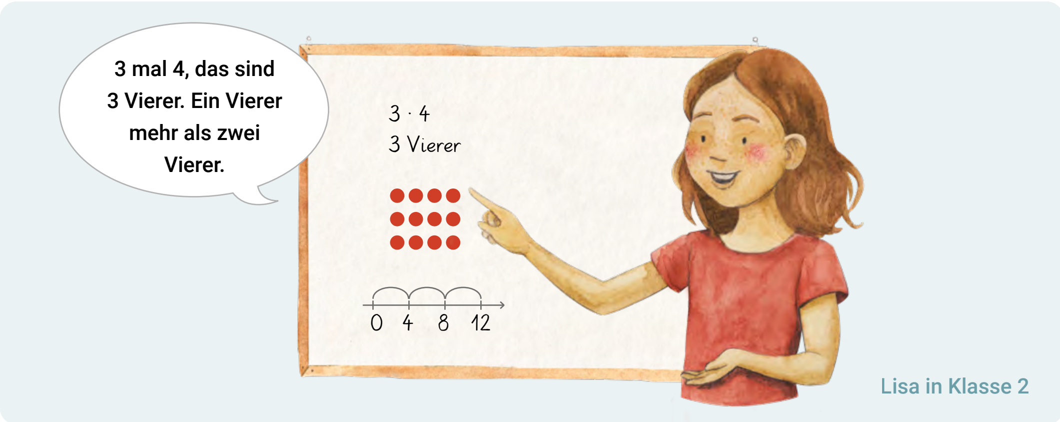
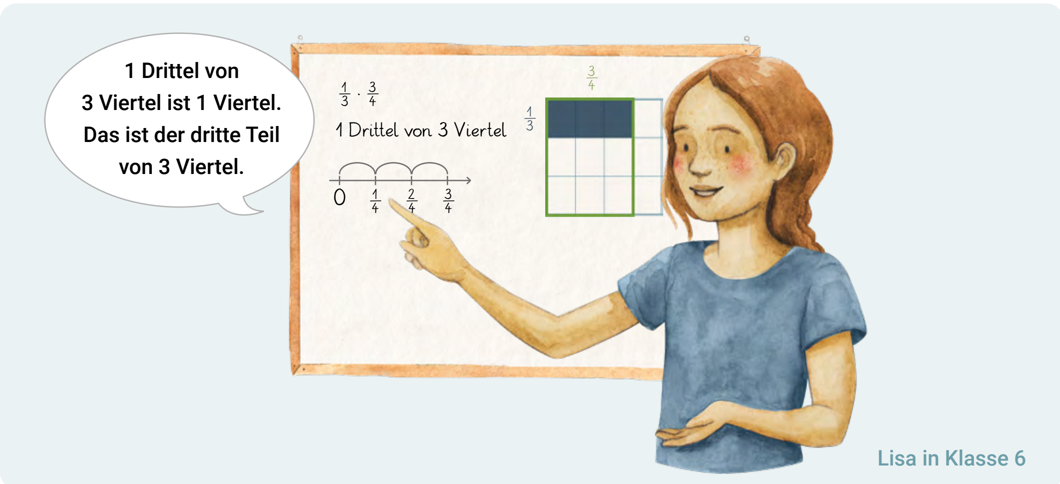
QuaMath
Unterrichts- und Fortbildungs-Qualität in Mathematik entwickeln

PIKAS
Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik





Langfristige Lernprozesse im Blick

Hintergrundinformationen und Beispiele zum Prinzip der Durchgängigkeit

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

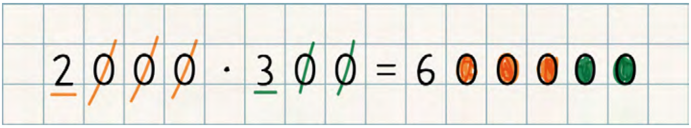


Abb. 1: Der Nullentrick

„Wenn du zwei ‚glatte' Zahlen multiplizieren musst, dann streichst du einfach die Nullen weg, rechnest die kleine Malaufgabe, und dann hängst du die Nullen wieder dran."
So lautet ein vermutlich häufig geäußerter Rechentrick – gut gemeint, aber problematisch: Kindern ‚Merksätze' zum ‚Nullen hinzufügen oder wegstreichen' vermitteln zu wollen, führt langfristig zu einer nicht tragfähigen Strategie. Denn so lässt sich kein Verständnis dafür aufbauen, wie das Rechnen mit einem höheren (und später bei Dezimalzahlen kleineren) Stellenwert funktioniert und wie Ergebnisse mithilfe von Aufgaben aus dem kleinen Einmaleins abgeleitet werden können.
Ein solches Oberflächenwissen ohne dahinterliegendes Verständnis mag in Einzelfällen und für den Moment zu funktionieren scheinen. Aber was ist beispielsweise, wenn die Aufgabe 0,20 € mal 30 lautet? Die Anwendung des Nullentricks – Nullen streichen und dann wieder anhängen – führt dann bisweilen zum Resultat 0,600 €. Oder was ist bei 100 mal 30,50 €? Der schematisch angewendete Nullentrick liefert das Ergebnis 30,5000 €.
Oft wird der Trick dann auch auf die Division übertragen. Was ist 9 000 : 30? Jeweils eine Null streichen führt zu der einfachen Aufgabe 900 : 3 = 300, dann die beiden Nullen wieder anhängen. Das so erzielte Ergebnis lautet 30 000. Und später bei den Dezimalzahlen werden dann beim Zählen der Nullen noch weitere Fehler gemacht, weil nicht mehr klar ist, welche Nullen man hier eigentlich zählen muss: 2,4 : 10 000 = 0,0024.

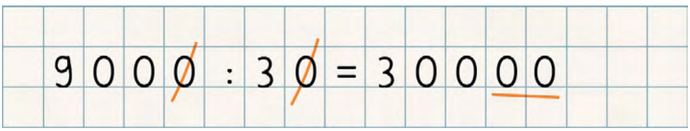


Abb. 2: Der Nullentrick führt in die Irre

Selbst wenn es lokal und für den Moment reichen mag, solche vermeintlichen Hilfen zu nutzen, um die Ergebnisse zu bestimmen, ist das zu kurz gedacht: Lernenden wird dadurch der Erwerb wichtiger Verstehensgrundlagen vorenthalten, die im weiteren Mathematikunterricht aber dringend benötigt werden.

Schlimmer noch ist dabei, dass sie bei erfolgreicher Anwendung die Illusion aufbauen, es verstanden zu haben, und die Kinder sich somit falsch einschätzen.

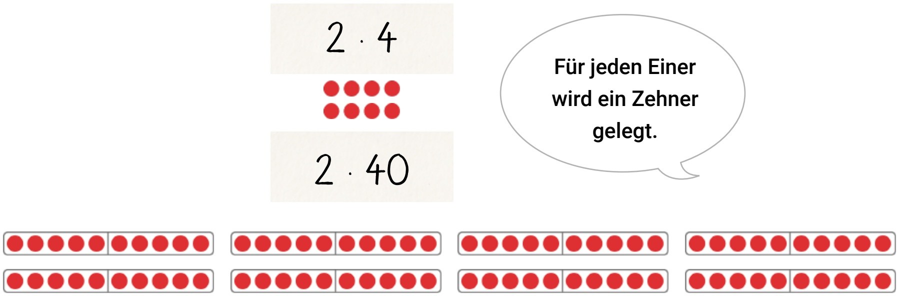


Abb. 3: Das Verzehnfachen verstehen

Bei Aufgaben wie 2 · 40 sollte es also nicht um das Auswendiglernen von (unverstandenen) Merksätzen gehen (Nullen streichen, Einmaleinsaufgabe rechnen und dann Nullen wieder anhängen). Die verständige Nutzung von Analogien zum kleinen Einmaleins und Einsdurcheins ist eine tragfähige Strategie. Dafür sollte eine Vorstellung zum Rechnen mit einem neuen Stellenwert, zum Beispiel über den Zusammenhang einer Einmaleinsaufgabe und der passenden Zehnereinmaleinsaufgabe, aufgebaut werden.

Dieser Zusammenhang zwischen einer Einmaleinsaufgabe und einer Zehnereinmaleinsaufgabe kann durch eine Darstellung mit Plättchen verdeutlicht werden. Um zur Aufgabe 2 · 4 = 8 die entsprechende Zehnereinmaleinsaufgabe 2 · 40 = 80 darzustellen, muss der zweite Faktor der Aufgabe, hier die 4, verzehnfacht werden. Innerhalb der Darstellung wird dementsprechend in jeder der zwei Reihen für jeden der vier Einer ein Zehner gelegt oder einfacher ausgedrückt: Aus Einern werden Zehner. Jeder Einer wird also um einen Stellenwert hin zu einem Zehner vergrößert. Das Ergebnis von 2 · 40 ist somit zehnmal so groß wie das Ergebnis von 2 · 4.

Die folgende Tabelle führt einige weitere Merksätze oder Aussagen auf, die im jeweiligen Moment oft nicht als problematisch wahrgenommen werden. Dies betrifft nicht nur den Unterricht, sondern ebenso die Nachhilfe oder Eltern, die den Lernprozess ihrer Kinder außerhalb des Unterrichts gut gemeint unterstützen möchten. Im Sinne gelingender langfristiger Lernprozesse sollte aber auf sie verzichtet werden, da so die Wahrscheinlichkeit erhöht wird, dass sich Fehlvorstellungen ergeben, die weiteres erfolgreiches Mathematiklernen erschweren.

