 2. Wirkung deutlich: die sog. „Passung“ mit dem Blick auf die Winkel und Winkelsummen.
M nimmt Bezug auf die erste Handlungserfahrung und zeigt mithilfe der <u>Folie 14</u>, dass über die Zusammensetzung der 2 kleinen Quadrate zu einem doppelt so großen Quadrat und der Fragestellung: Wie lang ist die Diagonale im Quadrat? (oberer Teil der Folie), ein Spezialfall des Satz von Pythagoras hergeleitet werden kann. (<u>Folie 14</u>, unten).
</td>
<td>
Faltpapier (quadratisch und rechteckig, je zwei Farben), Scheren
Folien 9, 10, 12,13: nicht abgebildet
Folie 11


Folie 14


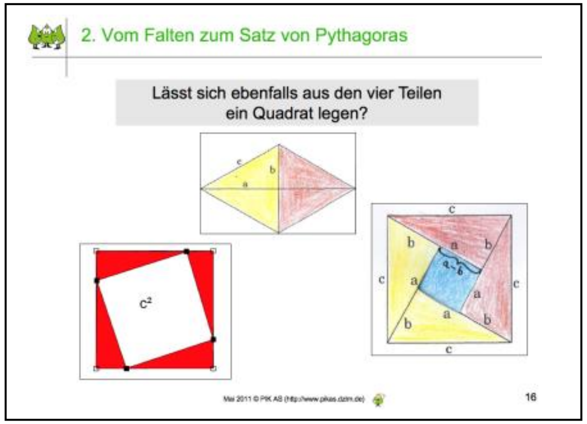
</td>
</tr>
</table>

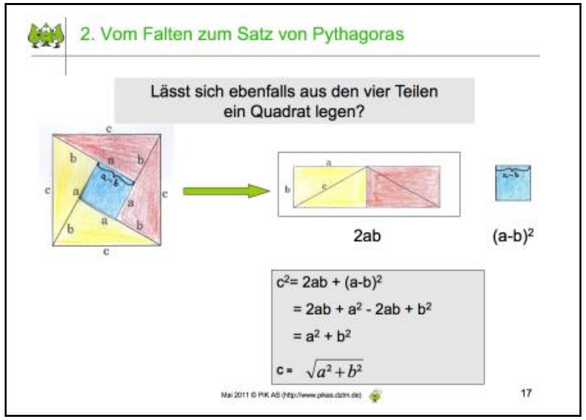
Folie 15 fordert die TN mit der Fragestellung „Wie lang ist die Diagonale im Rechteck“ auf, die zuvor nachvollzogene Herleitung zu übertragen. Dabei sollen zwei gleichgroße Rechtecke an ihrer Diagonale c zerschnitten werden und zu einem Quadrat mit der Seitenlänge „c“ zusammengesetzt werden. Den TN wird Zeit gegeben, aus den durch Schneiden an der Diagonalen entstandenen 4 kongruenten Dreiecken ein Quadrat zu legen. Die entstandenen Produkte werden beschrieben und in Bezug gesetzt zu den Abbildungen auf Folie 16: Es lassen sich eine Raute und zwei Quadrate mit einem quadratischen Loch legen.
Aus der Abbildung des Quadrates mit dem kleineren quadratischen Loch leitet **M** die Verbindung zum Satz von Pythagoras her (Folie 17).

Anmerkung: Das Quadrat mit dem größeren quadratischen Loch hat „c“ nicht als Seite; es liefert deshalb nicht den analogen Beweis. Der Legebeweis läuft über die „Ergänzungsgleichheit“.



Folie 15: nicht abgebildet
Folien 16, 17





<u>Phase 3. Grundsätzliches II: Zentrale Aussagen aus dem Lehrplan GS und den Kernlehrplänen SI</u>

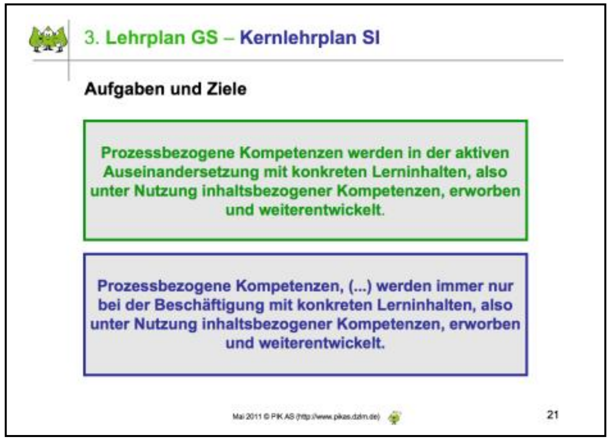
<u>Intention:</u> Relevante Aussagen aus dem Lehrplan Mathematik Grundschule und dem Kernlehrplan Mathematik Sekundarstufe I unter dem Aspekt der Kontinuität in Beziehung setzen und Gemeinsamkeiten bzw. Möglichkeiten zur Fortsetzung erkennen

