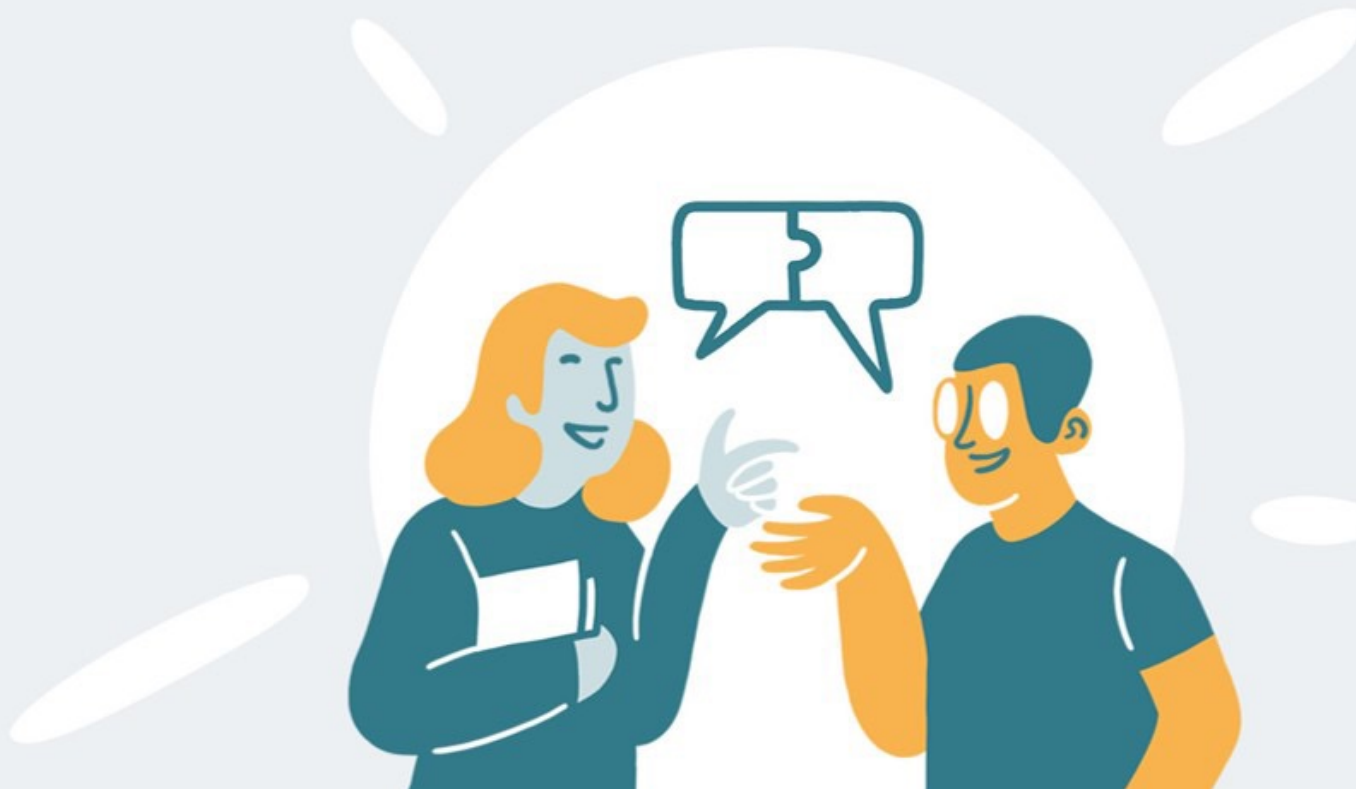


QuaMath

PIKAS

Deutsches Zentrum für
Lehrkräftebildung Mathematik



Daniela Götze · Christoph Selter

Langfristige Lernprozesse im Blick

Hintergrundinformationen und Beispiele zum Prinzip der Durchgängigkeit

Ein Programm von

DZLM 

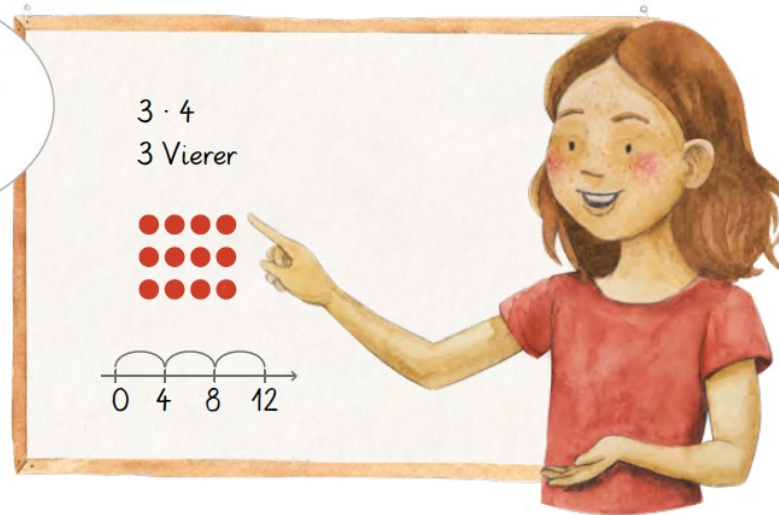


Gefördert von



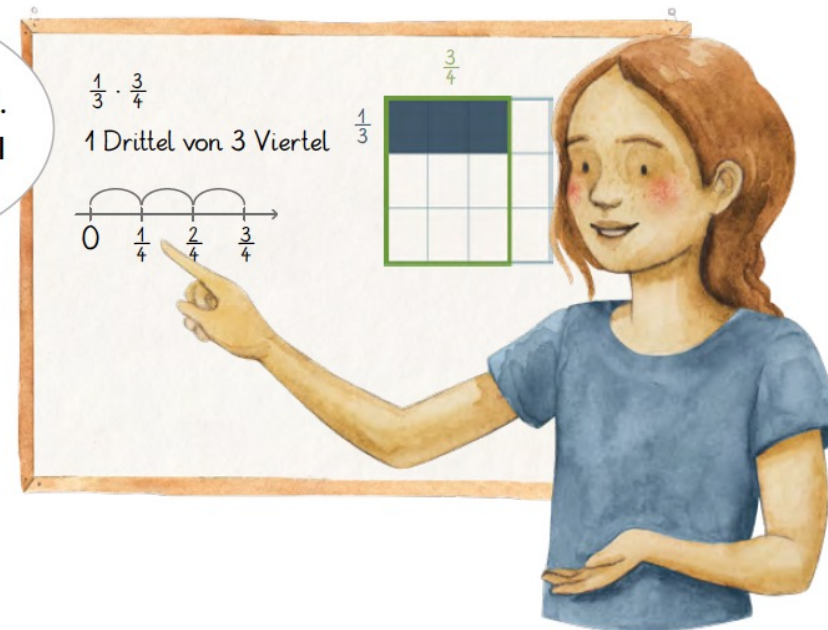
**KULTUSMINISTER
KONFERENZ**

3 mal 4, das sind
3 Vierer. Ein Vierer
mehr als zwei
Vierer.



