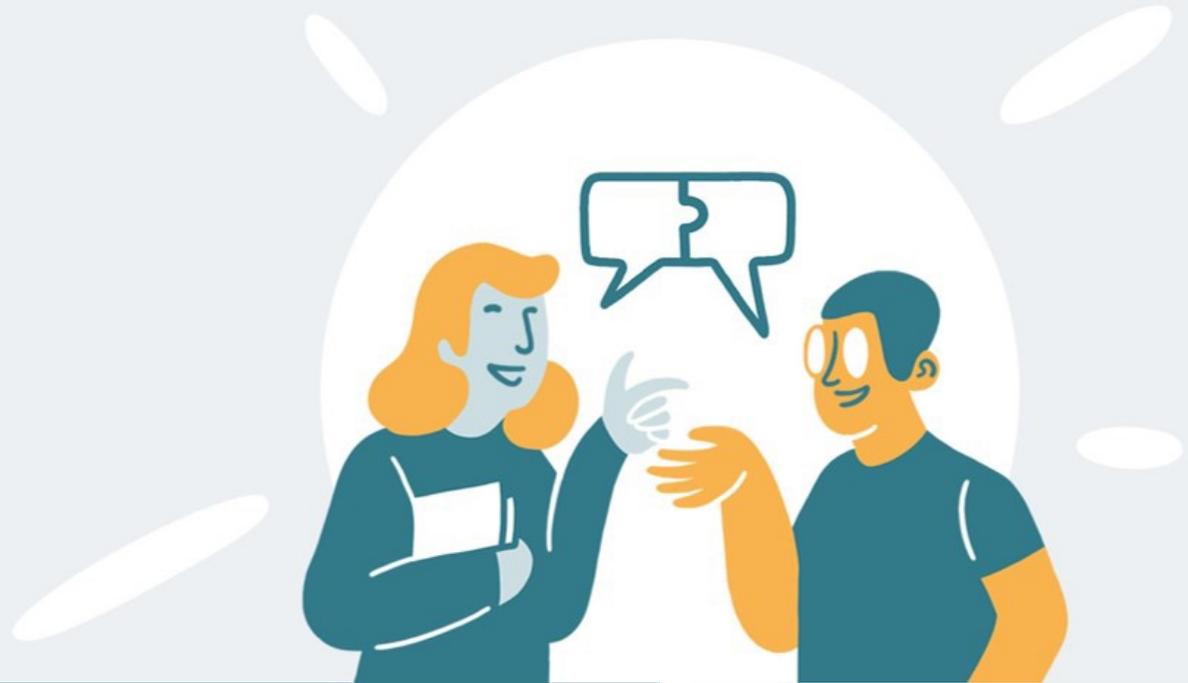


QuaMath

PIKAS

Deutsches Zentrum für
Lehrkräftebildung Mathematik



Daniela Götze · Christoph Selter
Fünf Prinzipien guten Mathematikunterrichts

Ein Programm von

DZLM 



Gefördert von


**KULTUSMINISTER
KONFERENZ**

Gliederung

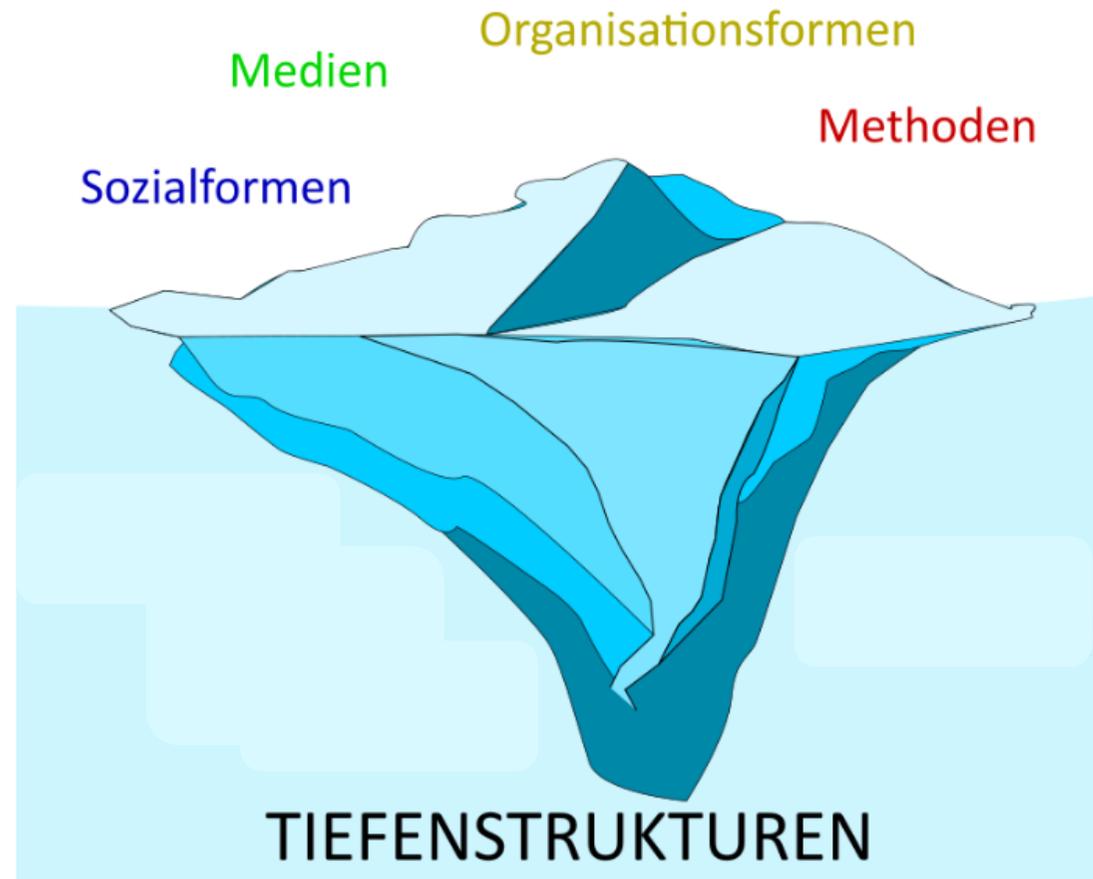
1. Sichtstrukturen und Tiefenstrukturen
2. Fünf Prinzipien als Orientierungen
3. Prinzip der Verstehensorientierung
4. Prinzip der Durchgängigkeit
5. Vernetztheit der Prinzipien