M zeigt an den Auszügen aus dem LP Mathematik und den Kernlehrplänen auf, wie in den Lehrplänen die Fortsetzbarkeit von prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen verankert ist.
<u>Folie 19:</u>
MU als entdeckender Prozess (LP GS – KL SI)
<u>Folie 20:</u>
Konzentration auf zentrale Leitideen (LP GS – KL SI)
<u>Folie 21:</u>
Zusammenspiel von inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen (LP GS – KL SI)

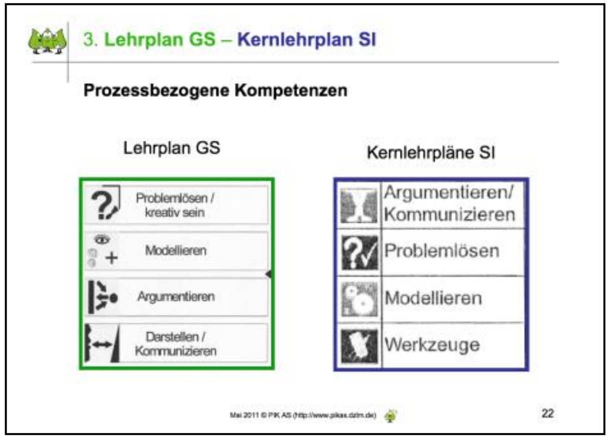
Prozessbezogene Kompetenzen (<u>Folie 22)</u> Übersicht
Anmerkung: Kernlehrplan S I: Werkzeuge (vgl. Kernlehrplan S. 15)
Medien und Werkzeuge verwenden

- *Einsatz klassischer mathematischer Werkzeuge und elektronischer Werkzeuge und Medien*
- *Verwendung von Lineal, Geodreieck und Zirkel*
- *Nutzung von Büchern und Internet; Dokumentation der Arbeitsschritte; Ergebnispräsentationen*
- *Taschenrechner, Geometriesoftware, Tabellenkalkulation*

Folien 18, 19, 20 nicht abgebildet
Folie 21



Folie 22

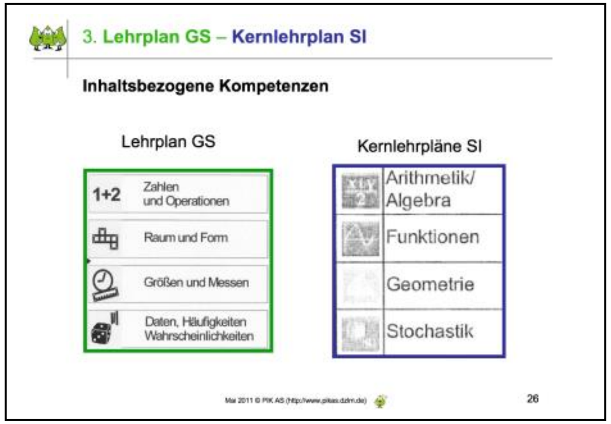


Beispiel: Problemlösen
Am Beispiel der prozessbezogenen Kompetenzerwartung „Problemlösen“ werden inhaltlich übereinstimmende Aussagen als Beispiel für Kontinuität vorgestellt.
Foile 23: Relevante Informationen entnehmen und wiedergeben
Folie 24: Systematisches Probieren – Problemlösestrategien
Folie 25: Plausibilitätsprüfung – Vergleichen und bewerten von Lösungswegen

Inhaltsbezogene Kompetenzen (Folie 26)
Beispiel: Zahlen und Operationen / Arithmetik-Algebra
Aussagen, die Fortsetzbarkeit deutlich machen zu:
Folie 27: Zahldarstellung
Folie 28: Repräsentationsebenen
Folie 29: Muster und Strukturen