Dies betrifft im Übrigen nicht nur Rechentricks wie den Nullentrick, sondern auch Aussagen, die darin wurzeln, dass Inhalte folgender Jahrgangsstufen noch nicht angesprochen werden sollen, wie zum Beispiel die Aussage „4 minus 6 geht nicht".

Merksatz/Aussage	Fehlvorstellung	Beispiel für eine Fehllösung
„4 minus 6 geht nicht."	Man kann keine größere von einer kleineren Zahl subtrahieren.	4 − 6 = 2
„Malrechnen heißt vergrößern."	Multiplizieren führt immer zu einem größeren Ergebnis.	3 · 0,4 = 12
„Malrechnen ist eine Kurzform für mehrere gleiche Additionen."	Multiplizieren ist fortgesetztes Addieren gleicher Summanden.	1/4 mal 5 = __+__+__ ?
„Dividieren heißt in kleine Teile zerlegen."	Dividieren führt immer zu einem kleineren Ergebnis.	6 : 1/3 = 18, das kann nicht richtig sein. Das Ergebnis ist 2.
„Hänge einfach eine 0 an, wenn du mit 10 malnehmen musst."	Mit 10 zu multiplizieren, heißt, eine Null direkt rechts neben die Zahl zu schreiben.	1,5 mal 10 = 1,50
„12 : 5 geht nicht."	Wenn der Divisor nicht in den Dividenden passt, ist die Aufgabe nicht lösbar.	12 : 5= ?
„3 : 6 geht nicht."	Man kann eine kleinere Zahl nicht durch eine größere dividieren.	3 : 6 = 2
„Das Komma trennt Euro und Cent sowie Meter und Zentimeter."	Man betrachtet erst das, was links vom Komma steht und anschließend das, was rechts davon steht.	6,86 ist größer als 6,9, weil 86 > 9 3,2 mal 1,4 = 3,8
„Hinter dem Gleichheitszeichen steht immer das Ergebnis."	Links vom Gleichheitszeichen muss man immer rechnen und rechts immer das Ergebnis hinschreiben.	7 + 5 = __ + 6 wird so gelöst: 7 + 5 = 12 + 6
„Null ist ja nichts."	Die Null kann beim Rechnen vernachlässigt werden.	7 · 0 = 7

„Unterstreiche wichtige Signalwörter in der Textaufgabe.“	Signalwörter verweisen auf zu verwendende Rechen-operationen.	**Paula hat 15 Sticker. Sie hat 5 Sticker weniger als Leo. Wie viele Sticker hat Leo? 15 – 5 = 10**

Abb. 4: Merksätze, die Fehlvorstellungen provozieren

Aber es sind nicht nur die Merksätze und verkürzten Aussagen, die das Lernen behindern können. Den langfristigen Lernprozess in den Blick zu nehmen, hat viel weitreichendere Konsequenzen. Denn Mathematik (hier insbesondere die Arithmetik) unterscheidet sich von anderen Fächern bzw. Themengebieten dadurch, dass die Inhalte oft aufeinander aufbauen bzw. in gewisser Weise hierarchisch strukturiert sind: Ohne ein tragfähiges Zahlverständnis im Zahlraum bis 20 kann sich kein tragfähiges Zahlverständnis im 100er-Raum entwickeln, ohne dieses und ohne Operationsverständnis zur Addition kein sicheres Addieren im 100er-Raum, ohne diese Voraussetzungen und ohne Operationsverständnis zur Multiplikation kein sicheres Multiplizieren im 100er-Raum, ohne dieses kein sicheres Multiplizieren in größeren Zahlräumen, … (vgl. Selter et al., 2024, S. 571).
In der Mathematik sind also Lernfortschritte maßgeblich durch das jeweils benötigte mathematische Vorwissen bestimmt, was durch zahlreiche Studien (z. B. Gruber & Stamouli, 2015) bestätigt wird. Zwei Dinge sind daher wichtig: In der *Rückschauperspektive* sollte man die für neue Inhalte relevanten Verstehensgrundlagen identifizieren, diagnostizieren und im Bedarfsfall aufarbeiten. Und es ist in der *Vorschauperspektive* wichtig zu berücksichtigen, was Lernende im Mathematikunterricht zum erfolgreichen Weiterlernen - insbesondere mit Blick auf nachfolgende Klassenstufen - benötigen.

1. Was besagt das Prinzip der Durchgängigkeit?

In Götze et al. (2024) sind fünf Prinzipien guten Mathematikunterrichts formuliert: die Prinzipien der *Verstehensorientierung,* der *kognitiven Aktivierung,* der *Kommunikationsförderung,* der *Lernendenorientierung*, der *Adaptivität* sowie der *Durchgängigkeit* (vgl. auch Holzäpfel et al., 2024, S. 3).

Abb. 5: Fünf Prinzipien guten Mathematikunterrichts

Wie das Prinzip der *Durchgängigkeit* dort beschrieben und durch *drei Teilprinzipien* weiter konkretisiert wird, soll im Folgenden zunächst dargestellt und anschließend anhand von Beispielen veranschaulicht werden.

Das Prinzip der *Durchgängigkeit* ist kein neues Prinzip. Es besagt im Kern, dass die langfristigen Lernpfade kohärent und spiralig aufgebaut werden sollten. In Anlehnung an Bruner (1970) beschreiben Scherer & Weigand (2017, S. 29) das Spiralprinzip wie folgt: „Die Inhalte des Mathematikunterrichts dürfen nicht in unzusammenhängende Gebiete zerfallen, sondern Lernende sollen Beziehungslinien oder -netze im Mathematiklehrgang erkennen. Derartige ‚rote Fäden' sollen den Lernenden eine Orientierung in der Stofffülle einer Wissenschaft geben und […] fundamentale Ideen des Fachs unter einem bestimmten Aspekt aufzeigen."

Das Prinzip der Durchgängigkeit verwendet hingegen als zentrale Bezugspunkte „nicht die (oft zu implizit und abstrakt bleibenden) fundamentalen Ideen, sondern wendet es praktisch auf die durchgängigen Darstellungen und Vorstellungen, die für einen nachhaltigen Verständnisaufbau langfristig zentral sind. Es kann damit die Anforderung der Praxis, für Lernende langfristige Beziehungslinien erkennbar und damit die mathematischen Begriffe verständlicher zu machen, deutlich leichter und handfester erfüllen" (Prediger et al., 2023, S. 424).

Da Lernen immer ein Weiterlernen ist, welches auf Gelerntem aufbaut und zu neuen Lernzielen hinführt, werden im Laufe der Schulzeit grundlegende Inhalte, Aufgaben, Vorstellungen und Darstellungsmittel immer wieder auf verschiedenen Niveaus und unter Berücksichtigung unterschiedlicher Gesichtspunkte angesprochen, um deren Anreicherung, Ausdifferenzierung und Verknüpfung zu erzielen. Idealerweise wird den Lernenden dann auch nicht immer ein ‚neues Thema' angeboten, sondern ein Weiterdenken bereits zuvor behandelter Themen.

Dies ist auch psychologisch hilfreich, weil sich dadurch die subjektiv erlebte Stoffmenge deutlich auf einen Kern reduziert. So sind zum Beispiel die Themengebiete Anteile – Prozente – Wahrscheinlichkeiten – Proportionalität – Maßstab – Verhältnisse eigentlich ein (!) Thema, welches eben aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet wird. Hat man den Kern einmal verstanden, ist das gar nicht mehr so viel Neues. Den Lernenden wird aber bisweilen vermittelt: „Heute kommt ein neues Thema dran." Stattdessen sollte es besser heißen: „Wir denken da mal ein Stückchen weiter". Dazu werden auf jeder Lernstufe diejenigen Aspekte der Lerngegenstände (z. B. Vorstellungen und Darstellungen) ausgewählt, die gut fortsetzbar und für den langfristigen Kompetenzaufbau entlang eines durchgängigen Lernpfads wichtig sind *(Teilprinzip der Fortsetzbarkeit).* Es werden zudem Anknüpfungen zu vorausgehenden Lernstufen explizit hergestellt, indem die Bezüge für die Lernenden thematisiert werden. So erfolgt eine zunehmende Anreicherung, Ausdifferenzierung und Verknüpfung der mathematischen Kompetenzen *(Teilprinzip des Anknüpfens).*

Das Prinzip der Durchgängigkeit ist also ein Prinzip, das beständig sowohl die Vorschau als auch die Rückschau auf die Lernpfade einnehmen muss, die von den Lernenden zu gehen sind. Das bedeutet auch, dass Lücken in den Verstehensgrundlagen rechtzeitig aufgearbeitet werden müssen, sodass die durchgängig notwendigen Vorstellungen und Darstellungen, aber auch Fertigkeiten allen Lernenden zur Verfügung stehen *(Teilprinzip des Aufarbeitens).*

In den folgenden Kapiteln werden diese *drei Teilprinzipien* anhand von exemplarischen mathematischen Inhalten verdeutlicht. Dazu werden zunächst die Zusammenhänge der Lernstufen innerhalb des Grundschulmathematikunterrichts herausgestellt. Ferner wird aufgezeigt, wie dieser Kompetenzaufbau in der Grundschule eine Grundlage für das Weiterlernen in der Sekundarstufe darstellen kann.

