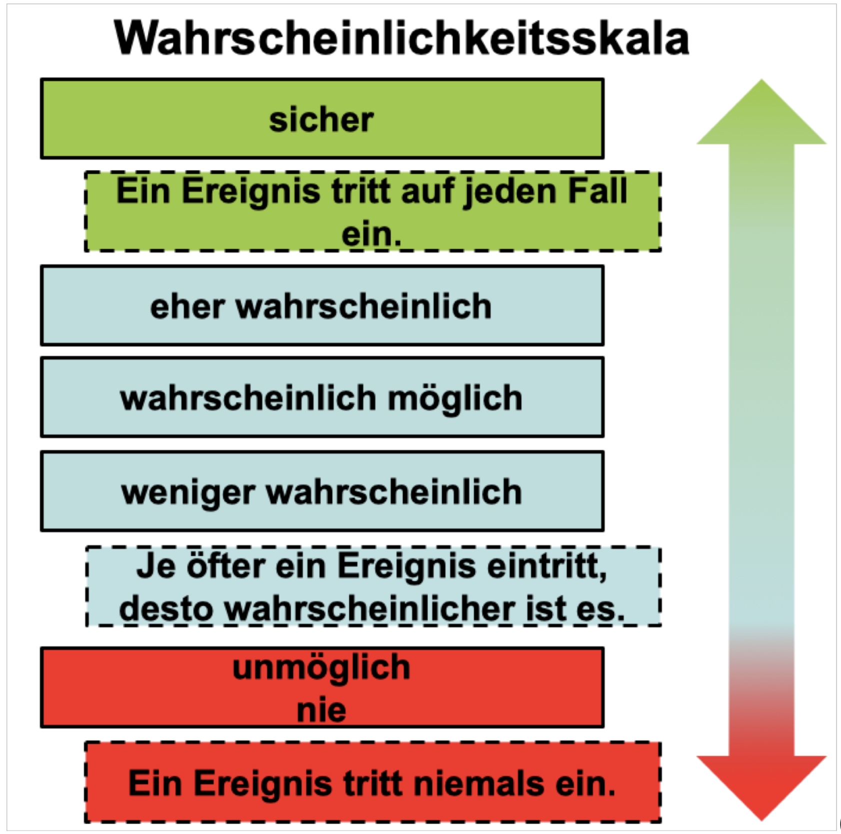
Haus 1: Entdecken, Beschreiben, Begründen



(Selter & Zannetin 2018, S. 163)

Modul 1.6: Wahrscheinlichkeiten

Ministerium für
Schule und Bildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

technische universität
dortmund

Deutsche
Telekom
Stiftung

Aufbau des Fortbildungsmoduls

1. Gründe für Wahrscheinlichkeiten in der Grundschule
2. Schwerpunkte des Bereichs Wahrscheinlichkeiten
3. Sachanalyse zu Wahrscheinlichkeiten
4. Beispiele zur unterrichtlichen Umsetzung
5. „Gute Aufgaben“ im Bereich Wahrscheinlichkeiten

Zielsetzungen

- Den Bereich „Wahrscheinlichkeiten“ kennenlernen oder vertiefen (vor allem fachdidaktisch).
- Die Wichtigkeit des Bereichs nachvollziehen.
- Besonderheiten des Bereichs ausmachen.
- Qualitätsmerkmale „Guter Aufgaben“ auf den Bereich übertragen und spezifizieren.

Aufbau des Fortbildungsmoduls

1. Gründe für Wahrscheinlichkeiten in der Grundschule
2. Schwerpunkte des Bereichs Wahrscheinlichkeiten
3. Sachanalyse zu Wahrscheinlichkeiten
4. Beispiele zur unterrichtlichen Umsetzung
5. „Gute Aufgaben“ im Bereich Wahrscheinlichkeiten

Gründe für Wahrscheinlichkeiten i. d. Grundschule

Aktivität:

Für wie wichtig halten Sie den Bereich „Wahrscheinlichkeiten“ in der Grundschule?

Führen Sie Gründe *für* die Behandlung in der Grundschule an und schreiben Sie diese einzeln auf Karteikarten.

Gründe für Wahrscheinlichkeiten i. d. Grundschule

- Wesentlicher Bestandteil des Alltags:
  - Spiele, wie „Mensch, ärgere dich nicht“, „Kniffel“
  - Glücksspiele (Glücksraddrehen, Lose-Ziehen)

  → Kinder (sollten) lernen, (Glücks-)Spiele zu hinterfragen (Bönig & Ruwisch 2004)

- Auftreten in innermathematischen Zusammenhängen

- Häufig werden auf der Grundlage subjektiver Empfindungen Wahrscheinlichkeitsaussagen getroffen

Gründe für Wahrscheinlichkeiten i. d. Grundschule

Aktivität:

„Häufig werden auf der Grundlage subjektiver Empfindungen Wahrscheinlichkeitsaussagen getroffen.“

Stellen Sie Vermutungen an:
Welche subjektiven Erfahrungen beeinflussen **unser** Wahrscheinlichkeitsempfinden und **das der Kinder**?

Nennen Sie Beispiele und tauschen Sie sich mit einem Partner darüber aus.

Gründe für Wahrscheinlichkeiten i. d. Grundschule

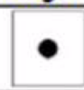
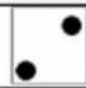
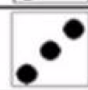
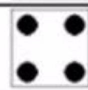
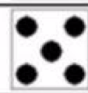
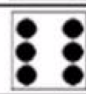
1. **‚availability heuristic':** Urteile werden auf häufig erlebte Situationen zurückgeführt (z.B. wird beim Würfeln das Vorkommen der 6 aufgrund der Erfahrungen bei Brettspielen häufig als unwahrscheinlich angesehen)
2. **‚representativeness heuristic':** wenige, selbst durchgeführte Versuche werden als repräsentativ für die allgemeine Häufigkeitsverteilung angesehen (z.B. Aussagen, wie „Ich habe jetzt schon 10 mal gewürfelt und dabei kam 6 mal die 3, also ist die 3 am wahrscheinlichsten.")
3. **‚equiprobability bias':** alle Möglichkeiten sind gleich wahrscheinlich (z.B. auch die Augensummen 12 und 7 beim Würfeln mit zwei Würfeln)
4. **‚outcome approach':** Fokus auf den speziellen Ausgang des Versuchs (z.B. Einschätzung, dass schnelles Würfeln Einfluss auf das Würfelergebnis hat)

(Pratt 2000, S. 5 f.)