Lisa in Klasse 2

1 Drittel von
3 Viertel ist 1 Viertel.
Das ist der dritte Teil
von 3 Viertel.



Lisa in Klasse 6

Durchgängigkeit – Langfristiges Lernen ermöglichen



Durchgängigkeit:
Langfristiges Lernen ermöglichen

Wie kann ich Lernwege
langfristig anlegen?



Ich muss von Anfang
an tragfähige
Verstehensgrundlagen
fokussieren ...

... und anschlussfähige
Vorstellungen und
passende Darstellungen
nutzen.

Gliederung

1. Merksätze und ihre potenzielle Schädlichkeit
2. Was besagt das Prinzip der Durchgängigkeit?
3. Warum sollten die Lernenden die Subtraktion auch als Ergänzen verstehen?
4. Warum brauchen die Lernenden ein tragfähiges Multiplikationsverständnis?
5. Warum sollten die Lernenden aus geometrischen Handlungen auch geometrische Begriffe lernen?
6. Die Vernetztheit der Prinzipien

Gliederung

1. Merksätze und ihre potenzielle Schädlichkeit
2. Was besagt das Prinzip der Durchgängigkeit?
3. Warum sollten die Lernenden die Subtraktion auch als Ergänzen verstehen?
4. Warum brauchen die Lernenden ein tragfähiges Multiplikationsverständnis?
5. Warum sollten die Lernenden aus geometrischen Handlungen auch geometrische Begriffe lernen?
6. Die Vernetztheit der Prinzipien

1. Merksätze und ihre potenzielle Schädlichkeit

	2	0	0	0	.	3	0	0	=	6	0	0	0	0	0		
	<u>2</u>	/	/	/		<u>3</u>	/	/			0	0	0	0	0		

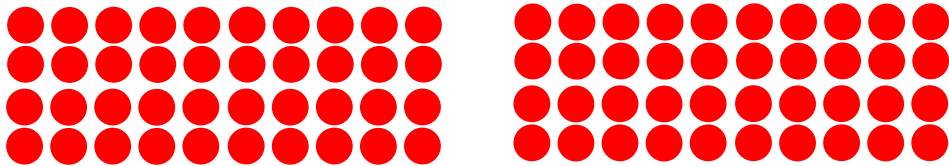
$$900\cancel{0} : 3\cancel{0} = 300\text{ 00}$$

1. Merksätze und ihre potenzielle Schädlichkeit

Wir rechnen mit Zehnern wie mit Einern.



$2 \cdot 4E = 8E$
 $2 \cdot 4 = 8$

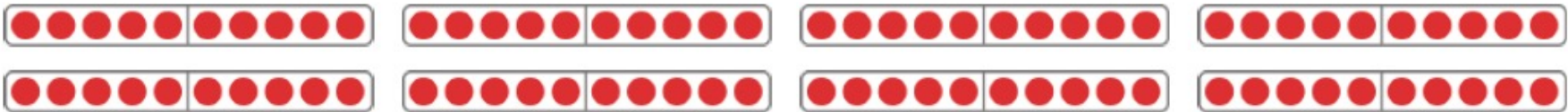


$2 \cdot 4Z = 8Z$
 $2 \cdot 40 = 80$

$2 \cdot 4$


$2 \cdot 40$

Für jeden Einer
wird ein Zehner
gelegt.



1. Merksätze und ihre potenzielle Schädlichkeit

Merksatz/Aussage	Fehlvorstellung	Beispiel für eine Fehllösung
„4 minus 6 geht nicht.“	Man kann keine größere von einer kleineren Zahl subtrahieren.	$4 - 6 = 2$
„Malrechnen heißt vergrößern.“	Multiplizieren führt immer zu einem größeren Ergebnis.	$3 \cdot 0,4 = 12$

Gliederung

1. Merksätze und ihre potenzielle Schädlichkeit
2. Was besagt das Prinzip der Durchgängigkeit?
3. Warum sollten die Lernenden die Subtraktion auch als Ergänzen verstehen?
4. Warum brauchen die Lernenden ein tragfähiges Multiplikationsverständnis?
5. Warum sollten die Lernenden aus geometrischen Handlungen auch geometrische Begriffe lernen?
6. Die Vernetztheit der Prinzipien

2. Was besagt das Prinzip der Durchgängigkeit?

QuaMath-Prinzipien für Unterricht
als kohärent wiederkehrender Fortbildungsgegenstand



Verstehensorientierung: Konzepte, Strategien und Verfahren grundlegen



Kognitive Aktivierung:
Aktive Lernprozesse anregen



Durchgängigkeit:
Langfristiges Lernen ermöglichen



Lernenden-Orientierung & Adaptivität:
Lernstände aufgreifen



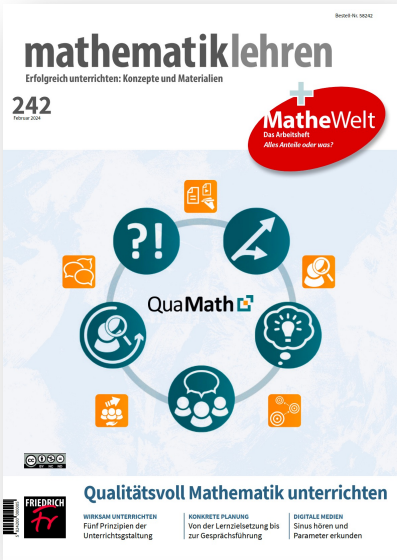
Kommunikationsförderung:
Über Mathematik sprechen

Prinzipien ausgewählt durch ...