Gliederung

1. Sichtstrukturen und Tiefenstrukturen
2. Fünf Prinzipien als Orientierungen
3. Prinzip der Verstehensorientierung
4. Prinzip der Durchgängigkeit
5. Vernetztheit der Prinzipien

1. Sichtstrukturen und Tiefenstrukturen

SICHTSTRUKTUREN



ICEBERG (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Iceberg_in_the_Arctic_with_its_underside_exposed001.svg) - Ergänzungen Ekkehard Brüggemann (ekkib.de) <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode>

1. Sichtstrukturen und Tiefenstrukturen

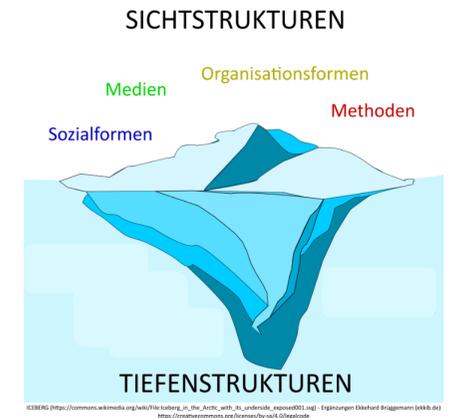
„Beim Unterrichten geht es um das Gestalten von Lerngelegenheiten (Angebot) und das erfolgreiche Zusammenspiel von Sicht- und Tiefenstrukturen.

Sichtstrukturen (Oberflächenstrukturen). Sie liefern den Rahmen für Unterrichtsprozesse, sind vergleichsweise leicht von außen beobachtbar und umfassen

- Organisationsformen (z. B. Klassenunterricht),
- Sozialformen (z. B. Gruppenarbeit) und
- Methoden (z. B. Projektarbeit) des Unterrichts.

Tiefenstrukturen. Sie beziehen sich auf die unterhalb der Sichtebeine stattfindenden Lehr-Lern-Prozesse und umfassen die Qualität der Interaktion der Lernenden mit dem Lernstoff und die Qualität der Interaktion zwischen den Lernenden und der Lehrkraft sowie den Lernenden untereinander.

Auf die Tiefenstrukturen kommt es an! Empirische Studien zeigen: Gelingende Klassenführung, ein hohes Maß an konstruktiver Unterstützung und eine erfolgreiche kognitive Aktivierung wirken sich positiv auf die Lernentwicklung und die motivationale Entwicklung von Schülerinnen und Schülern aus – unabhängig davon, welche Methoden sowie Organisations- und Sozialformen zum Einsatz kommen“
(Trautwein, Sliwka & Dehmel, 2022, S. 4).



Gliederung

1. Sichtstrukturen und Tiefenstrukturen
2. Fünf Prinzipien als Orientierungen
3. Prinzip der Verstehensorientierung
4. Prinzip der Durchgängigkeit
5. Vernetztheit der Prinzipien

2. Fünf Prinzipien als Orientierungen



Verstehensorientierung: Konzepte, Strategien und Verfahren grundlegen



Kognitive Aktivierung: Aktive Lernprozesse anregen



Durchgängigkeit: Langfristiges Lernen ermöglichen



Lernenden-Orientierung & Adaptivität: Lernstände aufgreifen



Kommunikationsförderung: Über Mathematik sprechen

Prinzipien ausgewählt durch

- intensive Literaturrecherche
- Aushandlung im Kreise aller DZLM-Netzwerk-Mitglieder
- Erprobung und Beforschung



Prediger et al. 2022



Holzäpfel et al. 2024



2. Fünf Prinzipien als Orientierungen



Verstehensorientierung: Konzepte, Strategien und Verfahren grundlegen

- L. konnte gut erklären
- L. hat Erklärungen eingefordert
- L. legte Wert darauf, dass wir uns die Dinge vorstellen konnten
- hat alles gut veranschaulicht
- hatten immer Zugriff auf verschiedene Materialien zur Veranschaulichung

2. Fünf Prinzipien als Orientierungen



Verstehensorientierung: Konzepte, Strategien und Verfahren grundlegen

- L. konnte gut erklären
- L. hat Erklärungen eingefordert
- L. legte Wert darauf, dass wir uns die Dinge vorstellen konnten