2. Warum sollten Lernende die Subtraktion auch als Ergänzen verstehen?

Im Alltagsverständnis wird die Subtraktion häufig mit dem Abziehen (weniger werden, weglaufen, Geld ausgeben, ...) verbunden. Beim Abziehen wird das ermittelt, was übrig bleibt: *der Rest.* Für ein tragfähiges Operationsverständnis reicht es jedoch nicht aus, sich auf das Abziehen zu beschränken. Insbesondere für das weitere Mathematiklernen ist auch die Grundvorstellung des Ergänzens – das Ermitteln des Unterschieds – wichtig, wie die folgende Darstellung zeigt.

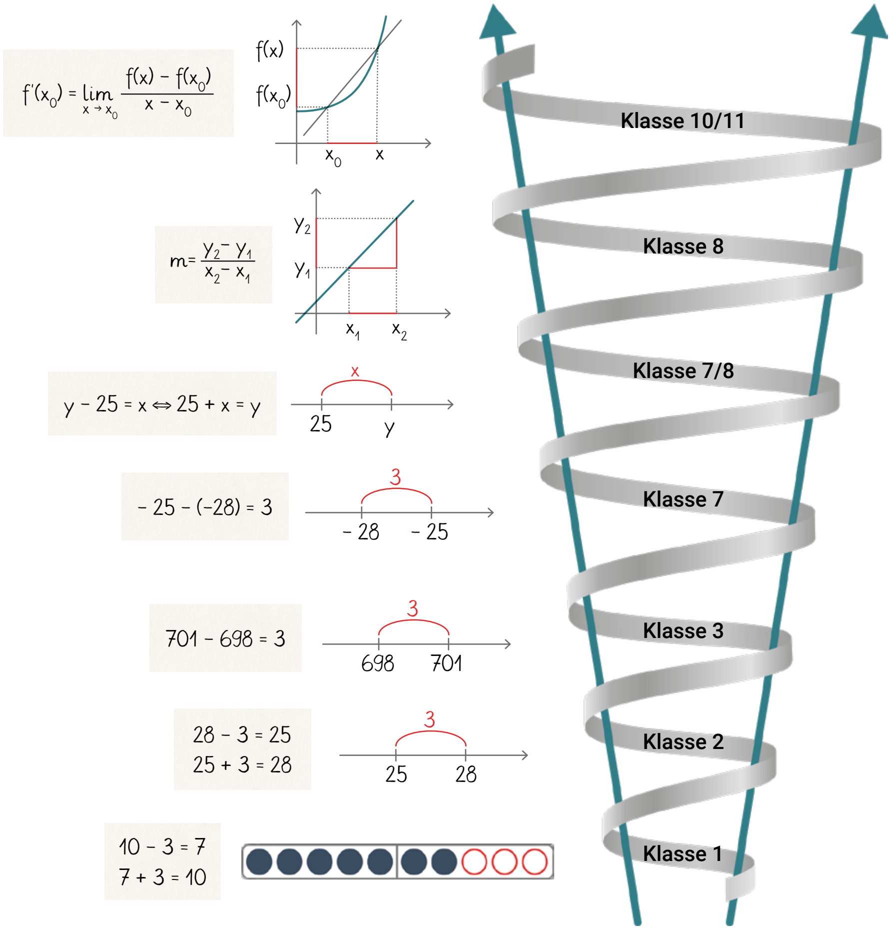


Abb. 6: Langfristiger Kompetenzaufbau am Beispiel „Subtraktion durch Ergänzen"

Somit wird ein Verständnis des Unterschieds schon im 1. Schuljahr angesprochen, wenn beispielsweise ermittelt werden soll, wie viele Plättchen zu sieben Plättchen hinzugelegt werden müssen, damit es zehn Plättchen sind (Zehnerergänzung). Symbolisch wird die Aufgabe auch als 7 + __ = 10 notiert, sieht also wie eine Additionsaufgabe aus. Es handelt sich aber um eine Subtraktionsaufgabe, da man immer dann von Subtraktion spricht, wenn in einem additiven Zahlentripel (3, 7, 10) in einer Aufgabe nach einer der beiden kleineren Zahlen gefragt wird.
Lediglich wenn nach der größten Zahl gefragt wird, handelt es sich im eigentlichen Sinn um eine Addition: 7 + 3 = __ oder 3 + 7 = ___.
Für Grundschulkinder ist es natürlich nicht wichtig, diese fachliche Unterscheidung von Additions- und Subtraktionsaufgabe zu kennen. Vielmehr sollen sie aber frühzeitig erfahren, dass zwei Zahlen nicht nur zusammengefügt oder voneinander abgezogen werden können, sondern dass zudem auch der Unterschied von Zahlen betrachtet werden kann: Wie viel liegt zwischen 7 und 10?
Das Ergänzen wird dann in größeren Zahlräumen als Rechenstrategie bedeutsam, wenn es beispielsweise bei zwei näher beieinanderliegenden Zahlen einfacher ist, den Unterschied zu ermitteln (698 + ___ = 701), weil die Anwendung einer anderen Strategie aufwändiger ist (701 – 698 = 701 – 600 – 90 – 8). Daher wundert es nicht, dass bei ergänzenden Rechenstrategien nachweislich weniger Rechenfehler auftreten (Torbeyns & Verschaffel, 2018). Das Ergänzen benötigen die Lernenden zudem auch bei manchen Verfahren der schriftlichen Subtraktion (vgl. mahiko.dzlm.de/node/187) oder auch bei Sachaufgaben (Eva hat 19 Euro gespart, sie möchte ein Spielzeug für 23 Euro kaufen. Wie viele Euro fehlen noch?).
Und auch in Klasse 7, wenn die negativen Zahlen behandelt werden, ist die Ergänzungsvorstellung eine wichtige Verständnishilfe. Denn was kann man sich vorstellen? Warum rechnet man beispielsweise (– 25) + 28 = 3 bei der Aufgabe (– 25) – (– 28)? Von etwas Negativem etwas Negatives abzuziehen, kann man sich schwerlich vorstellen. Allerdings ist es möglich, den Unterschied, sprich den Abstand auf dem Rechenstrich, zu bestimmen. (– 25) – (– 28) kann man sich als den Unterschied zwischen – 25 und – 28 vorstellen, und dieser ist 3. Diese Verstehensgrundlage können Lehrkräfte in Klasse 7 aber nur lernförderlich nutzen, wenn den Lernenden und auch den Lehrenden die Vorstellung des Ergänzens und die Darstellung am Rechenstrich bereits vertraut sind.
Auch für das Lösen von Gleichungen sind die Vorstellung des Ergänzens und die damit verbundene Umkehrbeziehung von Addition und Subtraktion wichtig. Denn wer für natürliche Zahlen am Rechenstrich versteht, warum die Addition

und die Subtraktion als Ergänzen zusammengehören, der kann diese Vorstellung und Darstellung hochziehen und auf Variablen übertragen. So kann 25 + x = y am Rechenstrich wieder als Subtraktion geschrieben und damit als Unterschied bzw. Abstand gedeutet werden.
Die Äquivalenz gilt natürlich auch, wenn statt 25 eine beliebige andere Zahl genutzt wird. Und auch bei der Bestimmung des Differenzenquotienten, welcher die Steigung der Geraden angibt, die durch zwei Punkte eines Graphen geht, und des Differentialquotienten, welcher die Steigung der Tangente angibt, die durch einen Punkt auf einem Graphen verläuft, muss die Unterschiedsvorstellung aktiviert werden.

3. Warum brauchen Lernende ein tragfähiges Multiplikationsverständnis?

Die Multiplikation erscheint auf den ersten Blick möglicherweise gar nicht so komplex und ihr Verständnis wenig relevant zu sein. Hauptsache, die Lernenden können das Einmaleins? Dies ist weit gefehlt. Ohne ein tiefgehendes Multiplikationsverständnis wird ein langfristiges Weiterlernen sogar nahezu unmöglich. An dieser Stelle stellt sich die berechtigte Frage, was Multiplikationsverständnis ausmacht und wie es langfristig von Klasse 1 ausgehend aufgebaut werden kann. Die folgende Grafik illustriert einen sehr komprimierten Lernpfad, denn insbesondere in der Sekundarstufe gibt es noch viele weitere mathematische Inhaltsbereiche, die ein multiplikatives Verständnis notwendigerweise erfordern.
Egal, ob Grundschulkinder das kleine Einmaleins erst erlernen, die Ergebnisse von Einmaleinsaufgaben aus Kernaufgaben ableiten oder das Zehnereinmaleins erarbeiten: Die zentrale Verstehensgrundlage im Mathematikunterricht der Grundschule besteht darin, dass mit gleich großen Gruppen gearbeitet wird. So kann die Aufgabe 3 · 4 als *drei Vierer,* die Aufgabe 3 · 40 als *drei Vierziger* und die Aufgabe 13 · 4 als 13 Vierer oder auch als zehn Vierer und nochmals drei Vierer gedeutet werden. Lernen die Kinder aber das Einmaleins lediglich und vorschnell auswendig, so bauen sie diese zentrale Vorstellung nicht auf und können damit auch nicht auf diese zurückgreifen, wenn der multiplikative Lernpfad fortgesetzt wird.
Die Konsequenz daraus ist, dass das Einmaleins und die damit verbundenen Merksätze (s. S. 6) immer und immer wieder neu auswendig gelernt werden und sich die gefestigten Fehlvorstellungen nur sehr schwer abbauen lassen. Aber wie