Gründe für Wahrscheinlichkeiten i. d. Grundschule

Ein Beispiel

Würfle 30-mal und führe eine Strichliste.

Augen	Strichliste	Gesamtergebnis
		
		
		
		
		
		

Was fällt dir auf, wenn du die Gesamtergebnisse vergleichst?
Versuche deine Entdeckungen zu erklären.

https://pikas.dzlm.de/149 und https://primakom.dzlm.de/383

Gründe für Wahrscheinlichkeiten i. d. Grundschule

Was fällt dir auf?

Das die 6 öffter vor komnt als die anderen zahlen.

Versuche deine Entdeckungen zu begründen.

Ich glaube das mein Würfel gezinkt ist. Weil immer wenn ich ein ~~Wü~~ Würfelspiel ~~sp~~ spiele komnt die 6 nicht so oft vor.

Würfle 30-mal und führe eine Strichliste.

Augen	Strichliste	Gesamtergebnis
⚀		
⚁		
⚂		
⚃		
⚄		
⚅		

Was fällt dir auf, wenn du die Gesamtergebnisse vergleichst?

Versuche deine Entdeckungen zu erklären.

Was fällt dir auf?

Die 6 wurde beimir am meisten gewürfelt, selbst wen ich 100 mal würfeln dürfte glaube ich das du 6 immer noch forne wäre.

Was fällt dir auf?

~~immer~~ in ferom: 30

Ich habe bei ⚀ 6 bei ⚁ 5 bei ⚂ 6 bei ⚃ 6

Versuche deine Entdeckungen zu begründen.

Ich glaube es ist Zufall.

https://pikas.dzlm.de/149 und https://primakom.dzlm.de/383

Aufbau des Fortbildungsmoduls

1. Gründe für Wahrscheinlichkeiten in der Grundschule
2. Schwerpunkte des Bereichs Wahrscheinlichkeiten
3. Sachanalyse zu Wahrscheinlichkeiten
4. Beispiele zur unterrichtlichen Umsetzung
5. „Gute Aufgaben“ im Bereich Wahrscheinlichkeiten

Schwerpunkte des Bereichs Wahrscheinlichkeiten

Aktivität:

Was umfasst der Bereich Wahrscheinlichkeiten in Ihrem Mathematikunterricht?

- Was machen Sie in Ihrem Unterricht in diesem Bereich?
- Was sollen die Schülerinnen und Schüler dabei lernen?

Schreiben Sie die wichtigsten Punkte einzeln auf Karteikarten.

Schwerpunkte des Bereichs Wahrscheinlichkeiten

- Kinder (müssen) lernen, „ihr subjektives Empfinden […] zunehmend in den Hintergrund“ zu stellen (Hasemann & Mirwald 2008, S. 141)

- Schülerinnen und Schüler kommen zu der Einsicht, „dass der Zufall kalkulierbar ist und dass zufällige Ereignisse mit mathematischen Mitteln modelliert werden können“ (Hasemann & Mirwald 2008, S. 141)

- Reflektierter Umgang mit Wahrscheinlichkeiten im Schulkontext und auch im Alltag

Schwerpunkte des Bereichs Wahrscheinlichkeiten

Bereich: Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten **Schwerpunkt:** Wahrscheinlichkeiten	
Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase Die Schülerinnen und Schüler	Kompetenzerwartungen am Ende der Klasse 4 Die Schülerinnen und Schüler
• bestimmen die Anzahl verschiedener Möglichkeiten im Rahmen einfacher kombinatorischer Aufgabenstellungen	
	• beschreiben die Wahrscheinlichkeit von einfachen Ereignissen (sicher, wahrscheinlich, unmöglich, immer, häufig, selten, nie)

(MSW NRW 2008, S. 18)

Aktivität:

In einem Beutel befinden sich drei verschiedenfarbige Bonbons:

ein rotorangefarbenes,

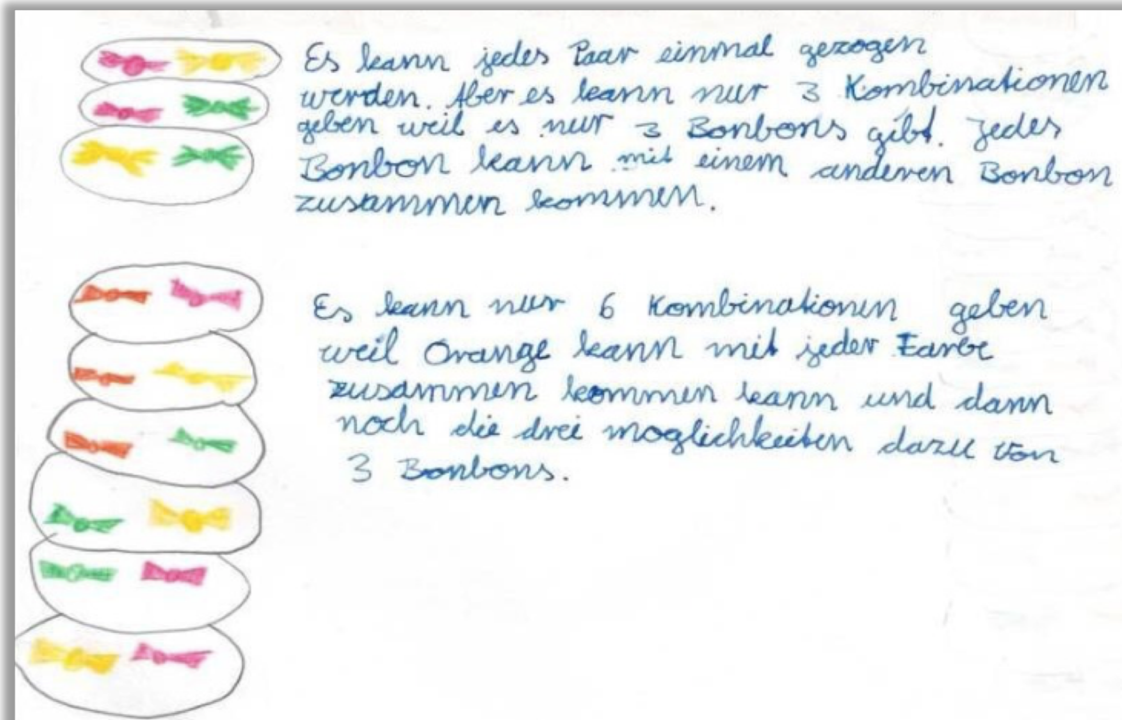
ein gelbes und

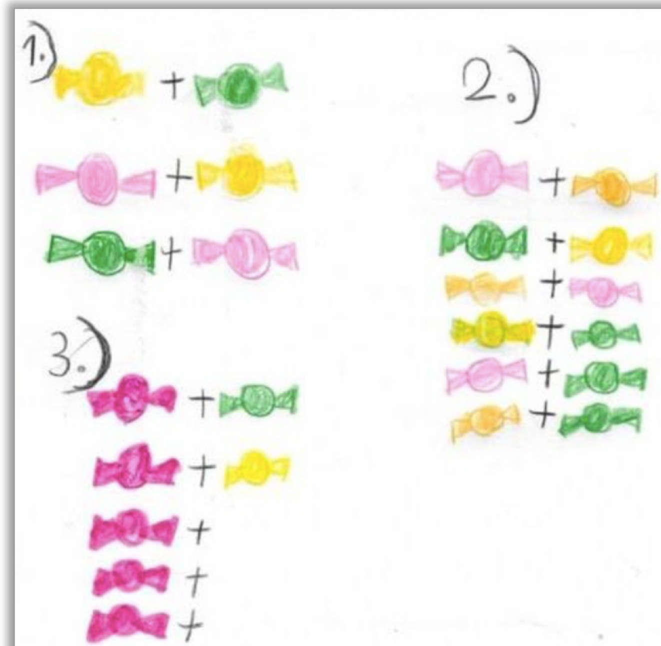
ein grünes Bonbon.

Du ziehst mit einem Griff zwei Bonbons heraus. Wie groß ist die Chance, dass ein rotorangefarbenes Bonbon dabei ist?

https://primakom.dzlm.de/452

Unterschiedliche Lösungen von Lernenden





Diese und weitere Lösungen auf https://primakom.dzlm.de/452

Schwerpunkte des Bereichs Wahrscheinlichkeiten

Bereich:	**Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten**
Schwerpunkt:	**Wahrscheinlichkeiten**
Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase Die Schülerinnen und Schüler	Kompetenzerwartungen am Ende der Klasse 4 Die Schülerinnen und Schüler
• bestimmen die Anzahl verschiedener Möglichkeiten im Rahmen einfacher kombinatorischer Aufgabenstellungen	
	• beschreiben die Wahrscheinlichkeit von einfachen Ereignissen (sicher, wahrscheinlich, unmöglich, immer, häufig, selten, nie)

(MSW NRW 2008, S. 18)

„sicher, wahrscheinlich, unmöglich, immer, häufig, selten, nie“

→ Alltagsbegriffe

Notwendig: Bewusste Thematisierung der Begrifflichkeiten als mathematische Fachbegriffe, um die teilweise abweichende Bedeutung herauszustellen (Hasemann & Mirwald 2008, S. 150)

Aktivität:

- Welche Alltagsbedeutung und welche mathematische Bedeutung verbinden Sie mit den Begriffen?
- An welcher Stelle stimmen die Bedeutungen nicht überein? Wo könnten Probleme entstehen? Diskussionsbsp.: „Wahrscheinlich wird es bald regnen.“

sicher

häufig

nie

unmöglich

selten

wahrscheinlich

immer

(Begriffe aus MSW NRW 2008, S. 18)

Wahrscheinlichkeitsskala

sicher

Ein Ereignis tritt auf jeden Fall ein.

eher wahrscheinlich

wahrscheinlich möglich

weniger wahrscheinlich

Je öfter ein Ereignis eintritt, desto wahrscheinlicher ist es.

unmöglich
nie

Ein Ereignis tritt niemals ein.

Aktivität:

Füllen Sie die Skala mit Beispielen.

(Selter & Zannetin 2018, S. 162–163)

Wahrscheinlichkeitsskala

sicher

Ein Ereignis tritt auf jeden Fall ein.

eher wahrscheinlich

wahrscheinlich möglich

weniger wahrscheinlich

Je öfter ein Ereignis eintritt, desto wahrscheinlicher ist es.

unmöglich
nie

Ein Ereignis tritt niemals ein.

Sonntags haben wir schulfrei.

Im Juni steigt die Temperatur über 22 Grad.

Morgen fehlt niemand in unserer Klasse.

Der Vater ist jünger als sein Sohn.

(Selter & Zannetin 2018, S. 162–163)

Schwerpunkte des Bereichs Wahrscheinlichkeiten

Aktivität:

Sichten Sie Ihre Mathebücher der verschiedenen Jahrgangsstufen.

Inwiefern werden die Kompetenzen des Lehrplans zu Wahrscheinlichkeiten dort angesprochen?

Bereich: Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten **Schwerpunkt:** Wahrscheinlichkeiten	
Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase Die Schülerinnen und Schüler	Kompetenzerwartungen am Ende der Klasse 4 Die Schülerinnen und Schüler
• bestimmen die Anzahl verschiedener Möglichkeiten im Rahmen einfacher kombinatorischer Aufgaben stellungen	
	• beschreiben die Wahrscheinlichkeit von einfachen Ereignissen (sicher, wahrscheinlich, unmöglich, immer, häufig, selten, nie)

Aufbau des Fortbildungsmoduls

1. Gründe für Wahrscheinlichkeiten in der Grundschule
2. Schwerpunkte des Bereichs Wahrscheinlichkeiten
3. Sachanalyse zu Wahrscheinlichkeiten
4. Beispiele zur unterrichtlichen Umsetzung
5. „Gute Aufgaben“ im Bereich Wahrscheinlichkeiten

Kombinatorik

Kombinatorische Aufgabenstellungen unterscheiden sich in wesentlichen Punkten von anderen Aufgaben zur Anzahlbestimmung (Höveler 2014):

- Ziel ist es die Anzahl aller Möglichkeiten zu ermitteln.
- Diese müssen erst aus den einzelnen Elementen erstellt werden.
- Den zu bildenden kombinatorischen Figuren liegen abhängig von der jeweiligen Problemstellung verschiedene Bedingungen zugrunde.
- Wichtig ist dabei, die Vollständigkeit der Lösungen begründen zu können und Dopplungen bzw. Mehrfachzählungen auszuschließen.