- hat alles gut veranschaulicht
- hatten immer Zugriff auf verschiedene Materialien zur Veranschaulichung



Kognitive Aktivierung: Aktive Lernprozesse anregen

- durften selbst Dinge erkunden
- wurden auch herausgefordert
- nicht nur Päckchenrechnen

- abwechslungsreiches Üben
- Mathespiele waren toll
- viele Knobelaufgaben

2. Fünf Prinzipien als Orientierungen



Verstehensorientierung: Konzepte, Strategien und Verfahren grundlegen

- L. konnte gut erklären
- L. hat Erklärungen eingefordert
- L. legte Wert darauf, dass wir uns die Dinge vorstellen konnten
- hat alles gut veranschaulicht
- hatten immer Zugriff auf verschiedene Materialien zur Veranschaulichung



Kognitive Aktivierung: Aktive Lernprozesse anregen

- durften selbst Dinge erkunden
- wurden auch herausgefordert
- nicht nur Päckchenrechnen
- abwechslungsreiches Üben
- Mathespiele waren toll
- viele Knobelaufgaben



Durchgängigkeit: Langfristiges Lernen ermöglichen

- unser Vorwissen wurde einbezogen
- in der Sek habe ich alles verstanden, weil wir in der GS so viele Beispiele gemacht haben
- Verbindungen zu bereits behandelten Themen wurden hergestellt

2. Fünf Prinzipien als Orientierungen



Verstehensorientierung: Konzepte, Strategien und Verfahren grundlegen

- L. konnte gut erklären
- L. hat Erklärungen eingefordert
- L. legte Wert darauf, dass wir uns die Dinge vorstellen konnten
- hat alles gut veranschaulicht
- hatten immer Zugriff auf verschiedene Materialien zur Veranschaulichung



Kognitive Aktivierung: Aktive Lernprozesse anregen

- durften selbst Dinge erkunden
- wurden auch herausgefordert
- nicht nur Päckchenrechnen
- abwechslungsreiches Üben
- Mathespiele waren toll
- viele Knobelaufgaben



Durchgängigkeit: Langfristiges Lernen ermöglichen

- unser Vorwissen wurde einbezogen
- in der Sek habe ich alles verstanden, weil wir in der GS so viele Beispiele gemacht haben
- Verbindungen zu bereits behandelten Themen wurden hergestellt



Lernenden-Orientierung & Adaptivität: Lernstände aufgreifen

- es wurde auf individuelle Leistungsstände eingegangen
- individuelle Lernwege waren möglich
- Wertschätzung und respektvolles Miteinander
- Lebensweltbezug
- Fehler machen war nicht schlimm

2. Fünf Prinzipien als Orientierungen



Verstehensorientierung: Konzepte, Strategien und Verfahren grundlegen

- L. konnte gut erklären
- L. hat Erklärungen eingefordert
- L. legte Wert darauf, dass wir uns die Dinge vorstellen konnten
- hat alles gut veranschaulicht
- hatten immer Zugriff auf verschiedene Materialien zur Veranschaulichung



Kognitive Aktivierung: Aktive Lernprozesse anregen

- durften selbst Dinge erkunden
- wurden auch herausgefordert
- nicht nur Päckchenrechnen
- abwechslungsreiches Üben
- Mathespiele waren toll
- viele Knobelaufgaben



Durchgängigkeit: Langfristiges Lernen ermöglichen

- unser Vorwissen wurde einbezogen
- in der Sek habe ich alles verstanden, weil wir in der GS so viele Beispiele gemacht haben
- Verbindungen zu bereits behandelten Themen wurden hergestellt



Lernenden-Orientierung & Adaptivität: Lernstände aufgreifen

- es wurde auf individuelle Leistungsstände eingegangen
- individuelle Lernwege waren möglich
- Wertschätzung und respektvolles Miteinander
- Lebensweltbezug
- Fehler machen war nicht schlimm