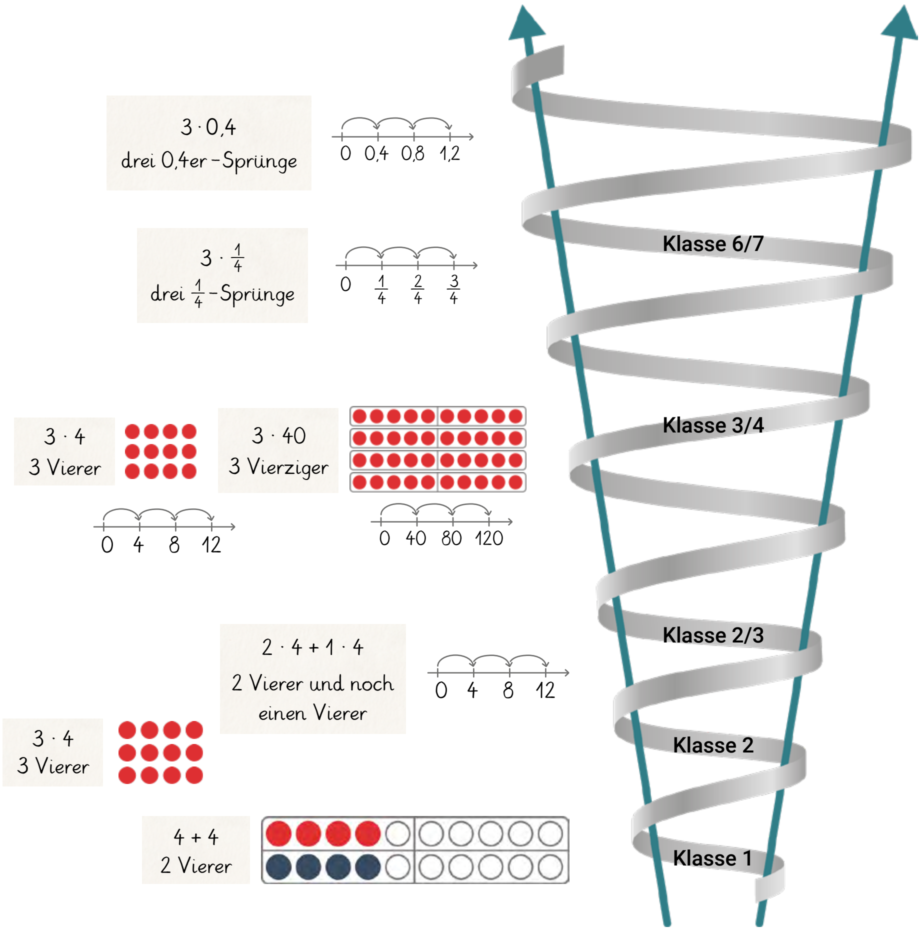


Abb. 7: Langfristiger Kompetenzaufbau am Beispiel „Multiplikation verstehen"

kann diese so zentrale Vorstellung der gleich großen Gruppen langfristig angelegt werden? Welche Darstellungsmittel und welche Sprechweisen werden hier langfristig benötigt?

Eigentlich beginnt der Lernpfad zur Multiplikation bereits im ersten Schuljahr, denn die Kinder lernen Verdopplungsaufgaben wie 4 + 4 kennen, legen diese z. B. im Zwanzigerfeld und können diese direkt als ‚zwei Vierer' deuten. Ähnliches geschieht, wenn unter Ausnutzung der *Kraft der Fünf* Aufgaben im Zwanzigerfeld mit Fünferstreifen gelegt werden. Die Kinder stellen dann fest, dass sich mit vier Fünfern das gesamte Zwanzigerfeld auslegen lässt.

Bei der Einführung der Multiplikation kann dieses Wissen vertieft, muss aber natürlich auch auf alle Aufgaben des kleinen Einmaleins erweitert werden. Dabei lässt sich die multiplikative Vorstellung der gleich großen Gruppen besonders gut an rechteckigen Punktefeldern verdeutlichen. Durch das Einkreisen der gleich großen Gruppen und Sprechweisen wie „Ich sehe drei Vierer, also passt die Aufgabe 3 mal 4" kann verhindert werden, dass lediglich die äußeren Ränder des Punktefeldes als relevant angesehen werden: „Drei mal vier passt, weil in der ersten Spalte drei Punkte sind und in der ersten Reihe vier."

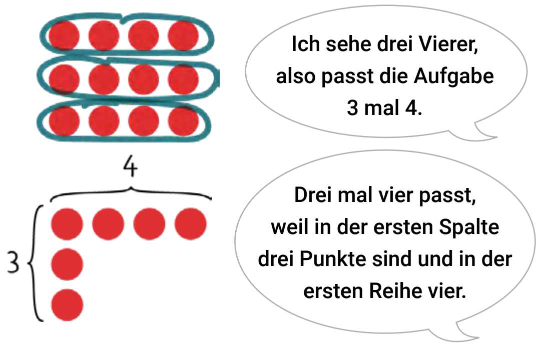


Abb. 8: Wie Kinder multiplikative Strukturen in Punktebildern verstehensorientiert (oben) oder oberflächlich (unten) erklären

Dies ist eine gängige Fehlvorstellung von Kindern, welche die multiplikative Vorstellung der gleich großen Gruppen noch nicht aufgebaut haben. Verfestigt sich diese bruchstückhafte Vorstellung, wird das Weiterlernen erschwert. So kann mit einer solchen Vorstellung beispielsweise kaum ein Verständnis für Flächeninhalte aufgebaut werden, mit der Konsequenz, dass sämtliche Flächeninhaltsformeln unverstanden bleiben, verwechselt werden oder auch schnell wieder in Vergessenheit geraten.

Neben den flächigen Darstellungen im Punktefeld werden auch lineare Darstellungen am Rechenstrich behandelt (vgl. Abschnitt 4), da diese Darstellungen auch für das Multiplizieren mit Brüchen und Dezimalzahlen genutzt werden können: $3 \cdot \frac{1}{4}$ sind drei Sprünge der Länge $\frac{1}{4}$ und $3 \cdot 0{,}4$ sind drei Sprünge mit einer Länge von 0,4.

Haben die Kinder ein Verständnis von „Malrechnen" als ein Denken in gleich großen Gruppen aufgebaut und können sie dabei auf die anschaulichen Darstellungen am Punktefeld oder am Rechenstrich zurückgreifen, so können sie auch schnell Zusammenhänge zwischen Aufgaben erklären. Dann ist es vergleichsweise leicht zu erkennen, dass zwei Vierer und ein Vierer zusammen dasselbe wie drei Vierer sind (siehe hierzu auch Abschnitt 5). Gleiches gilt für das Multiplizieren mit Zehnerzahlen, denn die Idee der gleich großen Gruppen lässt sich problemlos hierauf übertragen: „3 · 40 sind 3 Vierziger. Das Ergebnis von 3 · 40 ist somit zehnmal so groß wie das Ergebnis von 3 · 4.“

In der weiterführenden Schule muss dieses Denken in gleich großen Gruppen selbstverständlich auf Gruppen übertragen werden, die z. B. kleiner Eins sein können – also auf Brüche und Dezimalzahlen. Aber diese Übertragung kann durch die anschauliche Darstellung am Rechenstrich und durch das Denken in gleich großen Gruppen vergleichsweise einfach gelingen. Dieses Verständnis kann allerdings kaum erreicht werden, wenn die Kinder in der Grundschule das Einmaleins lediglich auswendig lernen oder der Lernpfad auf ein Aufsagen der Reihen reduziert wird.

Natürlich sollen die Kinder das Einmaleins langfristig auswendig verfügbar haben. Aber ohne multiplikatives Verständnis als ein Denken in gleich großen Gruppen bleibt das Wissen über die Multiplikation am Einmaleins haften und kann nicht für die Brüche und Dezimalzahlen angereichert und ausdifferenziert werden.

4. Warum sollten Lernende den Zahlenstrahl flexibel deuten können?

Neben der Vorstellung der natürlichen Zahlen als Anzahlen (Wie viel sind 8?) brauchen die Lernenden auch ein Verständnis von Zahlen als Position in einer Abfolge von Zahlen (Wo liegt die Zahl in der Zahlenfolge?). Dieses Verständnis lässt sich besonders gut mithilfe des Zahlenstrahls aufbauen, der zu einem zentralen Denkmittel werden kann und dies insbesondere auch über den Mathematikunterricht der Grundschule hinaus.

In den ersten drei Schuljahren baut sich der Zahlenstrahl für die Kinder sukzessive auf. So lernen die Kinder im ersten Schuljahr zunächst, sich an der Zwanzigerreihe zu orientieren. Fragestellungen wie: „Zwischen welchen Zahlen liegt die Zahl 15?“ oder „Welche Zahl ist der Nachfolger von 9?“ helfen, bereits im kleinen Zahlraum eine lineare Vorstellung von Zahlen als Abfolge zu bekommen. Bestmöglich können sich die Kinder an der Zwanzigerreihe flexibel bewegen, was dazu führt, dass sie in der Lage sind, in größeren Schritten und auch rückwärts zu zählen.