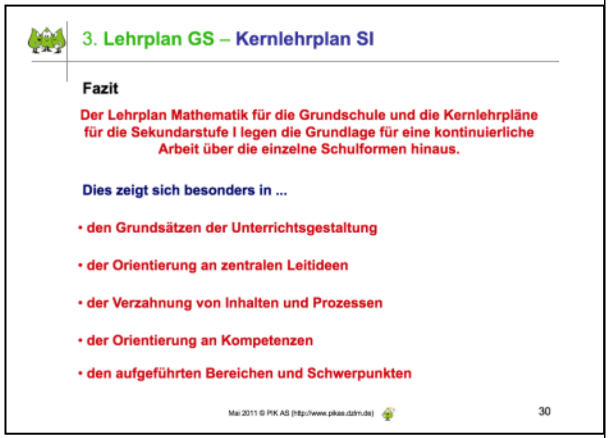
Mit Folie 30 fasst **M** die Aussagen zusammen und weist noch einmal explizit darauf hin, dass in den Vorgaben der Lehrpläne sowohl in den Grundsätzen der Unterrichtsgestaltung als auch in den Kompetenzerwartungen die Bedingungen für einen kontinuierlichen Mathematikunterricht gegeben sind.

Folien 23, 24, 25 nicht abgebildet
Folie 26



Folien 27, 28,29: nicht abgebildet

Folie 30



Phase 4:

Auseinandersetzung mit einer problemhaltigen Aufgabenstellung aus dem Kontext „Additionen mit Reihenfolgezahlen“

Intention: An einer herausfordernden Problemstellung selbst forschend tätig werden, Muster und Strukturen entdecken und beschreiben sowie in Mathe-konferenzen in einen sachbezogenen Austausch über Vorgehensweisen und Entdeckungen treten

M stellt zunächst die Problemstellung und ggf. Forscherhinweise (Forscherfragen/Tipps) vor (Folien 33/34). Anschließend werden die Hinweise zur Durchführung einer Mathekonferenz gegeben. **M** weist darauf hin, dass dieses Verfahren im Mathematikunterricht insbesondere zur Förderung der prozessbezogenen Kompetenz „Darstellen/Kommunizieren“ eingesetzt werden kann.

Hinweise zum Ablauf von Mathekonferenzen, weitere Materialien etc. sind zu finden unter: http://www.pikas.tu-dortmund.de/material-pik/herausfordernde-lernangebote/haus-8-unterrichts-material/mathe-konferenzen/mathe-konferenzen.html

Zu erwartende Hauptvorgehensweisen:

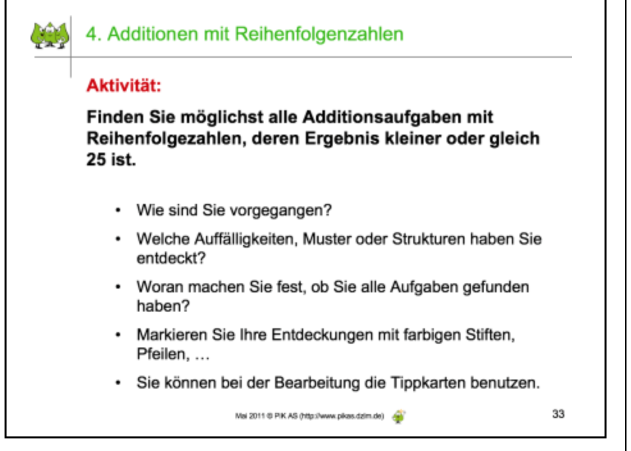
Fortlaufendes Verlängern: Beginnend mit der Aufgabe 1+2 wird fortlaufend um den nächsten Summanden verlängert: 1+2+3, 1+2+3+4 …
entsprechend 2+3, 2+3+4, … / 3+4, 3+4+5, …

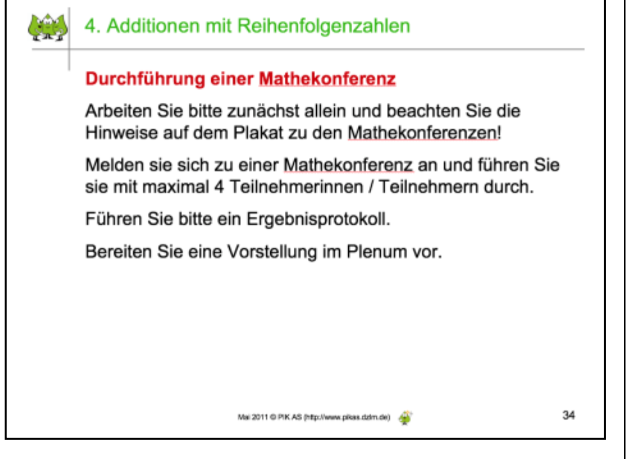
Orientierung an der Anzahl der Summanden:
Aufgaben mit 2 Summanden:1+2, 2+3, 3+4, …
Aufgaben mit 3 Summanden: 1+2+3, 2+3+4, …
usw.