- intensive Literaturrecherche
- Erprobung als kohärenter Kernbestand in diversen Runden
- Aushandlung im Kreise aller DZLM-Netzwerk-Mitglieder



Prediger et al. 2022



Holzäpfel et al. 2024



2. Was besagt das Prinzip der Durchgängigkeit?

Spiralprinzip

„Die Inhalte des Mathematikunterrichts dürfen nicht in unzusammenhängende Gebiete zerfallen, sondern Lernende sollen Beziehungslinien oder -netze im Mathematiklehrgang erkennen. Derartige ‚rote Fäden‘ sollen den Lernenden eine Orientierung in der Stofffülle einer Wissenschaft geben und ... fundamentale Ideen des Fachs unter einem bestimmten Aspekt aufzeigen.“

(Scherer & Weigand (2017, S. 29) in Anlehnung an Bruner (1970))

Das Prinzip der Durchgängigkeit verwendet hingegen als zentrale Bezugspunkte „nicht die (oft zu implizit und abstrakt bleibenden) fundamentalen Ideen, sondern wendet es praktisch auf die durchgängigen Darstellungen und Vorstellungen, die für einen nachhaltigen Verständnisaufbau langfristig zentral sind.“

2. Was besagt das Prinzip der Durchgängigkeit?

Da Lernen immer ein **Weiterlernen** ist,
welches auf Gelerntem **aufbaut** und
zu neuen Lernzielen **hinführt**,
werden im **Laufe der Schulzeit**
grundlegende **Inhalte, Aufgaben, Vorstellungen und Darstellungsmittel**
immer wieder auf **verschiedenen Niveaus** und
unter Berücksichtigung **unterschiedlicher Gesichtspunkte** angesprochen,
um deren **Anreicherung, Ausdifferenzierung und Verknüpfung** zu erzielen.

2. Was besagt das Prinzip der Durchgängigkeit?

Antizipieren (Vorschau-Perspektive)

- auf jeder Lernstufe diejenigen Aspekte der Lerngegenstände (z. B. Vorstellungen und Darstellungen) auswählen, die gut fortsetzbar und für den langfristigen Kompetenzaufbau entlang eines durchgängigen Lernpfads wichtig sind

Anknüpfen (Rückschau-Perspektive)

- Anknüpfungen zu vorausgehenden Lernstufen explizit herstellen, um eine zunehmende Anreicherung, Ausdifferenzierung und Verknüpfung der mathematischen Kompetenzen zu erreichen

Aufarbeiten (Reparatur-Perspektive)

- Lücken in den Verstehensgrundlagen rechtzeitig aufarbeiten, damit durchgängig notwendige Vorstellungen und Darstellungen und auch Fertigkeiten allen Lernenden zur Verfügung stehen

Gliederung

1. Merksätze und ihre potenzielle Schädlichkeit
2. Was besagt das Prinzip der Durchgängigkeit?
3. Warum sollten die Lernenden die Subtraktion auch als Ergänzen verstehen?
4. Warum brauchen die Lernenden ein tragfähiges Multiplikationsverständnis?
5. Warum sollten die Lernenden aus geometrischen Handlungen auch geometrische Begriffe lernen?
6. Die Vernetztheit der Prinzipien

3. Warum sollten die Lernenden die Subtraktion auch als Ergänzen verstehen?

Wann spricht man von Addition, wann von Subtraktion?

3

5

8

3. Warum sollten die Lernenden die Subtraktion auch als Ergänzen verstehen?



ABZIEHEN

Anna hat 8€ gespart. Sie gibt 3€ für ein Spielzeug aus. Wie viel Euro hat sie noch übrig?



VERGLEICHEN

Jan hat 3€ und Maren hat 8€. Wie viel Euro hat Jan weniger als Maren?

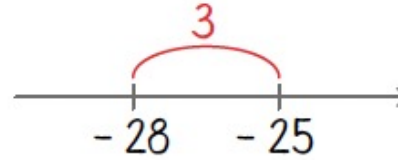


ERGÄNZEN

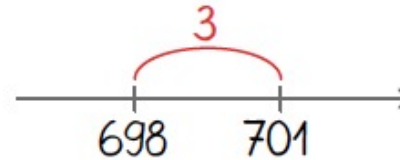
Milena hat 3€ gespart. Sie will sich einen Fußball kaufen, der 8€ kostet. Wie viel Euro fehlen ihr noch?

3. Warum sollten die Lernenden die Subtraktion auch als Ergänzen verstehen?

$$-25 - (-28) = 3$$

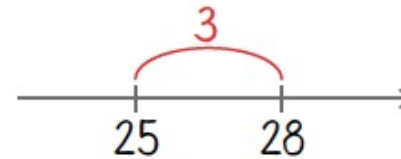


$$701 - 698 = 3$$



$$28 - 3 = 25$$

$$25 + 3 = 28$$



$$10 - 3 = 7$$

$$7 + 3 = 10$$



Klasse 7

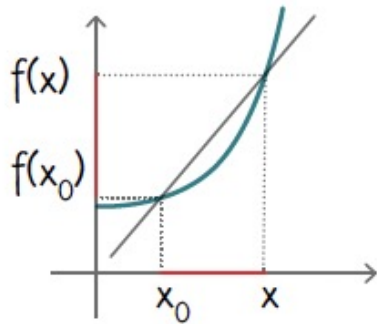
Klasse 3

Klasse 2

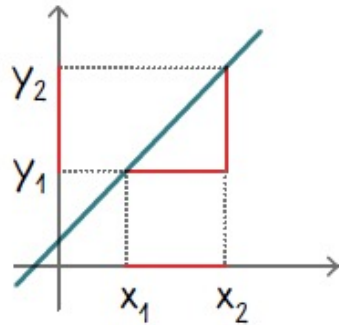
Klasse 1

3. Warum sollten die Lernenden die Subtraktion auch als Ergänzen verstehen?

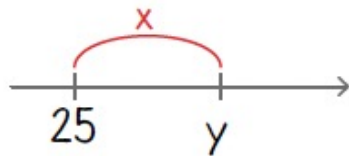
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