Dieses Wissen wird im zweiten und dritten Schuljahr weiter ausgebaut, da der Zahlenstrahl passend zum neuen Zahlraum erweitert wird. Die Kinder lernen,

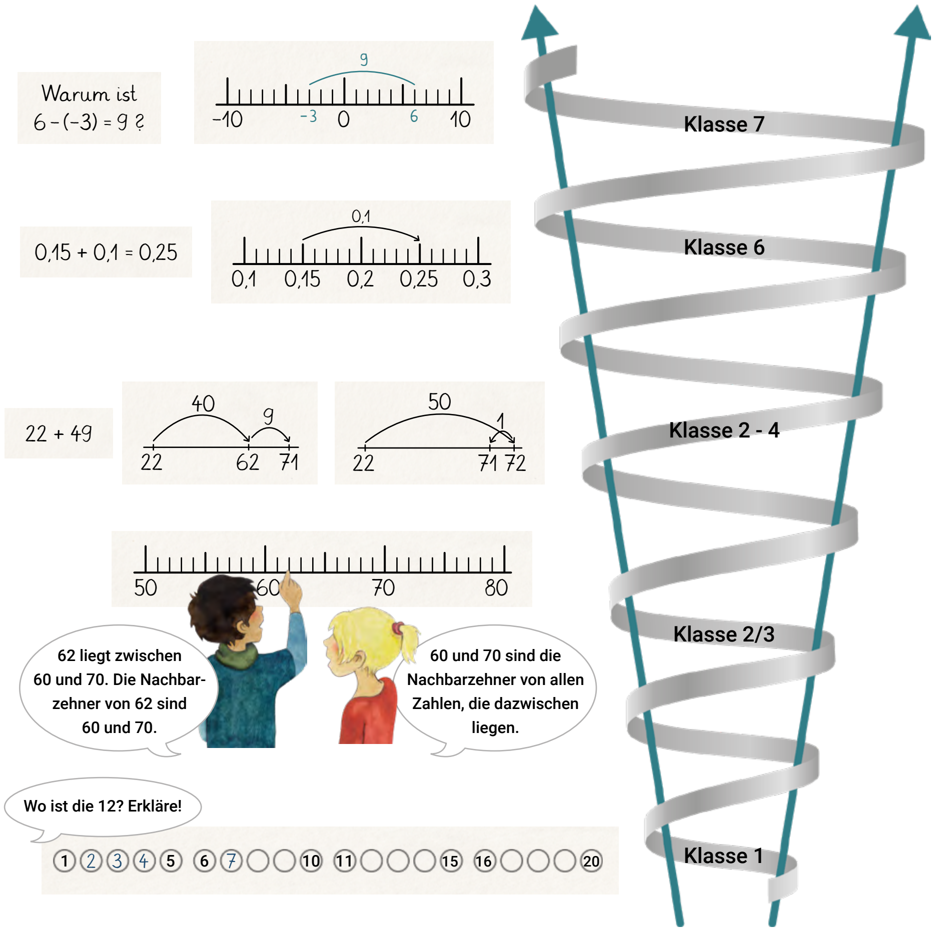


Abb. 9: Langfristiger Kompetenzaufbau am Beispiel des Zahlenstrahls

sich immer besser zu orientieren. So hat das Finden der Nachbarhunderter, der Nachbarzehner und der Nachbarzahlen stets das Ziel, den Ort der gesuchten Zahl genauer einzugrenzen: „Wo liegt die Zahl 73? Zwischen welchen Nachbarzehnern musst du sie suchen? Zwischen welchen Nachbarzahlen liegt sie?“

Diese Orientierungsübungen sind hilfreich, um den Rechenstrich (auch leerer Zahlenstrahl genannt) einzuführen. Dieser ist als Darstellungs- und Denkmittel für Rechenwege absolut bedeutsam, da an ihm – mit Ausnahme des stellenweisen Rechnens (22 + 49) = (20 + 40) + (2 + 9) – jeder Rechenweg dargestellt und erklärt werden kann. So kann die Aufgabe 22 + 49 in Schritten gerechnet werden. Die beiden Rechenschritte „erst + 40, dann + 9“ können durch Sprünge am

Rechenstrich dargestellt werden. Alternativ lässt sich die Aufgabe auch mit der Hilfsaufgabe „+ 50 und dann – 1“ rechnen.

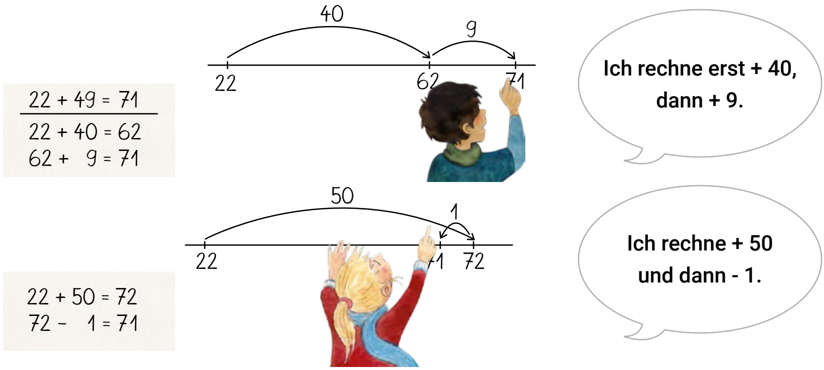


Abb. 10: Verschiedene Rechenwege am Rechenstrich

Das Erklären dieser vermeintlich anspruchsvollen Strategie kann am Rechenstrich gut gelingen, wenn die Lernenden nicht nur wissen, was sie machen, sondern auch, warum sie dies tun: „Erst einen 50er Sprung weiter. Dann bin ich aber einen zu weit gesprungen. Daher muss ich eins wieder zurückgehen.“ Aber ohne eine vorherige Behandlung des Zahlenstrahls und der Fähigkeit der Kinder, sich auf diesem zurechtzufinden, kann der Rechenstrich von den Kindern nicht als Darstellungsmittel für Rechenwege genutzt werden.

Wird der Zahlraum im vierten Schuljahr auf den Millionenraum erweitert und werden die Zahlbereiche ab der Klasse 6 um die Bruchzahlen, die Dezimalzahlen, die negativen Zahlen usw. ergänzt, ist der Zahlenstrahl (oder auch der Rechenstrich) oftmals das naheliegendste Darstellungsmittel. So kann die Zahl 326 485 schwerlich mit Plättchen dargestellt werden. Die Darstellung dieser Zahl als Ort am Zahlenstrahl ist dann eine gute Möglichkeit, um mit solchen großen Zahlen in der Vorstellung umzugehen.

Vergleichbares gilt für den Umgang mit Bruch- und Dezimalzahlen. Um beispielsweise Dezimalzahlen zu visualisieren, wird die Vorstellung des ‚Reinzoomens‘ (bzw. Verfeinerns) genutzt, um zu verdeutlichen, dass es (auch) Zahlen zwischen den bekannten natürlichen Zahlen wie z. B. 0 und 1 gibt. Ebenso ist der Zahlenstrahl hilfreich, um zu erklären, wie mit Dezimalzahlen verständig gerechnet werden kann. Zudem kann der Zahlenstrahl ‚nach links‘ um den Bereich der negativen Zahlen erweitert werden. Verknüpft mit der Vorstellung des Ergänzens (vgl. Abschnitt 2) bietet er die Möglichkeit, verstehensorientiert zu erklären, warum 6 – (– 3) = 9 gilt, denn der Abstand zwischen – 3 und 6 beträgt 9.

Später wird der Zahlenstrahl zur x-Achse im Koordinatensystem und auch die y-Achse kann als Zahlenstrahl gedeutet werden. Die Lokalisierung von Stellen auf dem Zahlenstrahl wird dann zur Festlegung von Punkten im Koordinatensystem weiterentwickelt. Und im Koordinatensystem erfolgt dann der gleiche Prozess von den ganzzahligen Schritten hin zur Kontinuität und später dann zu den reellen Zahlen, also von einzelnen Punkten zur durchgezogenen Linie bei Funktionsgraphen.
In diversen Lehrwerken werden nur wenige Lerngelegenheiten geboten, um den Zahlenstrahl und den daraus resultierenden Rechenstrich bereits vom ersten Schuljahr an als Denkmittel zu etablieren. So wird das Finden der Nachbarhunderter, -zehner und -zahlen einer bestimmten Zahl oftmals nur auf symbolischer Ebene vorgenommen. Der in diesem Abschnitt aufgezeigte Lernpfad verdeutlicht, welche Bedeutung der Zahlenstrahl bzw. der Rechenstrich als zentrales Darstellungsmittel gerade auch in höheren Klassen einnimmt. Daher muss er behutsam parallel zur Vorstellung von Zahlen als Mengen von Klasse 1 beginnend aufgebaut werden. Zudem muss das Verständnis für Zahlen als Positionen auf dem Zahlenstrahl oder Rechenstrich sukzessive erweitert und vertieft werden. Dementsprechend macht es Sinn, dieses Darstellungsmittel von Beginn an zu einem festen Bestandteil bei Aufgabenbearbeitungen zu machen.