Sachanalyse zu Wahrscheinlichkeiten

Peter hat drei Jeans (J1, J2, J3) und
fünf T-Shirts (T1, T2, T3, T4, T5).

Auf wie viele unterschiedliche Arten kann er diese miteinander kombinieren?

Tabelle

	T1	T2	T3	T4	T5
J1	J1 T1	J1T2	J1T3	J1T4	J1 T5
J2	J2 T1	J2T2	J2T3	J2T4	J2 T5
J3	J3 T1	J3T2	J3T3	J3T4	J3 T5

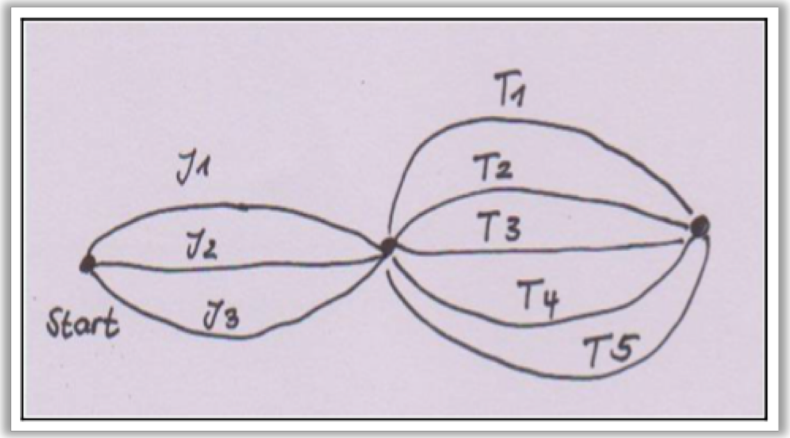
Rechnerische Lösung

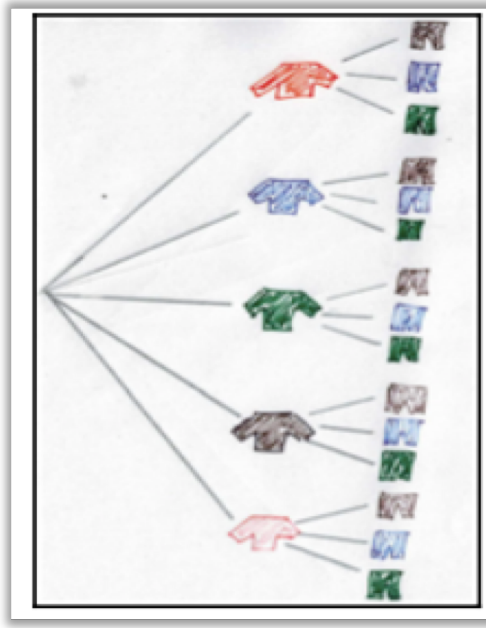
Jedes der fünf T-Shirt mit jeder der drei Jeans kombinieren, also $5 \cdot 3 = 15$ Möglichkeiten ODER jede der drei Jeans mit jedem der fünf T-Shirts, also $3 \cdot 5 = 15$ Möglichkeiten.

https://primakom.dzlm.de/452

Sachanalyse zu Wahrscheinlichkeiten

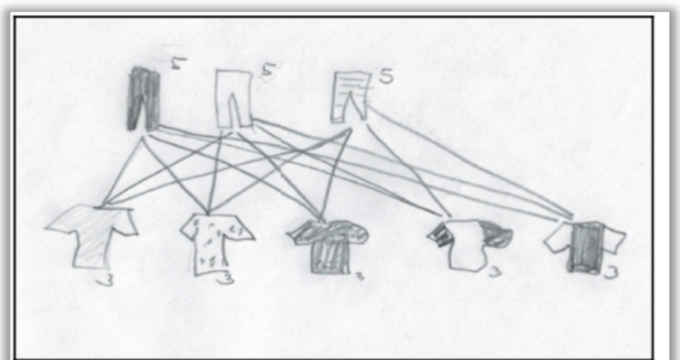
Wege-
diagramm





Baum-
diagramm

Zeichnerische
Lösungen



T1J1, T1J2, T1J3,
T2J1, T2J2, T2J3,
T3J1, T3J2, T3J3,
T4J1, T4J2, T4J3,
T5J1, T5J2, T5J3

Auflisten

https://primakom.dzlm.de/452

Klassifizierung der kombinatorischen Figuren

Zentrale Fragen:

- Werden alle gegebenen Elemente benötigt oder nur eine Auswahl?
- Werden die Elemente nur einmal oder dürfen sie mehrfach verwendet werden?
- Ist die Reihenfolge unerheblich oder muss die Reihenfolge beachtet werden?

https://primakom.dzlm.de/452

Sachanalyse zu Wahrscheinlichkeiten

Aktivität:

Finden Sie Beispiele für mögliche kombinatorische Figuren.

- Anordnungsprobleme – die Reihenfolge ist wichtig
  - Permutation von n Elementen ohne Wiederholung:
    jedes Element darf nur einmal verwendet werden
  - Permutation von n Elementen mit Wiederholung:
    ein Element darf mehrfach verwendet werden
  - Variation ohne oder mit Wiederholung:
    nicht jedes Element wird verwendet
- Auswahlprobleme – die Reihenfolge ist nicht wichtig
  - Kombination ohne Wiederholung
  - Kombination mit Wiederholung