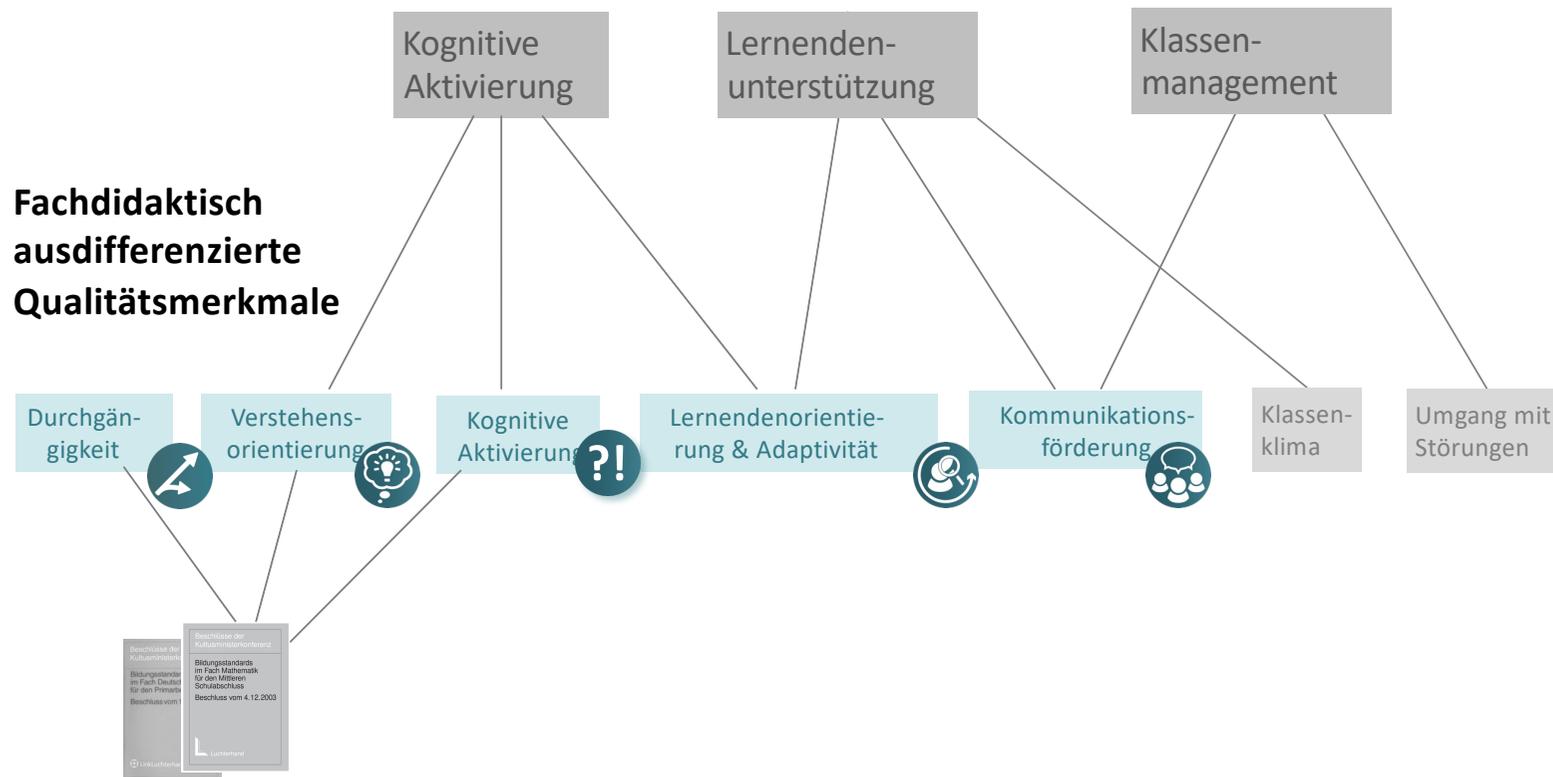
Kommunikationsförderung: Über Mathematik sprechen

- haben viel über Mathe gesprochen
- durften Rechenwege an der Tafel vorstellen
- hatten Wort-/ Sprachspeicher für wichtige Fachbegriffe und Fachsprache
- In Mathekonferenzen konnten wir untereinander diskutieren

2. Fünf Prinzipien als Orientierungen

Drei fachübergreifende Basisdimensionen für Unterrichtsqualität

(Klieme et al. 2001, Praetorius et al. 2018)



2. Fünf Prinzipien als Orientierungen

forderungssituationen fachdidaktisch fundierte Entscheidungen treffen kann (Prediger u. a. 2022). Diese werden wir in den folgenden Abschnitten zunächst formulieren, in der gebotenen Kürze erläutern und dann für die Primarstufe anhand von Beispielen (aus dem Projekt PIKAS und seinen Partnerprojekten) konkretisieren. Analoge Ausführungen für die Sekundarstufen finden sich in Holzäpfel u. a. (2024). Strukturierendes Element der einzelnen Abschnitte sind die sogenannten QuaMath-Kernbotschaften. Darunter verstehen wir diejenigen zentralen Aussagen, die aus unserer Sicht für die Primarstufe mit dem jeweiligen Prinzip verbunden sind. Bewusst wurden diese in der Ich-Form formuliert, um die unmittelbare Anbindbarkeit an den eigenen Mathematikunterricht zu unterstützen.



Lernenden-Orientierung und Adaptivität: LERNSTÄNDE AUFGREIFEN

Das Prinzip der Lernenden-Orientierung und Adaptivität besagt, dass Lernprozesse gelingen, wenn (typische) Lernstände und Vorerfahrungen systematisch berücksichtigt und aufgegriffen werden. Zudem sollen Lernende eigene Lernwege beschreiben können, denn gerade der Verständnisaufbau sollte bei deren (typischen) Vorerfahrungen starten und diese anhand von Problemen in reichhaltigen (Kontext-)Situations zu mathematischen Konzepten ausformen. Hierzu sollten nicht nur typische Lernstände der ganzen Klasse, sondern die heterogenen individuellen Lernstände der Einzelnen in den Blick genommen werden, z. B. durch Differenzierung nach Lernzielen (Was ist das nächste Lernziel für dieses Kind?) und nach Anforderungsstufen (Wie lassen sich die Lernaufgaben unterschiedlich unterstützen?).

Dieses Prinzip wird im Weiteren durch die Formulierung von sechs Kernbotschaften konkretisiert, die jeweils beispielgebunden illustriert werden.

Ich nehme die Denk- und Vorgehensweisen der Kinder stärkenorientiert wahr.