Anmerkung: Detailliertere Hinweise zu den Vorgehensweisen befinden sich im Informationsmaterial zu Haus 2:

Arbeitsauftrag,
Anmeldeliste für Mathekonferenzen
Protokollbögen für die Mathe-Konferenzen, evtl. Tippkarten,
Aushang zum Ablauf von Mathekonferenzen

Folien 33, 34





Link zu: Schwätzer/ Selter: Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen

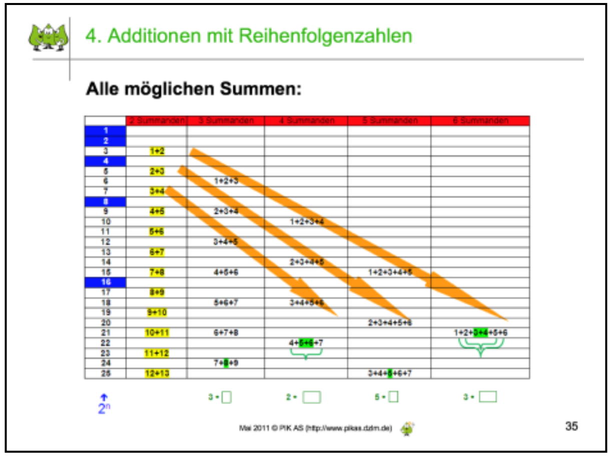
Mögliche Auffälligkeiten:

1. Die ungeraden Zahlen größer gleich 3 lassen sich als Summe zwei aufeinander folgender Zahlen erzeugen. Dabei wird –ausgehend von 1+2- jeder Summand jeweils um 1 erhöht (2. Spalte).
2. Nach dem Prinzip „Erhöhung der Summanden jeweils um 1“
   a. lassen sich alle durch drei teilbaren Zahlen größer gleich 6 als Summe drei aufeinander folgender Zahlen darstellen (3. Spalte).
   b. lässt sich beginnend mit 10 jede 4. Zahl ausdrücken (4. Spalte).
   c. gilt Entsprechendes ab 15 für jede 5. Zahl (5. Spalte), ab 21 für jede 6. Zahl (6. Spalte) usw.
3. Die Anzahl der Summanden kann gerade oder ungerade sein.
4. Die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, … (Zweierpotenzen) lassen sich nicht als Summe aufeinander folgender Zahlen darstellen.
5. Die Zahlen tauchen unterschiedlich oft als Summenwerte auf:
   a. Einmal: 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 19, 20, 22, 23, 24
   b. Zweimal: 9,18, 25
   c. Dreimal: 15, 21

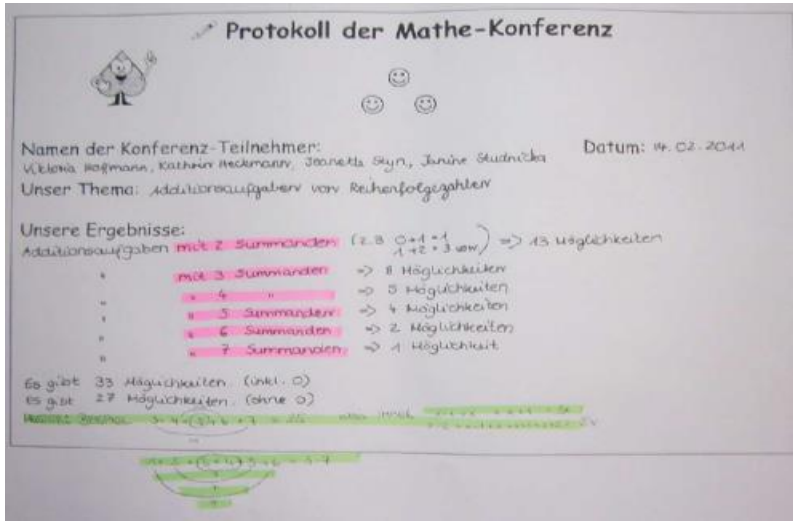
M moderiert den Austausch über die Ergebnisse der Mathekonferenzen. Unterstützend kann Folie 35 mit der Tabelle und allen möglichen Aufgaben zur vorgegebenen Problemstellung eingeblendet werden. An ihr kann **M** ggf. die beschriebenen Auffälligkeiten und gemachten Entdeckungen zusammenfassen und ergänzen.