Eigenschaften von Zufall & Wahrscheinlichkeiten

- Die Unvorhersagbarkeit des **Einzelereignisses** wird genutzt, um z.B. beim Sport Entscheidungen herbeizuführen, oder in einem Spiel faire Situationen/Regeln sicherzustellen, beim Lotto, ...
- Bei genügend **hoher Versuchswiederholung** lassen sich Regelmäßigkeiten (Muster) entdecken, diese werden genutzt, um begründete Vorhersagen für zukünftige Ereignisse treffen zu können

kurze Sicht

lange Sicht

Sachanalyse zu Wahrscheinlichkeiten

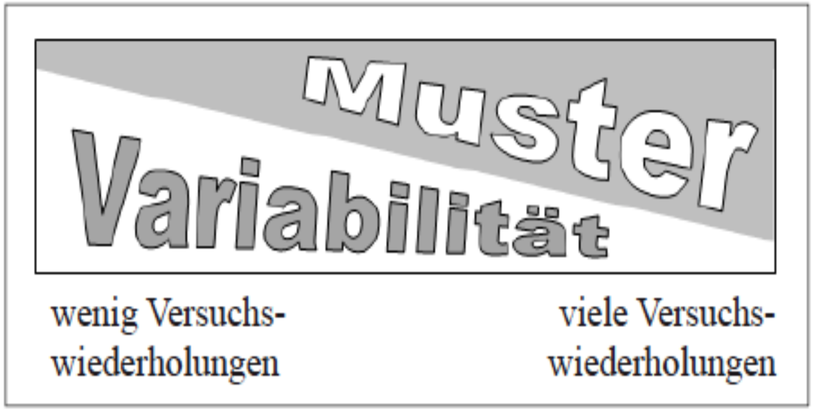
Gesetz der großen Zahlen:

Bei einer sehr großen Anzahl von Versuchen nähert sich die relative Häufigkeit der günstigen Ereignisse (Verhältnis aus der Anzahl des Eintretens des Ereignisses zur Gesamtzahl der Versuche) der theoretisch berechneten Wahrscheinlichkeit an.
(Eichler 2010)

Gesetz der großen Zahlen:

Dieses Phänomen lässt sich beobachten, denn

- je kleiner die Versuchsanzahlen sind, desto stärker variieren die relativen Häufigkeiten
- je größer sie sind, desto besser sind Regelmäßigkeiten (Muster) identifizierbar.



(Schnell 2014, S.18)

Sachanalyse zu Wahrscheinlichkeiten

Eintrittswahrscheinlichkeit E eines Ereignisses lässt sich eindeutig berechnen:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse,sofern sie gleich möglich sind}}$$

!

Die Angabe einer Wahrscheinlichkeit kann aber nicht das Eintreten eines Ereignisses vorhersagen.
Die Wahrscheinlichkeit gibt einzig Auskunft darüber, wie groß die *Chance* ist, dass das gewünschte Ergebnis eintrifft.

Beispiel 1:

Welche Ziffer tritt beim Würfeln mit einem Würfel am wahrscheinlichsten auf?

- **Anzahl aller möglichen Ergebnisse:** 6
  (→ Würfel hat 6 Flächen, auf die er fallen kann)
- **Anzahl der günstigsten Fälle:** 1 (jede Zahl)
  (Würfel sind symmetrisch und jede Zahl kommt genau einmal vor)

→„Gleichwahrscheinlichkeit für das Eintreten der sechs Augenzahlen" (Hasemann & Mirwald 2008, S. 151)

$$\frac{1}{6}$$

Sachanalyse zu Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 2:

Welche Augensumme tritt beim Würfeln mit zwei Würfeln am häufigsten auf?

- Anzahl der Kombinationsmöglich-keiten, die einzelnen Augensummen zu erzielen
- 36 Felder,
  also 36 mögliche Fälle

+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Sachanalyse zu Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 2:

- Augensumme 2 und 12: $\frac{1}{36}$
- Augensumme 3 und 11: $\frac{2}{36}$
- Augensumme 4 und 10: $\frac{3}{36}$
- Augensumme 5 und 9: $\frac{4}{36}$
- Augensumme 6 und 8: $\frac{5}{36}$
- Augensumme 7: $\frac{6}{36}$

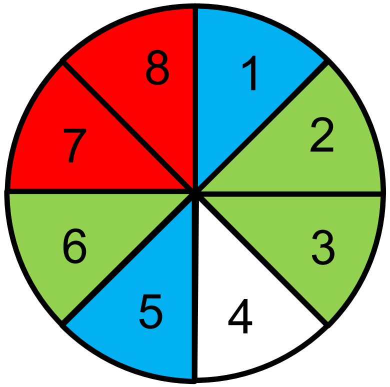
+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

→ Augensumme 7 ist am wahrscheinlichsten

Beispiel 3:

Welches Feld tritt beim Glücksraddrehen am häufigsten auf?

Flächenmäßiges Vorkommen auf dem Glücksrad ist ausschlaggebend für die Eintrittswahrscheinlichkeit.



Abgebildetes Glücksrad:

Farbe	**Weiß**	**Blau**	**Rot**	**Grün**
Wahrschein-lichkeit	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

Nur die Ziffern: Wahrscheinlichkeit für jede Ziffer $\frac{1}{8}$, da jede Ziffer nur einmal vorkommt und die einzelnen Gewinnfelder gleich groß sind.

Aufbau des Fortbildungsmoduls

1. Gründe für Wahrscheinlichkeiten in der Grundschule
2. Schwerpunkte des Bereichs Wahrscheinlichkeiten
3. Sachanalyse zu Wahrscheinlichkeiten
4. Beispiele zur unterrichtlichen Umsetzung
5. „Gute Aufgaben“ im Bereich Wahrscheinlichkeiten

Beispiele zur unterrichtlichen Umsetzung

Grundsätzlich:

Eine einmalige Thematisierung von ‚Wahrscheinlichkeiten' ist nicht ausreichend!!!

Reflektierter Umgang ist nur möglich, wenn der Begriff zur fundamentalen Idee der Wahrscheinlichkeit sukzessiv, entsprechend des Spiralprinzips, ausdifferenziert und angereichert wird!

(Bönig & Ruwisch 2004)

Zufallsexperimente in der Grundschule

Würfeln mit dem Würfel
Beim Würfeln mit dem Würfel sind alle Ausgänge gleich wahrscheinlich.

Glücksrad
Je nach Gestaltung sind die Ergebnisse nicht gleich wahrscheinlich.

Münzwurf
Das zweimalige Werfen ist ein Beispiel für einen mehrstufigen Zufallsversuch, bei dem die beiden Ergebnisse der Einzelereignisse verknüpft werden durch Addition.

Ziehen einer Kugel
Das Ziehen einer Kugel ist ein Beispiel für einen Zufallsversuch, in dem eine Stufe weitere Stufen beeinflussen kann. Wird eine Kugel gezogen und nicht wieder zurückgelegt, beeinflusst das die Wahrscheinlichkeiten weiterer Ziehungen.