Als stärkenorientierten Blick bezeichnen wir eine Orientierung vorrangig an den Fähigkeiten und den Sichtweisen der Lernenden statt primär an den Fehlern und den Defiziten. Die unterschiedlichen Reaktionen in der Abbildung verdeutlichen das Gegensatzpaar ‚Defizitorientierter Blick – Stärkenorientierter Blick‘. Die fünfjährige Sarah kann schon recht gut zählen, stolz sagt sie die Zahlwörter bis 95 auf und fährt fort:

... 96, 97, 98, 99, einhundert, zweihundert, dreihundert.

Nein, nein, das stimmt nicht, so kannst du doch nicht zählen. Es heißt hunderteins, hundertzwei, hundertzwei...

Die nächste Zahl könnte sicher „einhundert“ lauten, aber man hat sich darauf geeinigt, sie „hunderteins“ zu nennen.

defizitorientiert

kompetenzorientiert

Stärkenorientierung meint nun nicht, Kinder per se als kleine Genies zu betrachten und ihnen nur positive Rückmeldungen zu ihren Äußerungen zu geben. Es geht keineswegs um das Beschönigen oder um überdosiertes Lob. Das kann dazu führen, dass die Lernenden sich nicht mehr an ihren eigenen Leistungen orientieren, sondern nur noch an Einschätzungen von anderen. Und dieser Umstand wiederum kann sich auf das Empfinden von Selbstwirksamkeit und auf die Motivation negativ auswirken.

Stärkenorientierung heißt vor allem, auf das individuelle Denken der Kinder neugierig zu sein (vgl. Götze, Selter & Zannetin, 2019), die Denk- und Vorgehensweisen der Kinder aus ihrer Sicht als

2. Fünf Prinzipien als Orientierungen

Mathematische Kompetenzen entwickeln sich ...

- (1) .., indem inhaltliches Verständnis aufgebaut wird, nicht nur durch Aneignung unverstandener Rezepte (*Verstehensorientierung*),
- (2) ... durch aktives und tiefgehendes Denken, nicht durch Oberflächenlernen (*Kognitive Aktivierung*),
- (3) .., wenn mathematische Inhalte, Prozesse und Ideen immer wiederkehren und systematisch verknüpft werden (*Durchgängigkeit*),
- (4) .., wenn die Lernenden ausgehend von ihren individuellen Lernständen fokussiert gefördert werden (*Lernendenorientierung & Adaptivität*) und
- (5) .., wenn sich Verständnis in gemeinsamen Gesprächen mit Lehrkräften und Lernenden entwickeln kann (*Kommunikationsförderung*).

Gliederung

1. Sichtstrukturen und Tiefenstrukturen
2. Fünf Prinzipien als Orientierungen
3. Prinzip der Verstehensorientierung
4. Prinzip der Durchgängigkeit
5. Vernetztheit der Prinzipien

3. Prinzip der Verstehensorientierung

$$\begin{array}{r} 41 \\ - 17 \\ \hline 24 \end{array}$$



Erkläre, warum ...

... die Aufgabe $5 + 4$ dir bei der Aufgabe $15 + 4$ helfen kann!

Operations-
verständnis

Verständnis vor Automatisierung

- Verstehensgrundlagen identifizieren: Was sind die wesentlichen Aspekte, damit Kinder ein inhaltliches Verständnis aufbauen können?

Gelingensbedingungen:

- Verstehensgrundlagen fördern und sichern
- kontinuierlich Zusammenhänge zwischen Inhalten/Verstehensgrundlagen aufzeigen

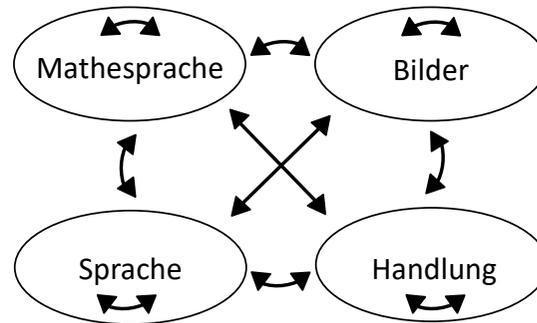
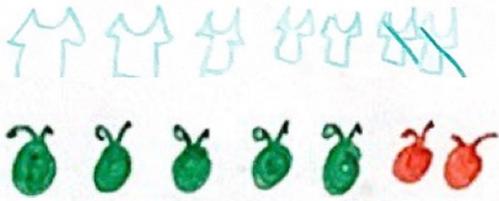
Verstehensorientierung



Ich verdeutliche mir für jeden Inhalt die wesentlichen Verstehensgrundlagen und Zusammenhänge.

3. Prinzip der Verstehensorientierung

7 - 2



Operations-
verständnis

Darstellungen kontinuierlich vernetzen, um Operationsvorstellungen aufzubauen

- verschiedene Darstellungsformen ineinander übersetzen
- Zusammenhänge zwischen und innerhalb von Darstellungsformen klären und sprachlich begleiten: „Warum passt das?“
- Mehrdeutigkeiten von Darstellungen erkennen und artikulieren
- Vereinbarungen für gemeinsame Deutungen treffen

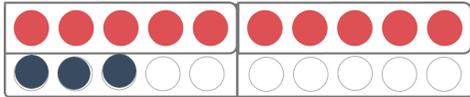
Verstehensorientierung



Ich vernetze verschiedene Darstellungen kontinuierlich und begleite dieses sprachlich.