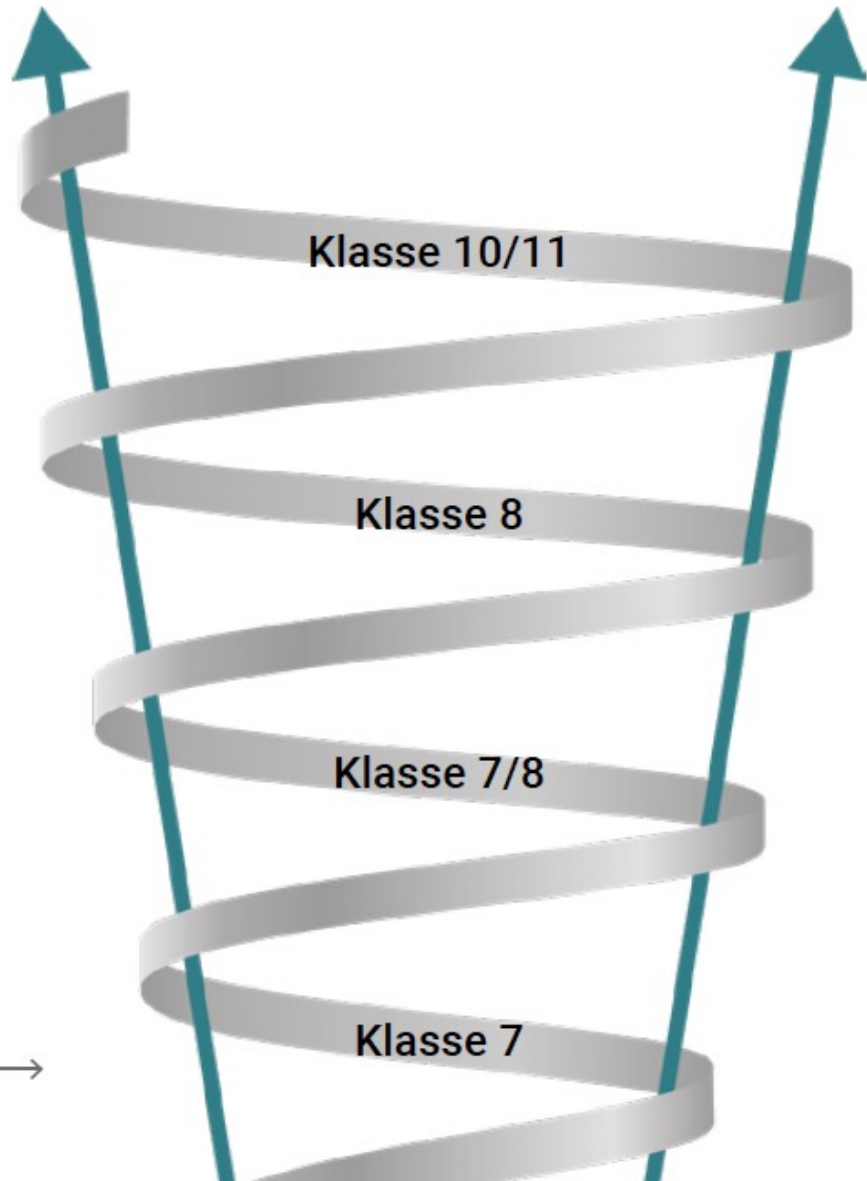
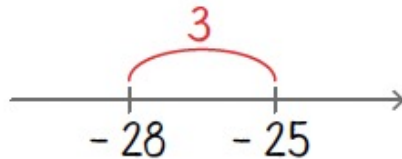
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



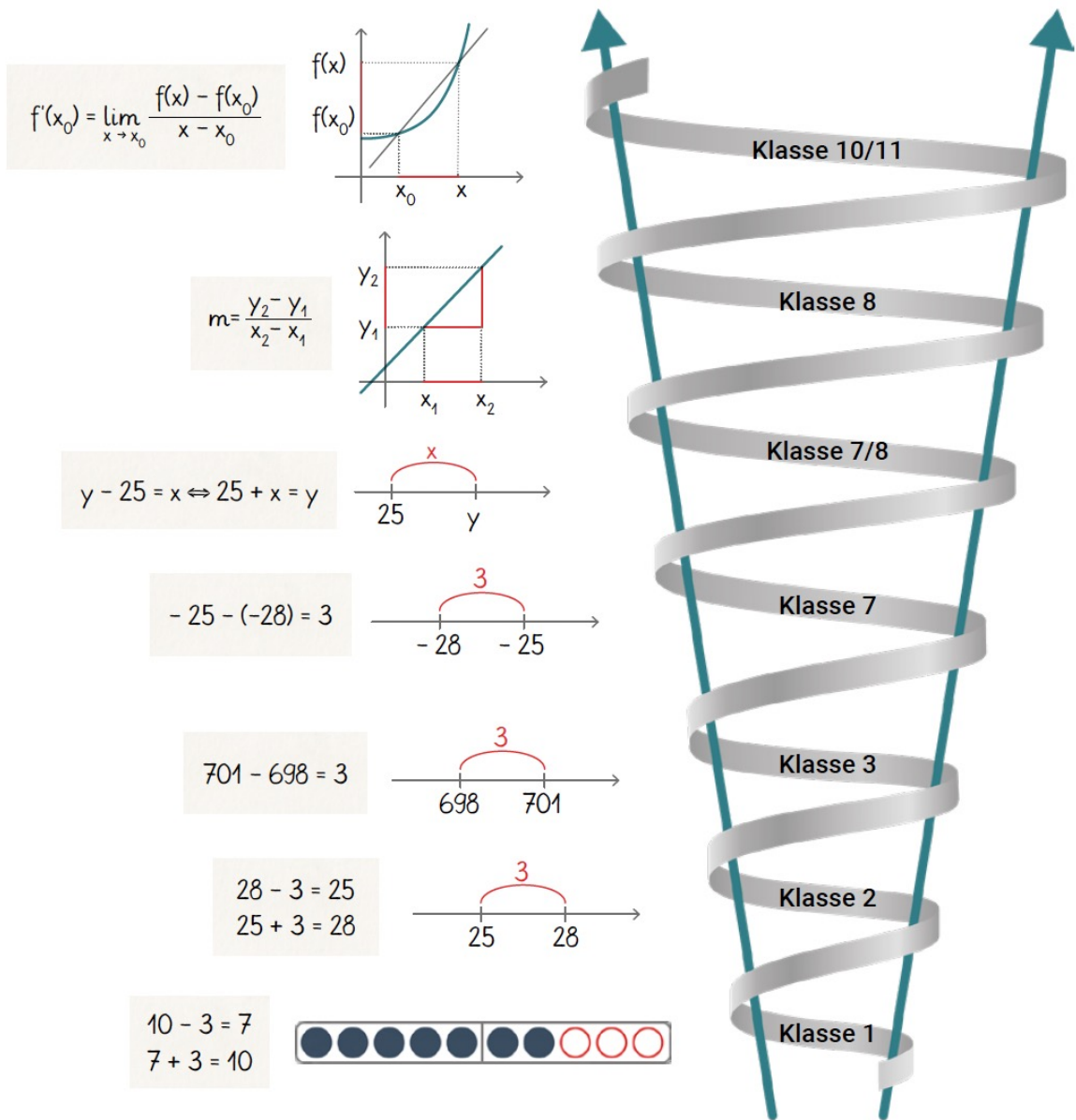
$$y - 25 = x \Leftrightarrow 25 + x = y$$



$$-25 - (-28) = 3$$



3. Warum sollten die Lernenden die Subtraktion auch als Ergänzen verstehen?



Gliederung

1. Merksätze und ihre potenzielle Schädlichkeit
2. Was besagt das Prinzip der Durchgängigkeit?
3. Warum sollten die Lernenden die Subtraktion auch als Ergänzen verstehen?
4. Warum brauchen die Lernenden ein tragfähiges Multiplikationsverständnis?
5. Warum sollten die Lernenden aus geometrischen Handlungen auch geometrische Begriffe lernen?
6. Die Vernetztheit der Prinzipien

4. Warum brauchen die Lernenden ein tragfähiges Multiplikationsverständnis?

Das Aufsagen der Einmaleinsreihen und -aufgaben ist langfristig nicht tragfähig.