5. Warum sollten Lernende Aufgaben aus anderen Aufgaben ableiten können?

Wie bereits ausgeführt: Dass die Lernenden am Ende von Klasse 2 das Einmaleins (weitgehend) auswendig beherrschen, ist zweifelsohne ein wesentliches Ziel des Unterrichts, jedoch keineswegs das einzige bei der Behandlung der Multiplikation im 2. Schuljahr. Mindestens genauso wichtig ist der Erwerb von Operationsvorstellungen zur Multiplikation, im Einzelnen der Erwerb bzw. Ausbau von Grundvorstellungen, die Fähigkeit zur Darstellungsvernetzung sowie die Nutzung von Aufgabenbeziehungen durch Nutzung von Rechengesetzen *(mahiko.dzlm.de/node/71*; Selter & Zannetin 2019, S. 44ff.; Dreher & Holzäpfel 2021).
Auch wenn das Kommutativgesetz eine gewisse Bedeutung hat ($5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$), gilt das Distributivgesetz beim Multiplizieren als das zentrale Gesetz. Bereits im ersten Schuljahr können die Lernenden drei Zweier als zwei Zweier plus einen Zweier sehen ($3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2$). Im zweiten Schuljahr lernen die Kinder dann, Ergebnisse von Einmaleinsaufgaben aus sog. Kernaufgaben, Königsaufgaben oder

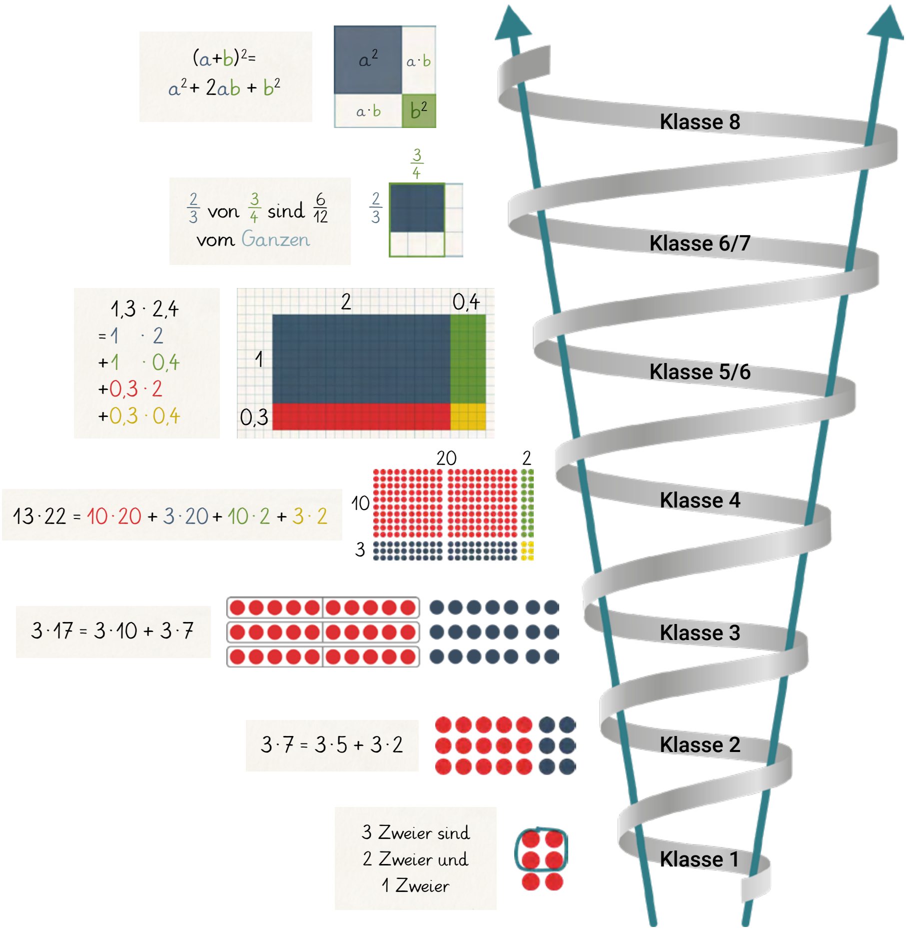


Abb. 11: Langfristiger Kompetenzaufbau am Beispiel „Distributivgesetz verstehen"

Hilfsaufgaben abzuleiten: drei Siebener sind drei Fünfer und drei Zweier.
Die 100 Aufgaben des kleinen Einmaleins sollten auswendig verfügbar sein, darüberhinausgehende Multiplikationsanforderungen können in der Regel allerdings nicht mehr abgespeichert werden. Insofern ist die verstehensorientierte Nutzung des Distributivgesetzes auch in den weiteren Schuljahren der Primarstufe nötig, um Ergebnisse von Aufgaben wie $3 \cdot 17$ oder $13 \cdot 22$ zu ermitteln. Dies trägt auch dazu bei, dass der Hauptfehler nicht auftritt, bei welchem lediglich Zehner mal Zehner und Einer mal Einer gerechnet wird ($13 \cdot 22 = 206$).
Beim Verständnis von Brüchen als Anteilen vom Anteil eines Ganzen ($\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$)

wird diese Sichtweise auf die Multiplikation ebenso benötigt wie bei der Multiplikation von Brüchen generell ($\frac{13}{10} \cdot \frac{24}{10}$) oder von Dezimalzahlen ($1{,}3 \cdot 2{,}4$). Schließlich findet sich die distributive Sicht auf die Multiplikation auch in der Algebra, also beispielsweise bei der 1. Binomischen Formel oder bei allen algebraischen Ausdrücken, bei denen ausgeklammert ($4a + 8b = 4 \cdot (a + 2b)$) oder ausmultipliziert werden muss ($5 \cdot (2a + 3b) = 10a + 15b$).
Im Verlauf der Entwicklung der Darstellungen über die Schuljahre hinweg wird auch der Übergang von der diskreten Darstellung mit abzählbaren Punkten hin zur kontinuierlichen Darstellung als Fläche deutlich. Damit geht die Zahlbereichserweiterung einher, bei welcher eine ständige Verfeinerung der Zahlengeraden erfolgt. Gerade die Flächendarstellung mit Variablen fällt Lernenden in höheren Klassenstufen schwer – da kann ein Schritt zurück in die arithmetische Darstellung mit Punktmustern hilfreich sein.

6. Warum sollten Lernende Aufgabenformate wiederholt bearbeiten?

Substanzielle Aufgabenformate – wie Zahlenmauern, Rechendreiecke oder Entdeckerpäckchen – können im Mathematikunterricht eingesetzt werden, damit Lernende nicht nur Rechenfertigkeiten üben, sondern gleichzeitig mathematisch aktiv werden, indem sie Auffälligkeiten und Zusammenhänge erkennen, beschreiben und begründen. Sie bieten Möglichkeiten, sowohl die inhaltsbezogenen als auch die prozessbezogenen Kompetenzen zu fördern.
Substanzielle Aufgabenformate können ihr wahres Potenzial allerdings nur dann entfalten, wenn sie im Sinne des Prinzips der Durchgängigkeit über die Schuljahre hinweg zum Einsatz kommen. Das Aufgaben*format* – der gemeinsame Rahmen, die gemeinsame Form – ist dann den Lernenden bekannt und muss nicht neu eingeführt werden. Die Aufgabenstellungen variieren jedoch über die Schuljahre hinweg. Deren Bearbeitung kann so zu neuen Einsichten führen und sich dafür bereits erworbene Erkenntnisse zunutze machen.
Dies hat zugleich auch eine entlastende Funktion, sodass man sich besser auf die Inhalte konzentrieren kann. Beispielsweise beim Aufgabenformat *Summen aufeinanderfolgender Zahlen* ist einerseits zu ermitteln, welche Ergebnisse sich bei der Addition aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ergeben. Andererseits sollen für vorgegebene Zahlen alle Zerlegungen in aufeinanderfolgende Summanden gefunden werden.

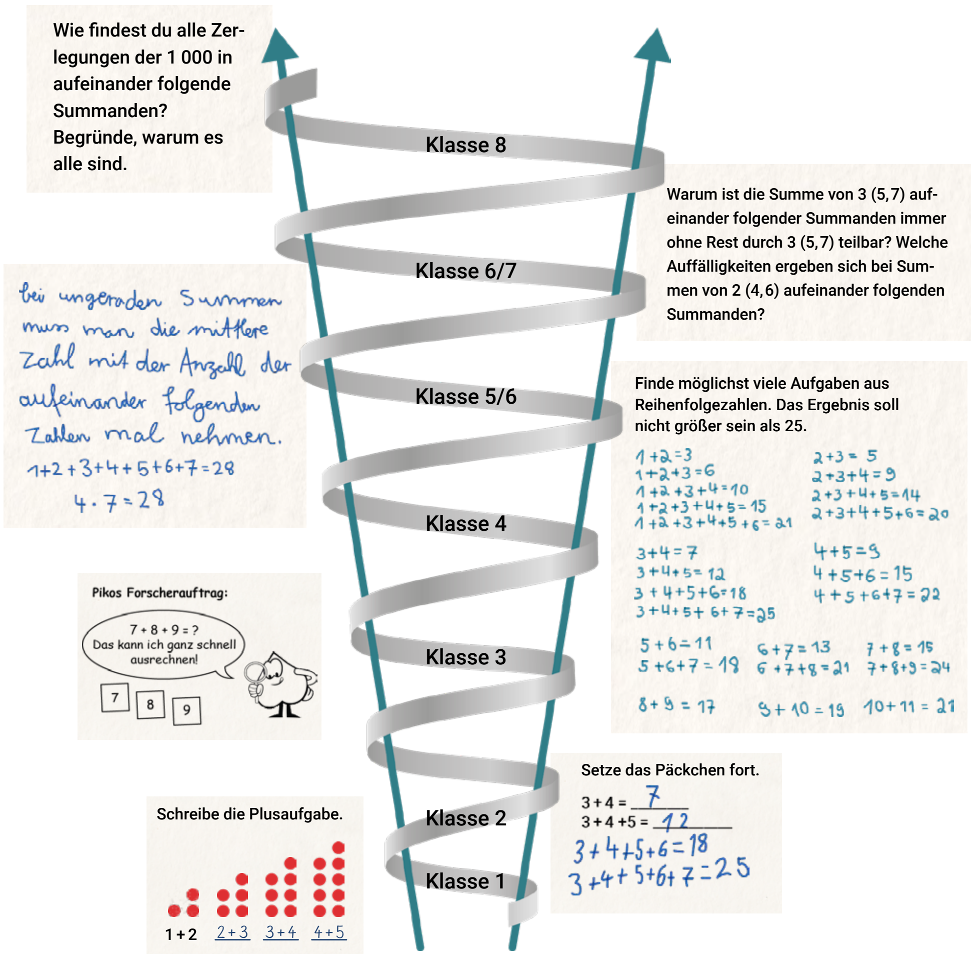


Abb. 12: Langfristiger Kompetenzaufbau am Beispiel „Summe aufeinanderfolgender Zahlen"