3. Prinzip der Verstehensorientierung

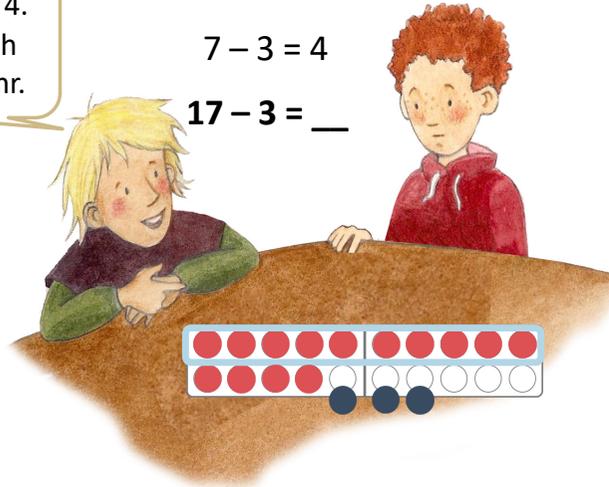
mit 10



10 + 3 ist einfach. Oben eine volle Reihe und unten 3. 1 Zehner und 3 Einer, das sind 13.

Ich weiß, 7 – 3 ist 4.
Bei 17 – 3 habe ich einen Zehner mehr.

$$7 - 3 = 4$$
$$17 - 3 = \underline{\quad}$$



Verstehensorientierung

- wird sichtbar in der Antwort auf „Erkläre, warum ...“
- benötigt die Klärung zentraler Aspekte für den jeweiligen Inhalt
- baut auf weiteren gesicherten Grundlagen auf

Verständnis vor Automatisierung

- Antworten auf die Aufforderung „Erkläre, warum ...“ einfordern
- geeignete Darstellungen identifizieren und vernetzen
- inhaltliche Zusammenhänge kontinuierlich herstellen

Verstehensorientierung



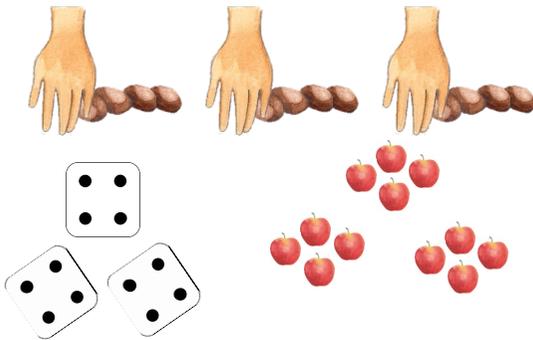
Ich sichere kontinuierlich inhaltliches Verständnis vor der Automatisierung (von Rechenfertigkeiten).

Gliederung

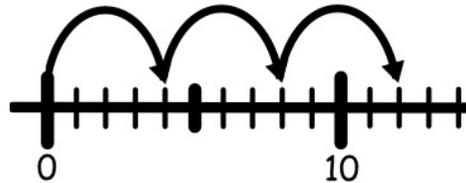
1. Sichtstrukturen und Tiefenstrukturen
2. Fünf Prinzipien als Orientierungen
3. Prinzip der Verstehensorientierung
4. Prinzip der Durchgängigkeit
5. Vernetztheit der Prinzipien

4. Prinzip der Durchgängigkeit

... 3 mal 4 ... das bedeutet **drei Vierer**



1 Vierer, 2 Vierer, 3 Vierer



1 Vierer



2 Vierer



3 Vierer



Tragfähige Darstellungen zum Vorstellungsaufbau ...

- machen die langfristig bedeutsamen Strukturen und Operationen sichtbar.
- bedürfen einer geeigneten sprachlichen Begleitung, die langfristig trägt.

Durchgängigkeit

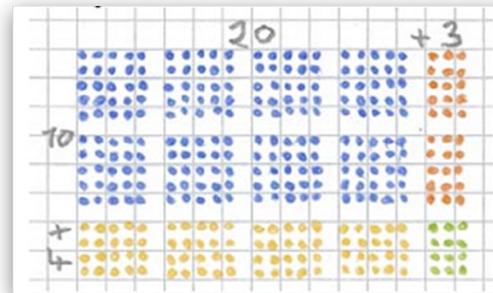
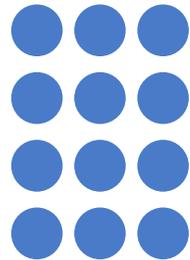


Ich nutze durchgängig tragfähige Darstellungsmittel und passende sprachliche Begleitungen zum Vorstellungsaufbau.

4. Prinzip der Durchgängigkeit

Aber ich habe doch die Zahlen zerlegt!

$$14 \cdot 23 = 212$$



	20	3	
10	200	30	230
4	80	12	32
			322

Darstellungsvernetzung ...