Kinder erkennen weder Zusammenhänge noch Fehler

2 mal 6 gleich 12.
3 mal 6 gleich 15.



Dreierreihe: 3, 6, 9,
12, 15, 18, 20, 23, 26



7, 14, 21, 27, 35, 42, ...



1 mal 7 sind 7.
2 mal 7 sind 14.
3 mal 7 sind 21.
4 mal 7 sind 28.

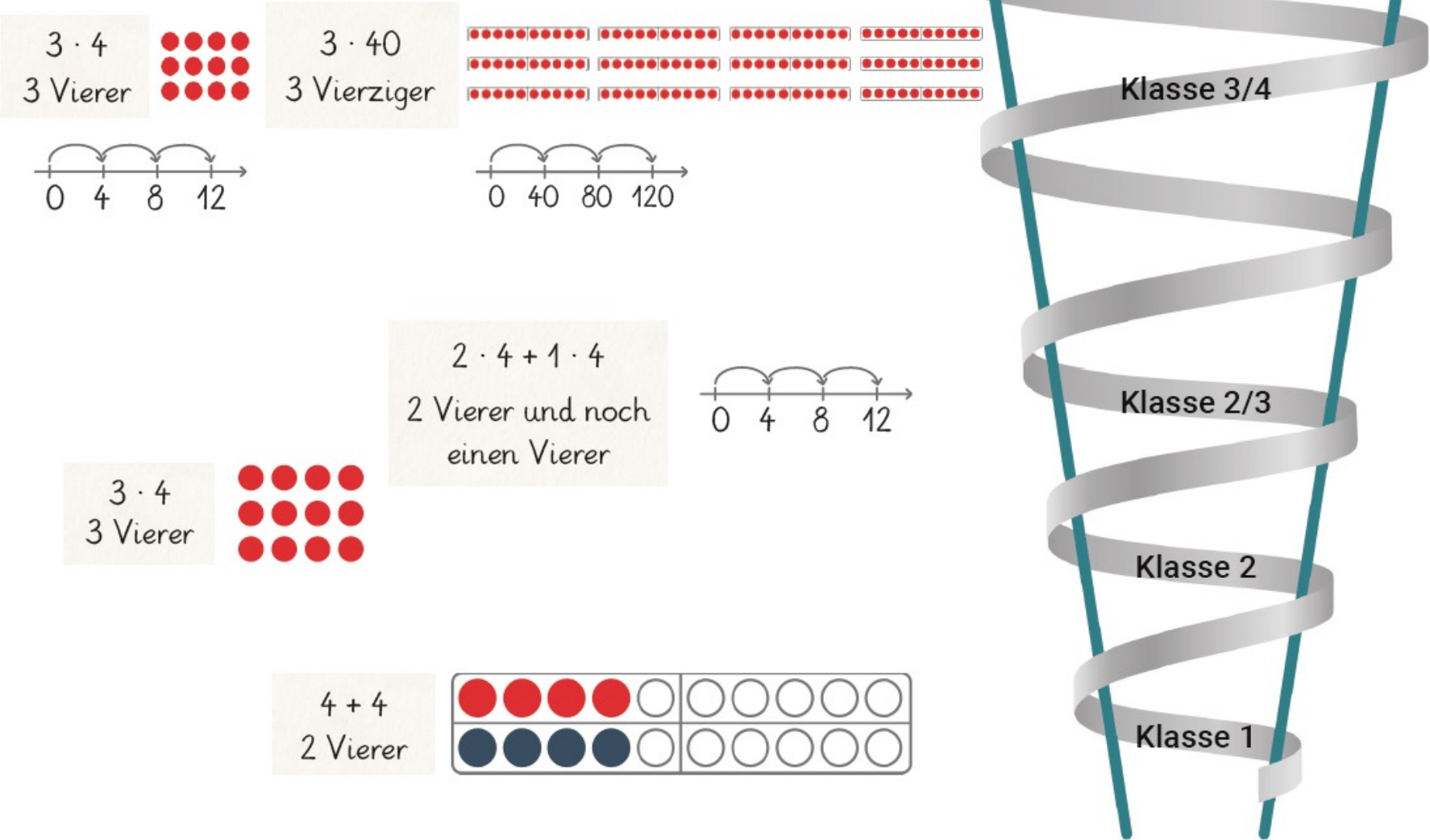


4 mal 7 sind 28.
6 mal 8 sind 48.



Aber wie kann ein Multiplikationsverständnis langfristig ab dem ersten Schuljahr aufgebaut werden?

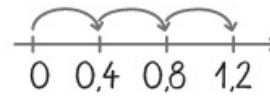
4. Warum brauchen die Lernenden ein tragfähiges Multiplikationsverständnis?



4. Warum brauchen die Lernenden ein tragfähiges Multiplikationsverständnis?

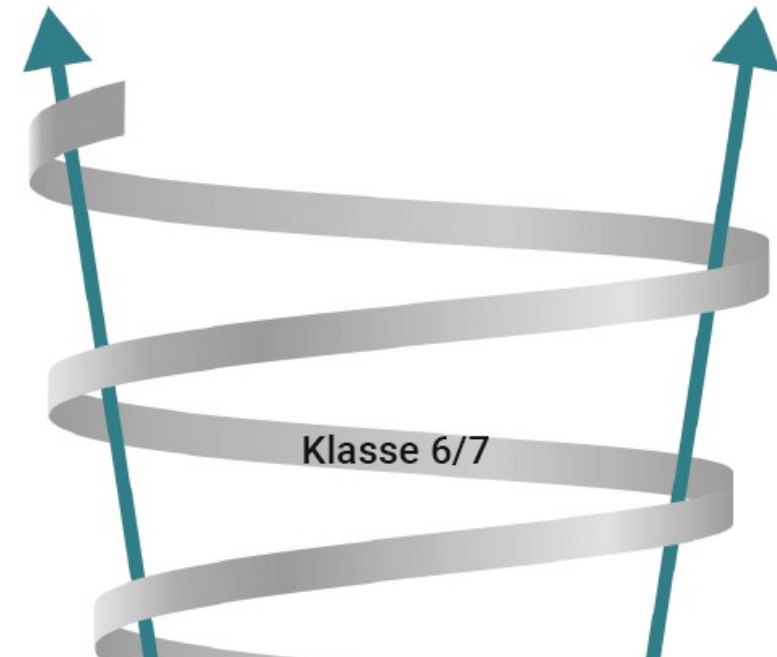
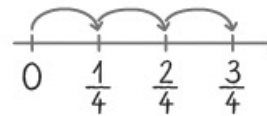
$$3 \cdot 0,4$$