So kann eine Aufgabe im 1. Schuljahr für die Lernenden darin bestehen, immer zwei benachbarte Zahlen zu addieren und das so entstehende Entdecker-Päckchen zu untersuchen. Vielleicht kann auch schon darauf eingegangen werden, dass sich somit stets ungerade Zahlen als Summe ergeben.

Im 2. Schuljahr kann die Anzahl der Spalten im Punktebild bzw. die Anzahl der Summanden wachsen. Alternativ können die Lernenden selbst Aufgaben mit sog. Reihenfolgezahlen erfinden und auf Besonderheiten untersuchen.

Das Beispiel aus dem 3. Schuljahr ist ein Beispiel für gezieltere Forschungsaufträge. Hier geht es darum, Dreiersummen geschickt zu berechnen, indem z. B. ein Ausgleich vom dritten zum ersten Summanden erfolgt, sodass drei Achter erzeugt werden können. Die Lernenden können dies an mehreren Aufgaben ausprobieren und auf dieser Grundlage auch (ansatzweise) die Allgemeingültigkeit solcher Strukturen begründen.

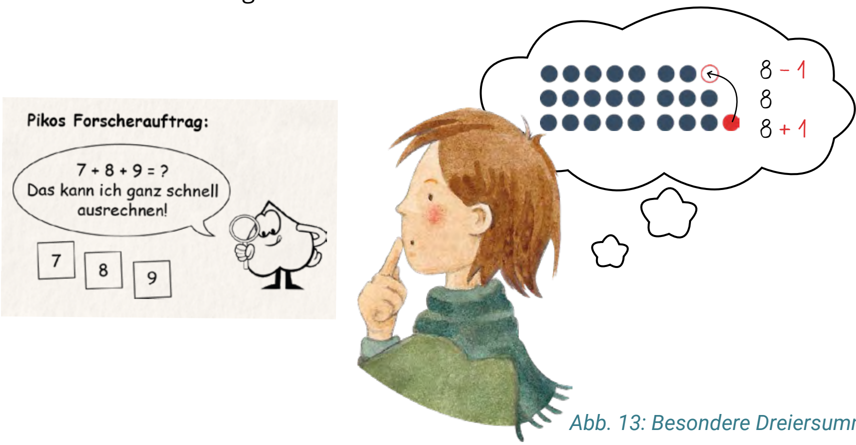


Abb. 13: Besondere Dreiersummen

Zum Ende der Grundschulzeit könnte die Aufgabe bearbeitet werden, für alle Zahlen kleiner gleich 25 möglichst geschickt alle Zerlegungen in Summen aufeinanderfolgender Zahlen zu finden und auch zu begründen, warum alle gefunden wurden. Die vorausgegangene Abbildung 12 zeigt eine der beiden Möglichkeiten, durch systematisches Auflisten die Vollständigkeit einer Zahlzerlegung zu begründen, indem Summen so lange ‚nach hinten verlängert' werden, bis sie das Ergebnis 25 überschreiten. Die andere Möglichkeit besteht übrigens darin, die Anzahl der Summanden (2er-Summen, 3er-Summen, ...) konstant zu lassen und diese jeweils so lange um eins zu erhöhen, bis die 25 überschritten wird.

Die Zuweisung der Aktivitäten zu den Schuljahren ist flexibler zu handhaben als bei den vorangehenden Beispielen, in denen der Zahlraum oder der Zahlbereich gewisse Vorgaben macht. So muss auch die Aktivität nicht im 5. oder 6. Schuljahr angesiedelt werden, bei welcher es darum geht, Zusammenhänge zwischen Siebener-Summen, deren Mittelzahl und der jeweiligen Ergebniszahl zu erkunden.

Was aber kann in der Auseinandersetzung mit der Summe von Reihenfolgezahlen und der jeweiligen Ergebniszahl im Allgemeinen auffallen? Bei einer ungeraden Anzahl von Summanden wird schnell deutlich, dass die Mittelzahl eine besondere Rolle einnimmt, da ein Ausgleich um die Mittelzahl herum vergleichsweise leicht

möglich ist (z. B. 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 · 4). Bei einer geraden Anzahl von Summanden ist dies nicht so leicht möglich, da es keine (natürliche) Mittelzahl gibt. Allerdings lassen sich jeweils zwei Zahlen zusammenfassen, wobei die Anzahl der Summanden halbiert wird (2 + 3 + 4 + 5 = (3 + 4) + (2 + 5) = 2 · 7).
Auf dieser Grundlage können die Lernenden dann die Aufgabe, alle Möglichkeiten zu finden, bearbeiten und beispielsweise die Zahl 1.000 in aufeinanderfolgende Zahlen zerlegen. Hier existieren drei Möglichkeiten, zwei davon mit einer ungeraden Anzahl von Summanden und einer Mittelzahl, welche sich ergibt, wenn man 1 000 durch die Anzahl der Summanden dividiert.

5 · 200 = 200 + 200 + 200 + 200 + 200 = 198 + 199 + 200 + 201 + 202
25 · 40 = 40 + 40 + … + 40 + 40 = 28 + 29 + … + 51 + 52

Bei der weiteren Möglichkeit liegt mit 16 eine gerade Anzahl von Summanden vor. Summiert man ‚von außen nach innen' jeweils zwei Summanden, ergibt sich eine Zahl, welche mit der Hälfte der Anzahl der Summanden multipliziert (8 · 125) die 1 000 ergibt.

8 · 125 = 125 + 125 + … + 125 + 125 = (55 + 75) + (56 + 74) + … + (62 + 63)
= 55 + 56 + … + 74 + 75

Weitere Variationsmöglichkeiten sind denkbar. Ein Video mit weiteren Informationen zum mathematischen Hintergrund finden interessierte Lesende unter *adi.dzlm.de/node/160.*

7. Warum sollten Lernende aus geometrischen Handlungen auch geometrische Begriffe lernen?

Die bislang angesprochenen Themen entstammten im Wesentlichen den Inhaltsbereichen Arithmetik bzw. Algebra. Aber auch für die anderen Inhaltsbereiche ist das Prinzip der Durchgängigkeit von besonderer Bedeutung, zum Beispiel für die Geometrie.
Die Auseinandersetzung mit geometrischen Themengebieten im Mathematikunterricht der Grundschule findet häufig auf eine handlungsorientiertere Weise statt, sodass die Kinder durch die konkreten Handlungen verstehensorientierte Vorstellungen zum betreffenden Inhalt aufbauen können. Im Folgenden wird aufgezeigt, wie der Lernpfad zum Flächeninhalt ausgehend von konkreten Handlungserfahrungen hin zur Flächeninhaltsformel gestaltet werden kann.
Sollen Lernende ein tiefgehendes Verständnis für den Flächeninhalt und für die Berechnung des Flächeninhalts mithilfe einer spezifischen Formel erwerben, so

müssen sie zunächst verstehen lernen, was der Flächeninhalt besagt. Die konzeptuelle Vorstellung ist, dass die Fläche mittels Einheitsquadraten, und zwar im Speziellen mit Quadratmetern, Quadratdezimetern oder Quadratzentimetern, lückenlos ausgelegt wird. Die Flächeninhaltsformel dient lediglich der Berechnung der genauen Anzahl solcher Einheitsquadrate, welche zum Auslegen der Fläche benötigt werden.