- sollte im Lernprozess kontinuierlich (...) genutzt werden (...)
- ermöglicht es, Schwierigkeiten im Lernprozess im Sinne der Verstehensorientierung unter Rückgriff auf die Darstellungen aufzuarbeiten
- sollte über die Schuljahre hinweg (...) genutzt werden, um (...) Inhalte aufeinander zu beziehen und an bereits vorhandenen Vorstellungen anzuknüpfen

Durchgängigkeit

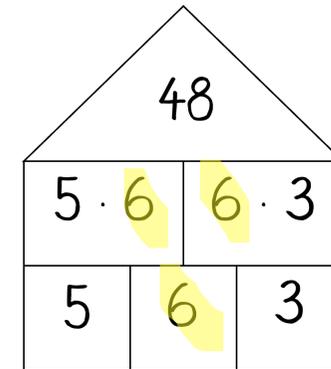
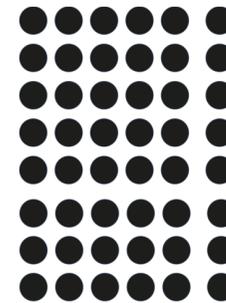


Ich nutze die Darstellungsvernetzung fortlaufend, um die Kontinuität mathematischer Strukturen zu verdeutlichen

4. Prinzip der Durchgängigkeit



Ich habe 5 Sechser und 6 Dreier. Wenn ich das Bild drehe, habe ich 3 Sechser, also insgesamt 8 Sechser.
 $8 \cdot 6 = 48$



Tragfähige Darstellungen als Argumentations- und Kommunikationsmittel ...

- machen mathematische Strukturen und Zusammenhänge sichtbar
- ermöglichen das Kommunizieren über mathematische Strukturen und Zusammenhänge
- unterstützen bei der Erklärung mathematischer Muster

Durchgängigkeit

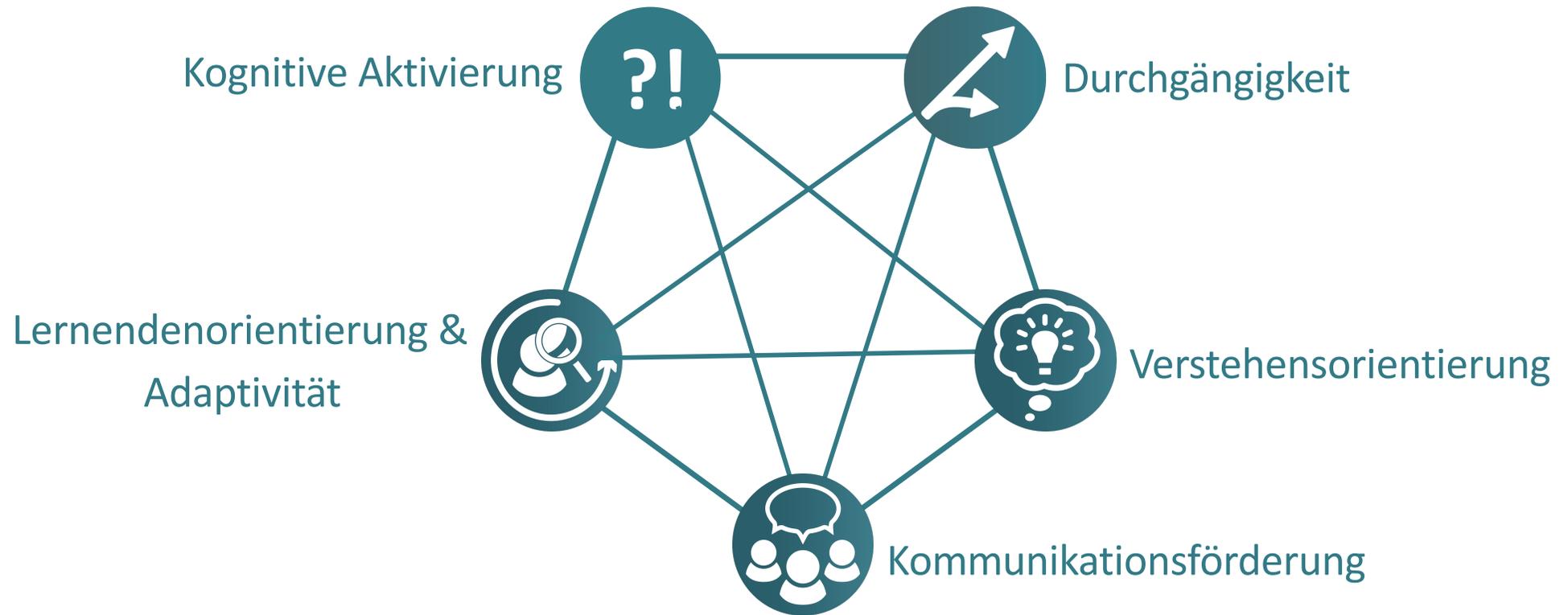


Ich nutze durchgängig tragfähige Darstellungen als Kommunikations- und Argumentationsmittel.

Gliederung

1. Sichtstrukturen und Tiefenstrukturen
2. Fünf Prinzipien als Orientierungen
3. Prinzip der Verstehensorientierung
4. Prinzip der Durchgängigkeit
5. Vernetztheit der Prinzipien

5. Vernetztheit der Prinzipien



5. Vernetztheit der Prinzipien – Handreichungen auf pikas.dzlm.de/node/2285



Material für den Unterricht auf pikas.dzlm.de/node/2286

Kartei "Was? Wie? Warum?"