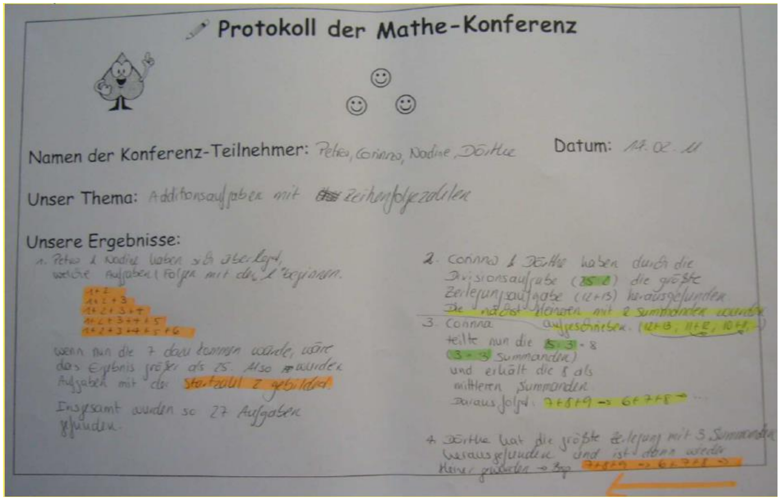
Anmerkung: Erklärungen zu den Auffälligkeiten sind in den Sachinformationen zu Reihenfolgezahlen zu finden.

Folie 35



Beispiele für Protokolle der Mathekonferenzen:





Phase 5:

Intention: Aus den Ergebnissen und Diskussionen aus Phase 4 Aufgabenstellungen für Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher Schuljahre (1-6) entwickeln.

Die TN finden sich in ihren Konferenzgruppen oder zu zweit zusammen und erarbeiten Aufgabenstellungen zum Problemkontext „Addition von Reihenfolgezahlen“ für unterschiedliche Schuljahre (Arbeitsauftrag Folie 37). Sie halten ihre Vorschläge auf freien DIN A4-Blättern fest (1 Vorschlag pro Blatt) oder auf Flipchartbögen gesammelt fest.
Anmerkung: Hinweise zu möglichen Aufgabenstellungen sind in den Sachinfos zu Reihenfolgezahlen sowie im Unterrichtsmaterial zu finden.

M moderiert den Austausch über die Vorschläge. Methodisch bieten sich als Möglichkeiten an:
1. Eine Gruppe stellt ihre Vorschläge vor: Die DIN A 4-Blätter werden auf dem Boden oder an der Tafel/Magnetwand gesammelt. Weitere Gruppen ergänzen und / oder stellen weitere Aufgaben vor.
2. Methode Museumsgang: Die Ergebnisse auf den Flipchartbögen werden im Raum verteilt aufgehängt Die TN finden sich in neuen Gruppen zusammen, so dass in jeder Gruppe jeweils ein Mitglied der bisherigen Gruppenaufteilung vertreten ist. Beim Rundgang geben die jeweiligen Experten Erläuterungen zu den Vorschlägen ab.

Im Anschluss an den Austausch zeigt **M** Schülerdokumente aus unterschiedlichen Schuljahren und weist auf das Unterrichtsmaterial zu Haus 2 hin.

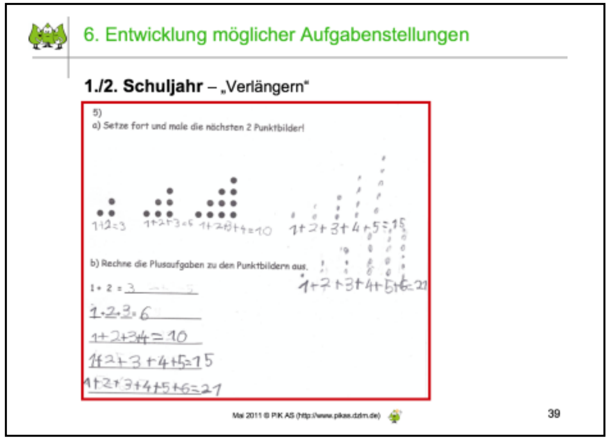
Folien, Folienstifte, OHP
oder
Flipchartbögen, Eddings
evtl. Kopie der Tabelle aus Phase 3,1
Folie 37: nicht abgebildet

Beispiel Aufgabensammlung:

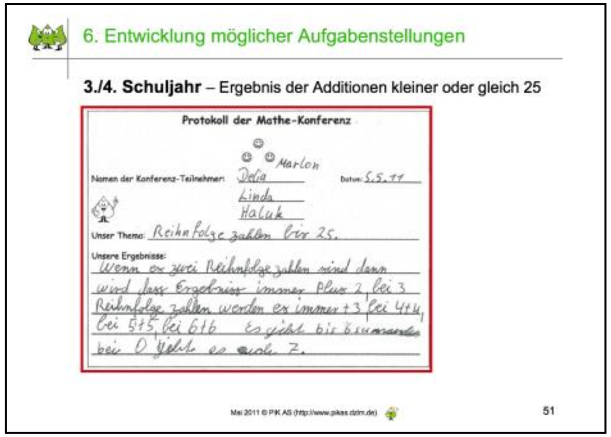
Die Folien 38-40 zeigen exemplarisch auf, wie bereits im ersten Schuljahr an den zentralen Mustern und Strukturen zum Aufgabenkontext gearbeitet werden kann.
Ausgehend von Plusaufgaben mit zwei Summanden (Folie 38) werden weitere Summanden hinzugefügt und die Auswirkungen auf das jeweilige Ergebnis besprochen.

Nach Einführung der Multiplikation kann in Klasse 2 der Zusammenhang zwischen der Addition von drei Reihenfolgezahlen und der Multiplikation mit 3 als Forscherauftrag gestellt werden.
Folie 41: Die Schüler machen Aussagen zu den Ergebnissen und erläutern ihre Beobachtungen (jeweils um 3 größer, Dreierreihe, Erhöhung der Summanden).
Folie 42: hier wird schon über Plättchendarstellungen erklärt, warum die Ergebnisse gleich sind. Und wie Addition und Multiplikation zusammen hängen.
Im 3. oder 4. Schuljahr wird die Auseinandersetzung mit Dreiersummen auf anspruchsvollerem Niveau wieder aufgegriffen. Es soll erforscht werden, ob und warum die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen immer durch 3 teilbar ist.
Die Entdeckungen werden auf Fünfer- und Siebenersummen übertragen (Folien 43-50).

Folien 38, 40, 41: nicht abgebildet
Folie 39



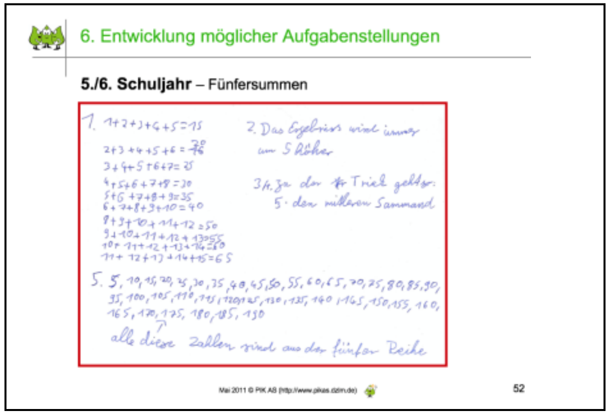
Folien 42 bis 50 nicht abgebildet
Folie 51



Die Schülerinnen und Schüler dieser Jahrgangsstufe können sich auch schon mit der komplexen Problemstellung, alle Aufgaben kleiner oder gleich 25 zu finden. (Folie 52).

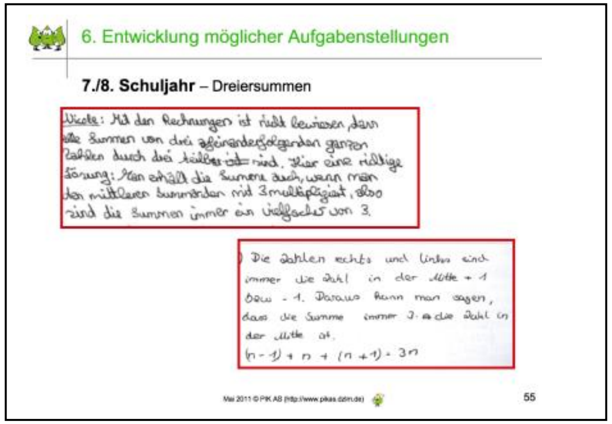
Folie 52 zeigt die Auseinandersetzung einer Fünftklässlerin mit Fünfersummen. Sie findet zunächst viele Aufgaben (1), beschreibt die Veränderung im Ergebnis und den Trick, den mittleren Summanden mit 5 zu multiplizieren (2,3,4). Unter Punkt 5 listet sie Zahlen auf, die als Fünfersumme dargestellt werden können (Vielfache von 5).
Folie 53: Der Schüler berechnet die Mittelzahl durch eine passende Multiplikatipon und baut dann von der jeweiligen Mittelzahl die Additionsaufgaben mit 5 und 9 Summanden auf.
Folie 54: Die Auflistung der Additionsaufgaben kleiner oder gleich 25 zeigt ein geordnetes und systematisches Vorgehen (Verlängern der Zweiersummen) und wird von der Konferenzgruppe wegen der Übersichtlichkeit als bester Weg bezeichnet.
Folie 55: Die Schülerinnen setzen sich mit der Frage der Beweisführung auseinander. Das erste Dokument zeigt den Versuch, über die „Gegenoperation“ eine allgemeine Aussage zu verschriftlichen. Entscheiden formaler angelegt ist die Begründung im zweiten Dokument.
Folie 56 zeigt einen Auszug aus dem Mathetagebuch einer Gymnasiastin aus dem 9. Schuljahr. Eine erste Vermutung musste sie verwerfen und neu beginnen (Dokument 1). Sie stellt weitere Überlegungen zur Teilbarkeit und den Eigenschaften der Anzahlen der Summanden an.