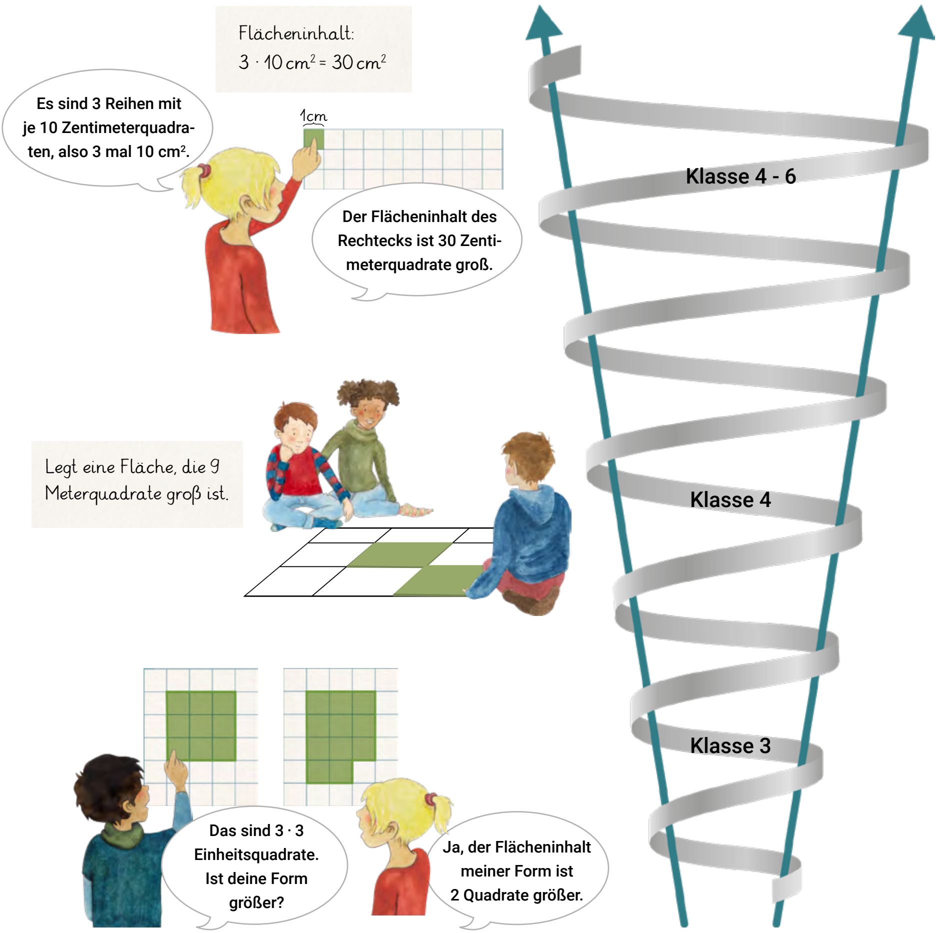


Abb. 14: Langfristiger Kompetenzaufbau am Beispiel "Flächeninhalt"

Somit ist es vor der Thematisierung von Flächeninhaltsformeln ab Klasse 4 notwendig, dass die Kinder zunächst eine Vorstellung vom Flächeninhalt erwerben. Dazu bietet es sich an, mit dem Auslegen der Flächen mit Einheitsquadraten in Klasse 3 zu beginnen, sodass der Fokus der Handlung auf das vollständige Auslegen von Flächen mit gleichen bzw. einheitlichen Quadraten gelegt wird.
Anschließend werden in Klasse 4 standardisierte Quadrate zum Ausmessen der Flächen eingeführt und genutzt. Da die Kinder allerdings noch keine Vorstellung von *‚hoch 2'*, also vom Potenzieren, besitzen, ist es sinnvoll, diese besonderen Quadrate zum Auslegen der Flächen als *Zentimeterquadrate, Dezimeterquadrate* bzw. *Meterquadrate* zu bezeichnen, statt die Potenzsprechweise verfrüht zu benutzen (Quadratzentimeter, Quadratdezimeter, Quadratmeter), welche im weiteren Mathematikunterricht verwendet wird. Dadurch kann der Fokus auf die besonderen Eigenschaften der Einheitsquadrate gelegt werden, mit denen Flächen standardmäßig ausgelegt werden. Anschließend können als synonyme Begriffe die Fachausdrücke und Schreibweisen unter Verwendung der Potenzen (Quadratzentimeter etc.) behandelt werden. Darauf aufbauend können dann die (verschiedenen) Formeln zur Berechnung von Flächeninhalten erarbeitet werden.
Da dieser Lernpfad bei den konkreten Handlungen des Auslegens von Flächen mit Einheitsquadraten ansetzt und bis zu den Flächeninhaltsformeln führt, kann langfristig ein tiefgehendes Verständnis für den Flächeninhalt aufgebaut werden. So lässt sich einem rein oberflächlichen Anwenden der Formeln – das häufig zu Verwechslungen führt – gezielt entgegenwirken. Aufgrund dieses Verständnisses sind nicht wenige Lernende in der Lage, vergessene Flächeninhaltsformeln wieder herzuleiten.

8 Fazit

Die einzelnen Beispiele illustrieren, dass ein Unterricht gemäß dem Prinzip der Durchgängigkeit nicht einfach nur die Idee verfolgt, gleiche Inhalte in unterschiedlichen Schuljahren, aber zum Beispiel mit anderen Zahlenwerten (oder auch Zahlbereichen) zu thematisieren. Vielmehr geht es darum, dass bereits in vorherigen Schuljahren begonnene Lernpfade seitens der Lehrperson immer wieder bewusst aufgegriffen und weiter vertieft werden. Die Beispiele verdeutlichen somit auch, wie stringent mathematische Lernziele miteinander vernetzt sind. Diese Vernetzung kann auch den Kindern bewusst gemacht werden, wenn im Mathematikunterricht explizit an vorherige Kompetenzen angeknüpft wird.

Dann reduziert sich auch die wahrgenommene Menge der vielen verschiedenen Themen bzw. Buchkapitel. Zudem erleichtert es auch die Zugänge, da die Vernetzung der einzelnen Themen sichtbar wird. Dies kann verhindern, dass mathematische Inhalte isoliert voneinander erlebt werden – auch von den Lehrkräften – und unverbunden nebeneinanderstehen und in der Folge lediglich für die nächste Klassenarbeit gelernt und anschließend schnell wieder vergessen werden.

Wird stattdessen herausgestellt, wie mathematische Lerninhalte, Darstellungen und Vorstellungen zusammenhängen, aufeinander aufbauen und vorherige Kompetenzen genutzt werden können, um Neues zu lernen bzw. Bekanntes zu vertiefen, kann dies entscheidend dazu beitragen, dass neue mathematische Lerninhalte verstehensorientiert erworben werden können: ‚Nutze das, was du schon weißt und kannst. Und vertiefe das! Mathematiklernen ist immer ein Weiterlernen.‘

Lehrkräfte aller Schulstufen sollten sich daher und auch über die Schulstufen hinweg miteinander austauschen und die langfristigen Lernprozesse der Lernenden in den Blick nehmen. Dies bedeutet insbesondere auch in der Vorschauperspektive, also bezogen auf die nachfolgenden Schuljahre, kontinuierlich Verstehensgrundlagen zu sichern, auch wenn es aktuell nicht wichtig zu sein scheint. Und in der Rückschauperspektive besagt dies, fehlende Verstehensgrundlagen aufzuarbeiten, auch wenn laut Lehrplan eigentlich andere Inhalte zu behandeln wären – genau hierfür ist ein kollegialer Austausch unerlässlich.

Literatur

Bruner, J. S. (1970). *Der Prozeß der Erziehung.* Berlin: Schwann.

Dreher, A. & Holzäpfel, L. (2021). Mit Visualisierungen verstehen(d) lernen. *mathematik lehren (224),* 2–9.

Götze, D., Selter, Ch., Holzäpfel, L., Prediger, S. & Rösken-Winter, B. (2024). *Fünf Prinzipien guten Mathematikunterrichts.* pikas.dzlm.de/node/2285.

Gruber, H. & Stamouli, E. (2015). Intelligenz und Vorwissen. In E. Wild & J. Möller (Hg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 25–44). Berlin & Heidelberg: Springer.

Holzäpfel, L., Prediger, S., Götze, D., Rösken-Winter, B. & Selter, Ch. (2024). Qualitätsvoll Mathematik unterrichten: Fünf Prinzipien. *mathematik lehren (242),* 2–8.

Prediger, S., Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (2023). Durchgängigkeit von Darstellungen und Vorstellungen für den nachhaltigen Verständnisaufbau: Spiralcurriculum praktisch gewendet. *MNU-Journal,* 421–427.

Scherer, P. & Weigand, H.-G. (2017). Mathematikdidaktische Prinzipien. In M. Abshagen, B. Barzel, J. Kramer, T. Riecke-Baulecke, B. Rösken-Winter, B., & C. Selter (Hg.), *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten* (S. 28–42). Seelze: Klett Kallmeyer.

Selter, Ch. & Zannetin, E. (2025). *Mathematik unterrichten in der Grundschule.* Seelze: Klett Kallmeyer.

Selter, Ch., Götze, D., Brandt, J. & Gutscher, A. (2024). Zahlen und Operationen – Arithmetik in der Grundschule. In M. Götz, A. Hartinger, F. Heinzel, J. Kahlert, S. Miller & U. Sandfuchs (Hg.), *Handbuch Grundschulpädagogik und Grundschuldidaktik* (S. 571-577). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Torbeyns, J. & Verschaffel, L. (2018). Differenzen überbrücken: Subtrahieren durch Addieren. Neue Belege zur Effektivität der Strategie des Ergänzens beim Subtrahieren. *mathematik lehren (211),* 7–10. https://lirias.kuleuven.be/retrieve/562984.

Herausgeber

Projekt **QuaMath** in Kooperation mit dem Projekt **PIKAS**
quamath.dzlm.de
pikas.dzlm.de

Fakultät für Mathematik / IEEM
Vogelpothsweg 87
44227 Dortmund

Autorinnen und Autoren:
Daniela Götze
Christoph Selter
Lars Holzäpfel

Abbildung & Gestaltung: Karoline Mosen
Stand: November 2025