Die Kartei möchte bei der Unterrichtsplanung Anregungen geben, wie Sie vielfältige Anlässe schaffen können, um Kinder zum Beschreiben und Begründen aufzufordern und sie bei der Formulierung von eigenen Beschreibungen und Begründungen zu unterstützen. Die auf den Karten der Kartei gegebenen Beispiele, Impulse und Unterstützungsangebote lassen sich an Ihren aktuellen Unterrichtsinhalt adaptieren und können so das Angebot Ihres Unterrichtswerks erweitern.

Hier gelangen Sie zur Kartei "Was? Wie? Warum?"

Zusammenhänge begründen

Eigene Begründungen vornehmen **8**

Anlass: Rechenwege zuordnen

Warum passt das? $7 \cdot 96 = 672$

Anlass: Rechenoperationen zuordnen

20 Kinder sind im Chor. In jeder 5 Kinder stehen in einer Reihe. $20 : 5$

Auf einem Tisch stehen 20 Flaschen, Lena stellt noch 5 Flaschen dazu. $20 + 5$

Ziel der Begründung von Zusammenhängen

Die Suche nach einer Antwort auf die Frage „Warum passt das?“ fordert nicht nur (oberflächliches), eher prozedurales Beschreiben ein, sondern lässt sich als Gesprächsanlass nutzen, um ...

- verschiedene Darstellungen verstehen zu lernen.
- Darstellungen miteinander zu vernetzen.
- mathematische Muster und Strukturen zu durchdringen und ein vertieftes Verständnis zu erlangen.

Beispielhafte Impulse

- Erkläre, warum das passt!
- Woran kannst du erkennen, dass es zusammen passt?
- Zeige uns (am Material, mit einer Zeichnung, ...), warum das zusammen gehört!
- Erkläre und zeichne (Zeichnung, ...), warum das zusammen passt!

Zusammenhänge begründen

Eigene Begründungen vornehmen **8**

Unterstützungsangebote für das Begründen von Zusammenhängen

- Materialhandlungen einbeziehen, z. B. Zusammenhang von Aufgaben mit Hilfe von anschaulichen Darstellungen verdeutlichen
- den Entstehungsprozess vorgegebener Darstellungen nachvollziehen, z. B. Darstellungen am Rechenstrich gemeinsam nachzeichnen

Wichtiges

Das inhaltliche Verständnis der Kinder wird sichtbar in ihren Antworten auf die Frage „Erkläre, warum es passt!“. Die Antworten der Kinder machen Verstehensgrundlagen, aber auch noch bestehende Verstehenslücken sichtbar und können somit als diagnostische Momente dienen.

Die Nummer 2 passt zu $3 \cdot 4 = 12$, denn es sind 3 Vierer.

Weitere Anlässe für das Begründen von Zusammenhängen

Zusammenhänge in Aufgabenserien erklären, z. B. ...

- Warum bleibt das Ergebnis in schönen Pläckchen immer gleich?
- Warum wird der Deckstein in der Zahlenmauer immer um 1 größer?

Zahlbeziehungen erklären, z. B. ...

- Zahlen verdoppeln und halbieren: „Warum kann ich jede Zahl verdoppeln? Warum kann ich 7 Plättchen nicht in 2 gleich große Hälften zerlegen?“
- Teiler einer Zahl: „Warum kann ich 5 nicht durch 2 teilen, aber 10 schon?“
- Zahlzerlegungen erklären: „Warum sind das alle?“

Zusammenhänge von/in Darstellungen erklären, z. B. ...

- die Passung von verschiedenen Aufgaben in anschaulichen Darstellungen erklären.

Warum passen alle Aufgaben zum Punktebild?

Warum passt das alle Aufgaben zum Punktebild?

Literatur

- Holzäpfel, L., Prediger, S., Götze, D., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2024) Fünf Prinzipien für qualitätvollen Mathematikunterricht. *Mathematik lehren* 242, 2–9. <https://www.friedrich-verlag.de/shop/mwdownloads/download/link/id/114555/>
- Klieme, E., Schümer, G. & Knoll, S. (2001). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: „Aufgabenkultur“ und Unterrichtsgestaltung im internationalen Vergleich. In E. Klieme, & J. Baumert (Hrsg.), *TIMSS – Impulse für Schule und Unterricht* (S. 43–57). Bonn: BMBF.
- Praetorius, A. K., Klieme, E., Herbert, B. & Pinger, P. (2018). Generic dimensions of teaching quality: the German framework of Three Basic Dimensions. *ZDM Mathematics Education* (50), 407–426. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0918-4>
- Prediger S, Götze D, Holzäpfel L, Rösken-Winter B. & Selter C (2022). Five principles for high-quality mathematics teaching: Combining normative, epistemological, empirical, and pragmatic perspectives for specifying the content of professional development. *Frontiers in Education* 7:969212. doi: 10.3389/educ.2022.969212
- Trautwein, U., Sliwka, A. & Dehmel, A. (2022). Grundlagen für einen wirksamen Unterricht. Institut für Bildungsanalysen Baden-Württemberg. https://ibbw-bw.de/site/pbs-bw-km-root/get/documents_E552984303/KULTUS.Dachmandant/KULTUS/Dienststellen/ibbw/Empirische%20Bildungsforschung/Programme-und-Projekte/Wirksamer_Unterricht/IBBW_WU1_Trautwein_et_al%20%282022%29_GrundlagenWirksamerUnterricht.pdf