(Selter & Zannetin 2018, S. 159)

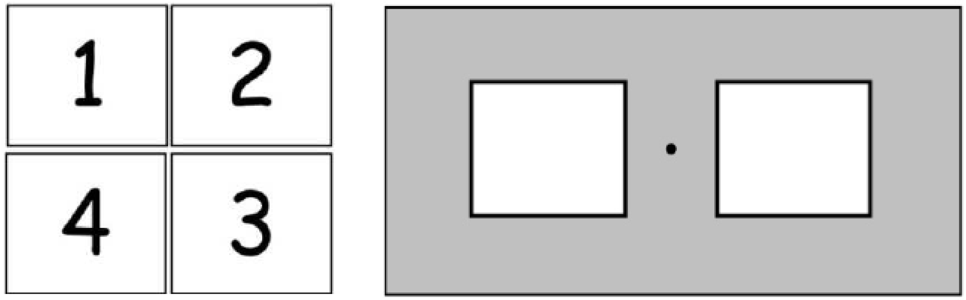
PIKAS-Lernumgebung: Ziffernkarten ziehen

Spielregel „Ziffernkarten ziehen"

Zieht nacheinander je eine Karte aus dem Beutel und legt sie auf das Feld auf eurer Seite des Spielfeldes! Berechnet das Ergebnis der Malaufgabe!

Gewinnregel

Spieler 1 gewinnt, wenn das Ergebnis gerade ist.
Spieler 2 gewinnt, wenn das Ergebnis ungerade ist.



https://pikas.dzlm.de/375

Aktivität:

Haben beide Spielende die gleiche Gewinnchance?
Erkunden Sie das Spiel.

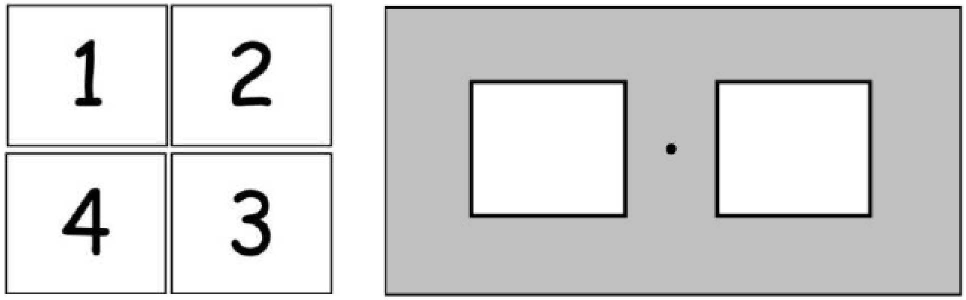
Spielregel „Ziffernkarten ziehen“

Zieht nacheinander je eine Karte aus dem Beutel und legt sie auf das Feld auf eurer Seite des Spielfeldes! Berechnet das Ergebnis der Malaufgabe!

Gewinnregel

Spieler 1 gewinnt, wenn das Ergebnis gerade ist.

Spieler 2 gewinnt, wenn das Ergebnis ungerade ist.



Beispiele zur unterrichtlichen Umsetzung

Aktivität:

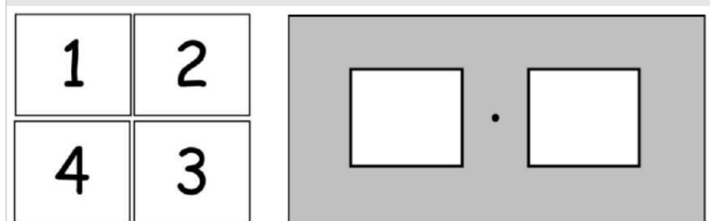
Haben beide Spielende die gleiche Gewinnchance? Erkunden Sie das Spiel!

Spielregel „Ziffernkarten ziehen“

Zieht nacheinander je eine Karte aus dem Beutel und legt sie auf das Feld auf eurer Seite des Spielfeldes! Berechnet das Ergebnis der Malaufgabe!

Gewinnregel

Spieler 1 gewinnt, wenn das Ergebnis gerade ist.
Spieler 2 gewinnt, wenn das Ergebnis ungerade ist.



Wie haben Sie die Begriffe ‚sicher‘, ‚wahrscheinlich‘, ‚unwahrscheinlich‘, ‚unmöglich‘ benutzt?

Beispiele zur unterrichtlichen Umsetzung

Spielregel „Ziffernkarten ziehen"

Zieht nacheinander je eine Karte aus dem Beutel und legt sie auf das Feld auf eurer Seite des Spielfeldes! Berechnet das Ergebnis der Malaufgabe!

Gewinnregel

Spieler 1 gewinnt, wenn das Ergebnis gerade ist.
Spieler 2 gewinnt, wenn das Ergebnis ungerade ist.

1	2
4	3

$\square \cdot \square$

Darstellung 1:

·	1	2	3	4
1		2	3	4
2	2		6	8
3	3	6		12
4	4	8	12	

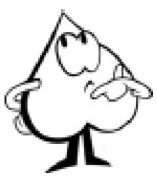
Darstellung 2:

$1 \cdot 2 = 2$	$2 \cdot 1 = 2$	$3 \cdot 1 = 3$	$4 \cdot 1 = 4$
$1 \cdot 3 = 3$	$2 \cdot 3 = 6$	$3 \cdot 2 = 6$	$4 \cdot 2 = 8$
$1 \cdot 4 = 4$	$2 \cdot 4 = 8$	$3 \cdot 4 = 12$	$4 \cdot 3 = 12$

Auszug aus der Unterrichtsreihe (erster Forscherauftrag):

Wer gewinnt?

1. Bevor ihr spielt:



Findet ihr, dass das Spiel fair ist? Kreuzt an!

☐ fair

☐ unfair

Warum?

____

____

____

https://pikas.dzlm.de/375

Beispiele zur unterrichtlichen Umsetzung

Auszug aus der Unterrichtsreihe (erster Forscherauftrag):

2. Spielt das Spiel mindestens dreimal! Wer hat gewonnen?

Macht einen Strich in der Tabelle, wenn ein Spieler einen Punkt bekommt. Wenn ein Spieler drei Punkte hat, hat er gewonnen und die Runde ist vorbei.

	Runde 1 Punkte	**Runde 2** Punkte	**Runde 3** Punkte	**Runde 4** Punkte	**Runde 5** Punkte
Spieler 1					
Spieler 2					

Wer hat wie oft gewonnen? Macht einen Strich bei dem Spieler, der gewonnen hat!