Folie 52



Folien 53,54: nicht abgebildet

Folie 55



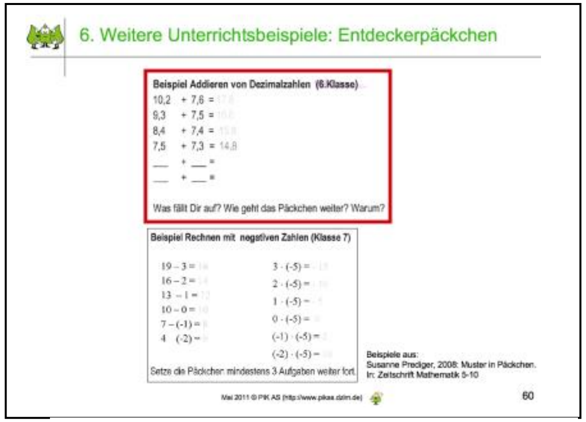
Phase 6: Kontinuität von 1-6: Weitere Unterrichtseispiele

Intention: Kontinuität an weiteren ausgewählten Unterrichtsbeispielen aufzeigen / nachvollziehen

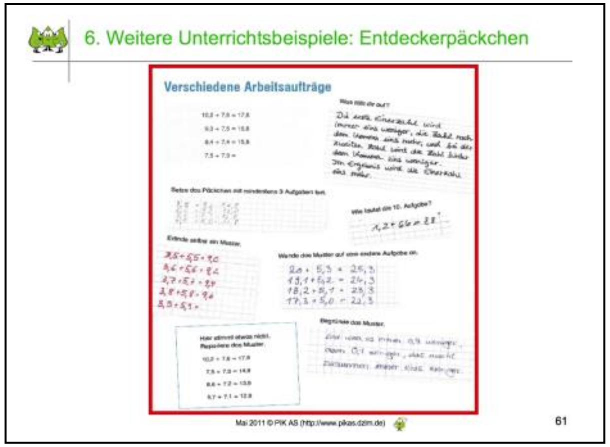
M erläutert, dass in dieser Phase an weiteren vier Unterrichtsbeispielen Kontinuität aufgezeigt werden wird. Dabei geht es um folgende Aspekte: Entwicklung der Forscherhaltung (Entdeckerpäckchen), propädeutische Algebra: Gleichungen (Zahlenrätsel), propädeutische Algebra: Strukturen höherer Ordnung (Magische Quadrate), kumulativer Aufbau Sachrechnen / funktionale Beziehungen: Mathematik im Alltag (Reisen mit dem Zug).

Entdeckerpäckchen
Folie 58: Rechnen und Muster erkennen
Folie 59: Beispiele für Entdeckerpäckchen für die Klassen 1-4
Anmerkung: Die beiden oberen Entdeckerpäckchen sind dem Unterrichtsmaterial zu Haus 1: „Entdecken, Beschreiben, Begründen" entnommen. Die Thematik in diesem Haus wird an einer Unterrichtsreihe zu „Entdeckerpäckchen" aufgezeigt.
Folie 60: Die beiden abgebildeten Entdeckerpäckchen zum Addieren von Dezimalzahlen und zum Rechnen mit negativen Zahlen lassen Muster und Strukturen erkennen, die bereits aus der Grundschulmathematik bekannt sind (systematische Veränderung der Summanden / von Minuend und Subtrahend/ der Faktoren).
Folie 61: Die Arbeitsaufträge zum Päckchen „Addieren von Dezimalzahlen" knüpfen an die Forscheraufträge aus den Klassen 1-4 an und können kontinuierlich im Sinne der Weiterentwicklung der Forscherhaltung ausgebaut werden.