drei 0,4er-Sprünge



$$3 \cdot \frac{1}{4}$$

drei $\frac{1}{4}$ -Sprünge



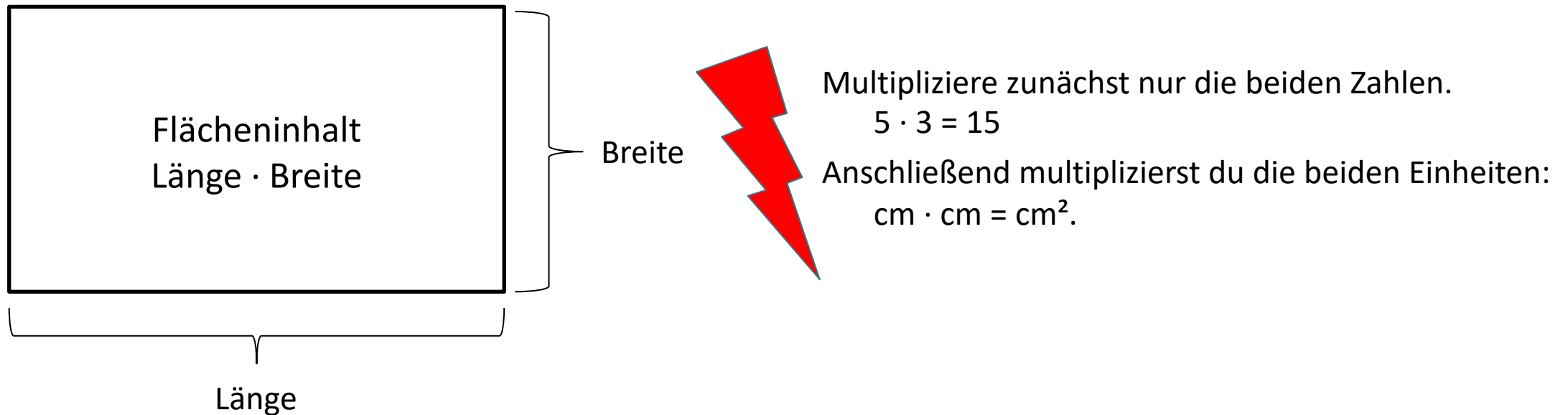
Gliederung

1. Merksätze und ihre potenzielle Schädlichkeit
2. Was besagt das Prinzip der Durchgängigkeit?
3. Warum sollten die Lernenden die Subtraktion auch als Ergänzen verstehen?
4. Warum brauchen die Lernenden ein tragfähiges Multiplikationsverständnis?
5. Warum sollten die Lernenden aus geometrischen Handlungen auch geometrische Begriffe lernen?
6. Die Vernetztheit der Prinzipien

5. Warum sollten Lernende aus geometrischen Handlungen auch geometrische Begriffe lernen?

Beim Flächeninhalt geht es um das Ausmessen einer Fläche mit besonderen Quadraten.

Das wird durch die Rechenregel „Länge · Breite“ aber nicht deutlich.

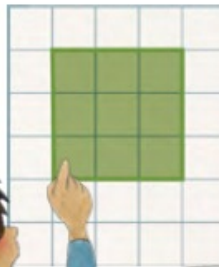


Wie kann ein Verständnis für den Flächeninhalt bereits in der Grundschule angelegt und langfristig aufgebaut werden?

5. Warum sollten Lernende aus geometrischen Handlungen auch geometrische Begriffe lernen?

Legt eine Fläche, die 9
Meterquadrate groß ist.





Das sind $3 \cdot 3$
Einheitsquadrate.
Ist deine Form
größer?



Ja, der Flächeninhalt
meiner Form ist
2 Quadrate größer.

Klasse 4

Klasse 3

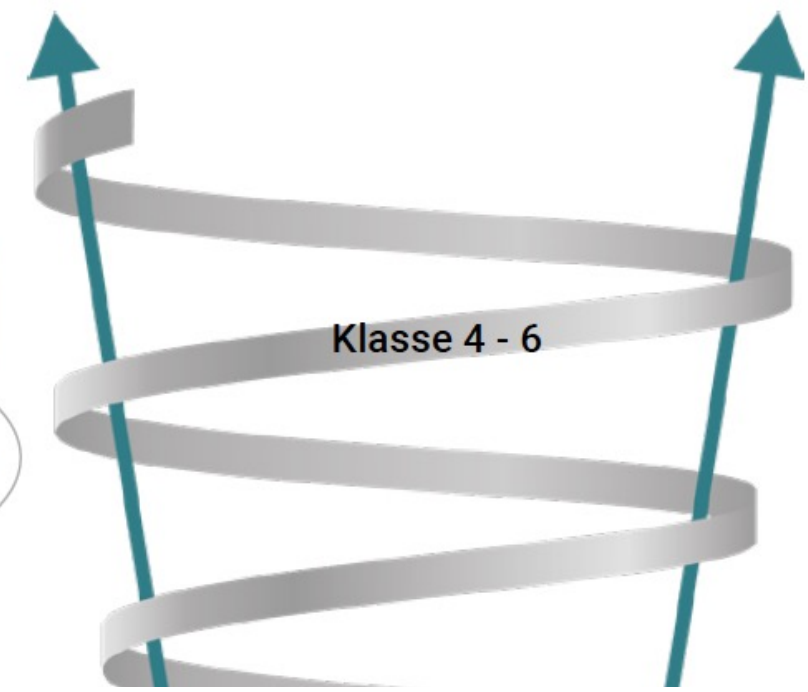
5. Warum sollten Lernende aus geometrischen Handlungen auch geometrische Begriffe lernen?

Flächeninhalt:
 $3 \cdot 10 \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2$

Es sind 3 Reihen mit je 10 Zentimeterquadraten, also 3 mal 10 cm^2 .



Der Flächeninhalt des Rechtecks ist 30 Zentimeterquadrate groß.