Spieler 1 hat gewonnen: ______________________________

Spieler 2 hat gewonnen: ______________________________

Beispiele zur unterrichtlichen Umsetzung

Auszug aus der Unterrichtsreihe (erster Forscherauftrag):

3. Was fällt euch auf?

____

____

____

4. Woran kann das liegen?

Wenn ihr noch etwas Hilfe braucht, könnt ihr euch einen Tipp holen!

____

____

____

https://pikas.dzlm.de/375

____

Beispiele zur unterrichtlichen Umsetzung

Auszug aus der Unterrichtsreihe (zweiter Forscherauftrag):

Wahrscheinlich bedeutet…?

Was bedeuten die Begriffe?

Schreibe zu jedem der folgenden Begriffe in deinen eigenen Worten auf, was sie bedeuten.

„**wahrscheinlich**" bedeutet:

____

____

____

„**unwahrscheinlich**" bedeutet:

____

____

____

Beispiele zur unterrichtlichen Umsetzung

Auszug aus der Unterrichtsreihe (zweiter Forscherauftrag):

„**sicher**“ bedeutet:

____

____

____

„**unmöglich**“ bedeutet:

____

____

____

Du bist fertig? Dann suche dir ein anderes Kind, mit dem du deine Ergebnisse vergleichen kannst!

Auszug aus der Unterrichtsreihe (dritter Forscherauftrag):

Wir machen das Spiel fair!

Versucht das Spiel so zu verändern, dass es fair ist!
Ihr könnt euch dazu andere Gewinnregeln überlegen oder die leeren Ziffernkarten benutzen und euch eigene Karten machen. Benutzt erstmal maximal 6 Karten.
Wenn ihr gar keine Idee habt, könnt ihr euch eine Tippkarte holen.

Unsere Idee:

____

____

Malt hier eure neuen Ziffernkarten auf:

Auszug aus der Unterrichtsreihe (dritter Forscherauftrag):

Diese Aufgaben kann man mit unseren neuen Karten legen:

Warum sind das alle?

____

____

Ist das Spiel so fair? Begründet!

____

____

____

Beispiele zur unterrichtlichen Umsetzung

Beispielhafte Unterrichtsplanung und -durchführung zum Thema „Gewinnwahrscheinlichkeit“ (3./4. Klasse):

„Reines Glück oder doch nicht? Wir werden Spielforscher!“ mit dem zugrunde liegenden Spiel *„Ziffernkarten ziehen“*

Nutzung des *Gesetzes der großen Zahlen:*

- Im Spiel „Ziffernkarten ziehen“ hat ein Spieler eine fünfmal so große Gewinnwahrscheinlichkeit wie der andere
- Nach dem *Gesetz der großen Zahlen* wird dieser Spieler bei einer großen Anzahl von Spielrunden ungefähr fünfmal häufiger gewinnen als der andere Spieler
- Kinder ärgern sich und wollen erkunden, welche Ursachen das häufige Gewinnen eines der Spieler hat → intrinsische Beweggründe, das Thema „Wahrscheinlichkeit“ zu erforschen

https://pikas.dzlm.de/375

Beispiele zur unterrichtlichen Umsetzung

- Einsicht in die Gewinnwahrscheinlichkeiten: Aufgaben ansehen
- Möglichkeit, die Kinder oft eigenständig entwickeln und nutzen, um alle Aufgaben zu finden: systematisches Aufschreiben in einer Liste (Ruwisch 2010); z.B. geordnet nach dem ersten Faktor der Malaufgabe:

$1 \cdot 2 = 2$	$2 \cdot 1 = 2$	$3 \cdot 1 = 3$	$4 \cdot 1 = 4$
$1 \cdot 3 = 3$	$2 \cdot 3 = 6$	$3 \cdot 2 = 6$	$4 \cdot 2 = 8$
$1 \cdot 4 = 4$	$2 \cdot 4 = 8$	$3 \cdot 4 = 12$	$4 \cdot 3 = 12$

- Zwei Aufgaben (grün markiert): ungerades Ergebnis
- Zehn Aufgaben: gerades Ergebnis → Spieler, der bei den geraden Ergebnissen gewinnt, hat fünfmal so viele günstige Ergebnisse (somit bei jedem Zug eine fünfmal so hohe Wahrscheinlichkeit wie der andere Spieler, einen Punkt zu bekommen)

Aufbau des Fortbildungsmoduls

1. Gründe für Wahrscheinlichkeiten in der Grundschule
2. Schwerpunkte des Bereichs Wahrscheinlichkeiten
3. Sachanalyse zu Wahrscheinlichkeiten
4. Beispiele zur unterrichtlichen Umsetzung
5. „Gute Aufgaben“ im Bereich Wahrscheinlichkeiten

"Gute Aufgaben" im Bereich Wahrscheinlichkeiten

Die Qualitätsmerkmale guter Aufgaben in den Worten des aktuellen Lehrplans NRW

Die Grundschule in NRW
Neue Richtlinien und Lehrpläne 2008

Gute Lernaufgaben …

- **… sind herausfordernd auf unterschiedlichem Anspruchsniveau.**
- **… fordern und fördern inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen.**
- **… knüpfen an Vorwissen an und bauen das strukturierte Wissen kumulativ auf.**
- **… sind in sinnstiftende Kontexte eingebunden.**
- **… sind vielfältig in den Lösungsstrategien und Darstellungsformen.**
- **… stärken das Könnensbewusstsein durch erfolgreiches Bearbeiten.**

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen

Auch im Bereich Wahrscheinlichkeiten?

“Gute Aufgaben“ im Bereich Wahrscheinlichkeiten

Förderung von inhalts- *und* prozessbezogenen Kompetenzen:

- Versuche selber durchführen und Strichlisten über die Ergebnisse führen (Problemlösen, Darstellen)
- Austausch in Mathekonferenzen über Auffälligkeiten und Begründung dieser (Kommunizieren, Argumentieren)

“Gute Aufgaben“ im Bereich Wahrscheinlichkeiten

Struktur- und Anwendungsorientierung:

- Aufdeckung mathematischer Gesetze und Beziehungen (Förderung der Basisfähigkeiten, wie z.B. Ordnen, Verallgemeinern)
- Bezüge zur Alltagswelt

Beispiel: Thematisieren, dass es egal ist, ob man beim „Mensch ärgere dich nicht“ bei einer 6 oder einer anderen Zahl anfangen darf, da die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln mit einem Würfel für jede Augenzahl – trotz häufig anderer Empfindung – gleich ist

“Gute Aufgaben“ im Bereich Wahrscheinlichkeiten

Weitere Kriterien:

- Authentische Zugänge schaffen
- Kinder aktiv beteiligen (ausprobieren!)
- Offene Aufgaben, die auf unterschiedlichen Niveaus bearbeitet werden können (natürliche Differenzierung)

“Gute Aufgaben“ im Bereich Wahrscheinlichkeiten

Aktivität:

Analysieren Sie: Inwiefern werden die Kriterien guter Aufgaben im Rahmen der Lernumgebung „Ziffernkarten ziehen“ (https://pikas.dzlm.de/375) angesprochen?

- Inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen
- Struktur- und Anwendungsorientierung
- Authentischer Zugang
- Aktive Beteiligung der Kinder
- Differenzierungspotential
- ...

“Gute Aufgaben“ im Bereich Wahrscheinlichkeiten

Analyse: Inwiefern werden die Kriterien guter Aufgaben im Rahmen dieser Lernumgebung angesprochen?

Es werden neben inhaltsbezogenen auch prozessbezogene Kompetenzen angesprochen:

Problemlösen: Sofern Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit noch nicht behandelt wurden, haben die Kinder für solche Aufgabentypen noch keine Strategien entwickelt → um das Problem zu lösen, erschließen sie Zusammenhänge, stellen Vermutungen an, probieren systematisch, reflektieren und prüfen; wenn sie selbst faire Regeln finden, übertragen, variieren und erfinden sie

“Gute Aufgaben“ im Bereich Wahrscheinlichkeiten

Analyse: Inwiefern werden die Kriterien guter Aufgaben im Rahmen dieser Lernumgebung angesprochen?

Modellieren: Konstrukt der Wahrscheinlichkeit an sich ist ein Modell; beim Zuschreiben einer Wahrscheinlichkeit wird ausgedrückt, mit welchem Grad an Wahrscheinlichkeit ein Ereignis eintreten wird → mathematische Modellierung einer realen Situation; reale Situation wird mathematisch modelliert, bearbeitet und schließlich wieder auf die Sachsituation bezogen

"Gute Aufgaben" im Bereich Wahrscheinlichkeiten

Analyse: Inwiefern werden die Kriterien guter Aufgaben im Rahmen dieser Lernumgebung angesprochen?

Darstellen/Kommunizieren: Kinder sollen ihre Entdeckungen und Überlegungen dokumentieren (verschiedene Darstellungsmittel vorstellbar, wie z.B. Tabellen, systematische Auflistungen, Skizzen)

Argumentieren: Kinder sollen begründen, wieso das Spiel nicht fair ist, bzw. warum es ihre neuen Regeln sind → müssen Beziehungen zwischen möglichen Ergebnissen und den Gewinnchancen erklären, bzw. Vermutungen dazu anstellen

Analyse: Inwiefern werden die Kriterien guter Aufgaben im Rahmen dieser Lernumgebung angesprochen?

Struktur- und Anwendungsorientierung:

- Kinder lernen sich kritisch gegenüber Glücksspielen zu verhalten und ihre Chancen realistisch einzuschätzen → leistet einen Beitrag zur Erziehung der Kinder zu mündigen Menschen
- Entspricht den Forderungen des Lehrplans für den Mathematikunterricht nach **Anwendungs- und Strukturorientierung** → Aufgreifen mathematischer Vorerfahrungen in lebensweltlichen Situationen sowie Einsichten über die Realität mithilfe mathematischer Methoden

Analyse: Inwiefern werden die Kriterien guter Aufgaben im Rahmen dieser Lernumgebung angesprochen?

Authentischer Zugang:

- Spielumgebung

Aktive Beteiligung der Kinder:

- Hohe Handlungsorientierung

Zahlreiche Differenzierungsmöglichkeiten:

- u.a. durch Tippkarten

“Gute Aufgaben“ im Bereich Wahrscheinlichkeiten

Aktivität:

Analysieren Sie die gesichteten Aufgaben aus Ihren Mathebüchern hinsichtlich der angesprochenen Kriterien für gute Aufgaben im Bereich Wahrscheinlichkeiten.

1) Wie könnten Sie ggf. die Aufgaben so verändern, dass aus diesen gute Aufgaben werden?
2) Wie werden mögliche Schwierigkeiten in Bezug auf subjektive Erfahrungen und Empfindungen der Schülerinnen und Schüler antizipiert?
   Wo sehen Sie Möglichkeiten, diese aufzugreifen?

Haus 1: Modul 1.6

Literaturverzeichnis

- Bönig, D. & Ruwisch, S. (2004). Daten gewinnen, darstellen, verarbeiten und interpretieren. *Die Grundschulzeitschrift,* 172, 6-14.
- Eichler, K.-P. (2010). Wahrscheinlich kein Zufall – Betrachtungen rund um Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit. *Praxis Grundschule,* 33 (3), 7-13.
- Hasemann, K. & Mirwald, E. (2008). Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit. In: Walther, G.; van den Heuvel-Panhuizen, M.; Granzer, D. & Köller, O. Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik Konkret (S. 141–161). Berlin: Cornelsen Verlag.
- MSW NRW (2008). Lehrplan Mathematik für die Grundschulen des Landes Nordrhein-Westfalen. Verfügbar unterhttps://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_gs/GS_LP_M.pdf.
- Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (5), 602-625.
- Prediger, S. (2005). Wenn man Schwein gehabt hat, kann man zwei Dreien kriegen. Fallbeispiele zu Überschneidungseffekten bei stochastischen Vorstellungen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005 online.* Verfügbar unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/BzMU/BzMU2005/Beitraege/prediger-gdm05.pdf (Abruf am 10.08.2018)
- Ruwisch, S. (2010). Zählen, ohne zu zählen. *Grundschule Mathematik,* 27, 4-5.
- Schnell, S. (2014). Muster und Variabilität erkunden. Konstruktionsprozesse kontextspezifischer Vorstellungen zum Phänomen Zufall. Berlin: Springer.
- Selter, Ch. & Zannetin, E. (2018). Mathematik unterrichten in der Grundschule. Inhalte – Leitideen – Beispiele. Seelze: Kallmeyer & Klett.

Hinweise zu den Lizenzbedingungen