Folien 56-59: nicht abgebildet
Folie 60



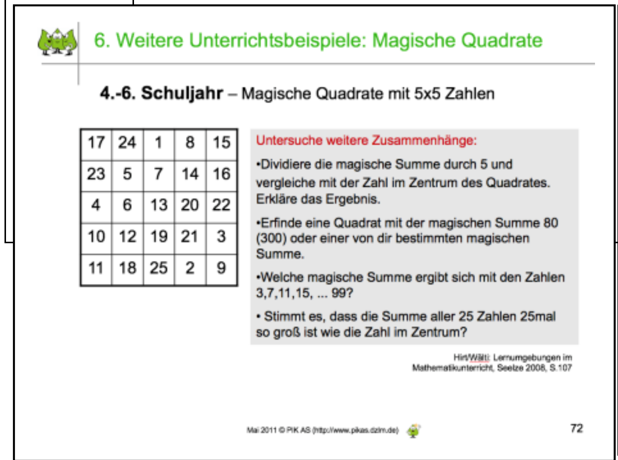
Folie 61

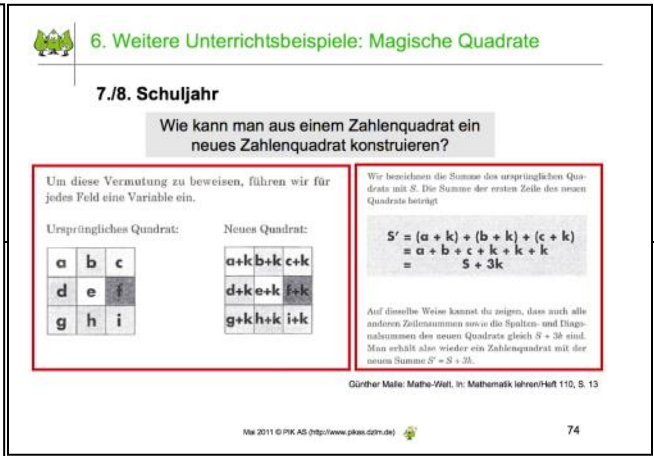


Magische Quadrate

Folie 68: Strukturen höherer Ordnung/ Propädeutische Algebra
Folie 69: Magische Quadrate der Ordnung 3; Platzhalter in magischen Quadraten
Folie 70:
Operatives Verändern der Zahlen in magischen Quadraten
Folie 71:
Das Dürerquadrat als Beispiel für ein magisches Quadrat der Ordnung 4
Muster im magischen Quadrat der Ordnung 4: Magische Summen
Folie 72:
Transfer auf ein magisches Quadrat der Ordnung 5; weiterführende Forscheraufträge
Folien 73,74: Generalisierung der Entdeckungen am magischen Quadrat der Ordnung 3

Folien 72, 74





Folien 68, 69, 71,73: nicht abgebildet
Folie 70

Anmerkung: Weitere Unterrichtsmaterialien zum kumulativen Kompetenzaufbau sind in Haus 7,1 Gute Aufgaben: Umkehrzahlen und Variationen zu finden.

<u>Phase 6: Schlussbemerkungen</u>

<u>Intention: </u>Hervorhebung des besonderen Stellenwertes des Mathematikunterrichts in der Grundschule und Bewusstmachung von günstigen Lernbedingungen für einen langfristigen Kompetenzaufbau in allen Schulformen

<u>Folien 82, 83, 84</u>:
Die Zitate auf diesen Folien schlagen noch einmal einen Bogen zu den Aussagen in Phase 1 und 3 des Moduls. Hinsichtlich der Frage, wie die Kompetenzentwicklung tatsächlich abläuft, gibt es zur Zeit noch erheblichen Forschungsbedarf. Neben der Fokussierung auf Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept stützen die auf den folgenden Folien abgebildeten Merkmale des Unterrichts die Entwicklung eines langfristigen Kompetenzaufbaus (Helmke/Hosenfeld 2004 / Helmke 2004/ Leuders 2001/ Gujons 2004: zitiert nach Buder, 2006). Auch diese Aussagen zu förderlichen Lernbedingungen treffen auf alle Schulformen zu.

Zum Abschluss weist **M** auf die Materialien in Haus 2.1 hin (<u>Folie 85</u>).

Folie 82: nicht abgebildet
Folien 83,84