Gliederung

1. Merksätze und ihre potenzielle Schädlichkeit
2. Was besagt das Prinzip der Durchgängigkeit?
3. Warum sollten die Lernenden die Subtraktion auch als Ergänzen verstehen?
4. Warum brauchen die Lernenden ein tragfähiges Multiplikationsverständnis?
5. Warum sollten die Lernenden aus geometrischen Handlungen auch geometrische Begriffe lernen?
6. Die Vernetztheit der Prinzipien

Vernetztheit der Prinzipien

QuaMath
Unterrichts- und Fortbildungs-Qualität
in Mathematik entwickeln

mit Beispielen aus
PIKAS
Deutsches Zentrum für
Lehrkräftebildung Mathematik



Fünf Prinzipien guten Mathematikunterrichts

Lernenden-Orientierung und Adaptivität:
Lernstände aufgreifen

3

forderungssituationen fachdidaktisch fundierte Entscheidungen treffen kann (Prediger u. a. 2022). Diese werden wir in den folgenden Abschnitten zunächst formulieren, in der gebotenen Kürze erläutern und dann für die Primarstufe anhand von Beispielen (aus dem Projekt PIKAS und seinen Partnerprojekten) konkretisieren. Analoge Ausführungen für die Sekundarstufen finden sich in Holzapfel u. a. (2024). Strukturierendes Element der einzelnen Abschnitte sind die sogenannten QuaMath-Kernbotschaften. Darunter verstehen wir diejenigen zentralen Aussagen, die aus unserer Sicht für die Primarstufe mit dem jeweiligen Prinzip verbunden sind. Bewusst wurden diese in der Ich-Form formuliert, um die unmittelbare Anbindbarkeit an den eigenen Mathematikunterricht zu unterstützen.



Lernenden-Orientierung und Adaptivität: LERNSTÄNDE AUFGREIFEN

Das Prinzip der Lernenden-Orientierung und Adaptivität besagt, dass Lernprozesse gelingen, wenn (typische) Lernstände und Vorerfahrungen systematisch berücksichtigt und aufgegriffen werden. Zudem sollen Lernende eigene Lernwege beschreiten können, denn gerade der Verständnisaufbau sollte bei deren (typischen) Vorerfahrungen starten und diese anhand von Problemen in reichhaltigen (Kontext-)Situationen zu mathematischen Konzepten ausformen. Hierzu sollten nicht nur typische Lernstände der ganzen Klasse, sondern die heterogenen individuellen Lernstände der Einzelnen in den Blick genommen werden, z. B. durch Differenzierung nach Lernzielen (Was ist das nächste Lernziel für dieses Kind?) und nach Anforderungsstufen (Wie lassen sich die Lernaufgaben unterschiedlich unterstützen?).

Dieses Prinzip wird im Weiteren durch die Formulierung von sechs Kernbotschaften konkretisiert, die jeweils beispielgebunden illustriert werden.

Ich nehme die Denk- und Vorgehensweisen der Kinder stärkerorientiert wahr.

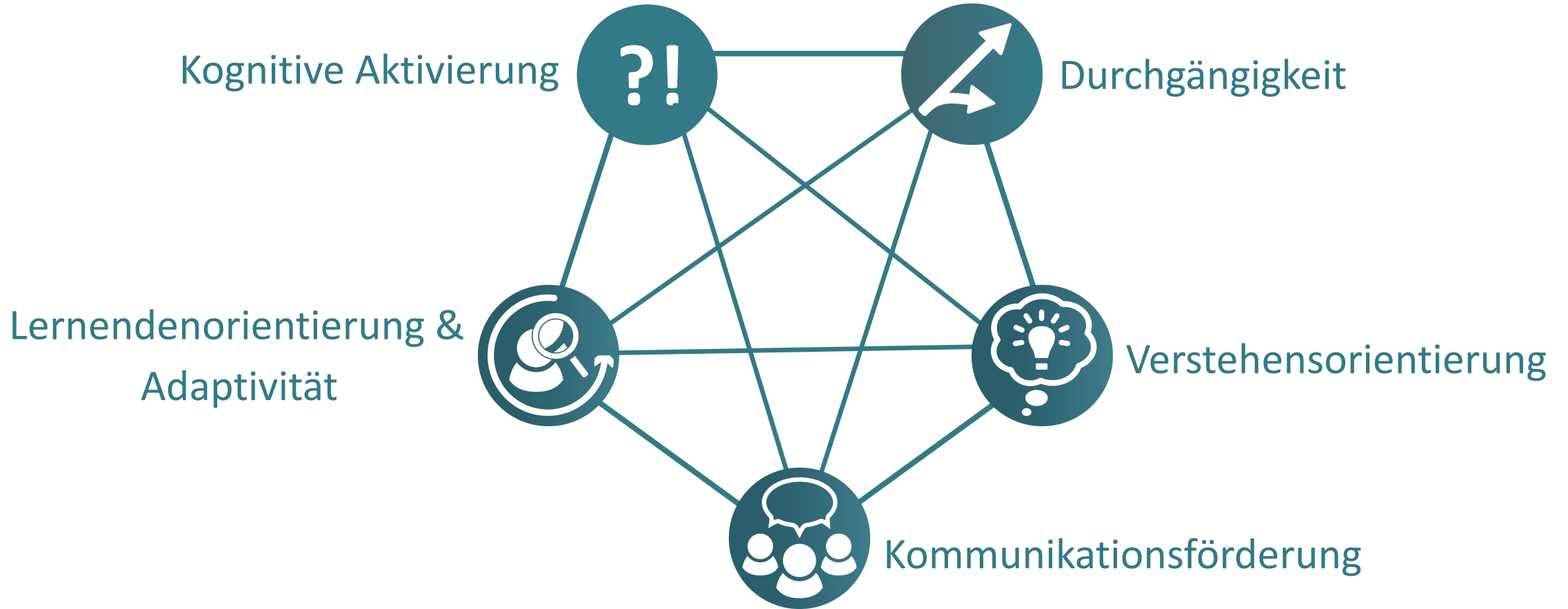
Als stärkerorientierten Blick bezeichnen wir eine Orientierung vorrangig an den Fähigkeiten und den Sichtweisen der Lernenden statt primär an den Fehlern und den Defiziten. Die unterschiedlichen Reaktionen in der Abbildung verdeutlichen das Gegensatzpaar ‚Defizitorientierter Blick – Stärkenorientierter Blick‘. Die fünfjährige Sarah kann schon recht gut zählen, stolz sagt sie die Zahlwörter bis 95 auf und fährt fort:



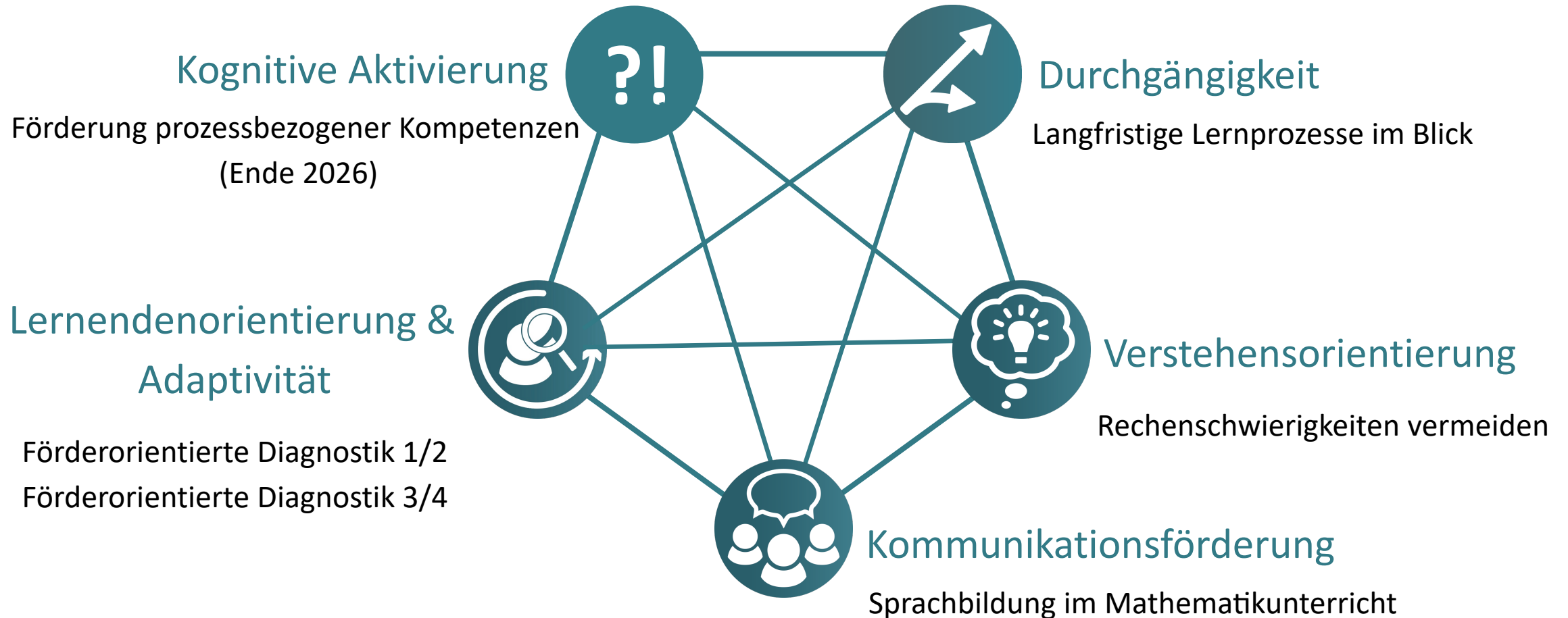
Stärkenorientierung meint nun nicht, Kinder per se als kleine Genies zu betrachten und ihnen nur positive Rückmeldungen zu ihren Äußerungen zu geben. Es geht keineswegs um das Beschönigen oder um überdosiertes Lob. Das kann dazu führen, dass die Lernenden sich nicht mehr an ihren eigenen Leistungen orientieren, sondern nur noch an Einschätzungen von anderen. Und dieser Umstand wiederum kann sich auf das Empfinden von Selbstwirksamkeit und auf die Motivation negativ auswirken. Stärkenorientierung heißt vor allem, auf das individuelle Denken der Kinder neugierig zu sein (vgl. Götz, Selter & Zannettin, 2019), die Denk- und Vorgehensweisen der Kinder aus ihrer Sicht als



Vernetztheit der Prinzipien



Vernetztheit der Prinzipien – Handreichungen auf pikas.dzlm.de/node/2285



Videos auf quamath.dzlm.de/info-materialien

QuaMath-Prinzipienfilme für die Primarstufe



Kognitive Aktivierung



Verstehensorientierung



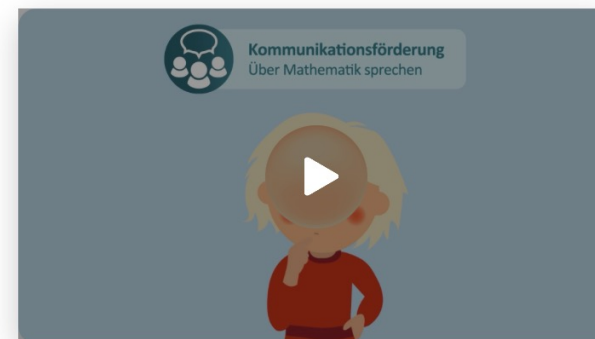
Durchgängigkeit



Lernendenorientierung



Adaptivität



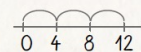
Kommunikationsförderung





3 mal 4, das sind
3 Vierer. Ein Vierer
mehr als zwei
Vierer.

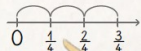
$3 \cdot 4$
3 Vierer



Lisa in Klasse 2

1 Drittel von
3 Viertel ist 1 Viertel.
Das ist der dritte Teil
von 3 Viertel.

$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$
1 Drittel von 3 Viertel



Lisa in Klasse 6



Langfristige Lernprozesse im Blick
Hintergrundinformationen und Beispiele
zum Prinzip der Durchgängigkeit

Literatur

- Bruner, J. S. (1970). *Der Prozeß der Erziehung*. Berlin: Berlin Verlag.
- Götze, D., Selter, Ch., Prediger, S., Holzäpfel, L., Rösken-Winter, B., Eichholz, L., & Wilhelm, N. (2024). *Fünf Prinzipien guten Mathematikunterrichts*. <https://www.pikas.dzlm.de/node/2285>.
- Götze, D., Selter, Ch., & Holzäpfel, L. (2025). *Langfristige Lernprozesse im Blick. Hintergrundinformationen und Beispiele zum Prinzip der Durchgängigkeit*. <https://www.pikas.dzlm.de/node/2285>.
- Holzäpfel, L., Prediger, S., Götze, D., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2024) Fünf Prinzipien für qualitätsvollen Mathematikunterricht. *Mathematik lehren* 242, 2–9. <https://www.friedrich-verlag.de/shop/mwdownloads/download/link/id/114555/>
- Prediger S, Götze D, Holzäpfel, L, Rösken-Winter, B., & Selter C. (2022). Five principles for high-quality mathematics teaching: Combining normative, epistemological, empirical, and pragmatic perspectives for specifying the content of professional development. *Frontiers in Education* 7:969212. doi: 10.3389/feduc.2022.969212
- Scherer, P. & Weigand, H.-G. (2017). Mathematikdidaktische Prinzipien. In M. Abshagen, B. Barzel, J. Kramer, T. Riecke-Baulecke, B. Rösken-Winter, & Ch. Selter (Hg.), *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten* (S. 28–42). Seelze: Klett Kallmeyer.