



# Haus 3: Umgang mit Rechenschwierigkeiten



## 4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?

**Darstellungsmittel, die fortsetzbar für alle Schuljahre sind**

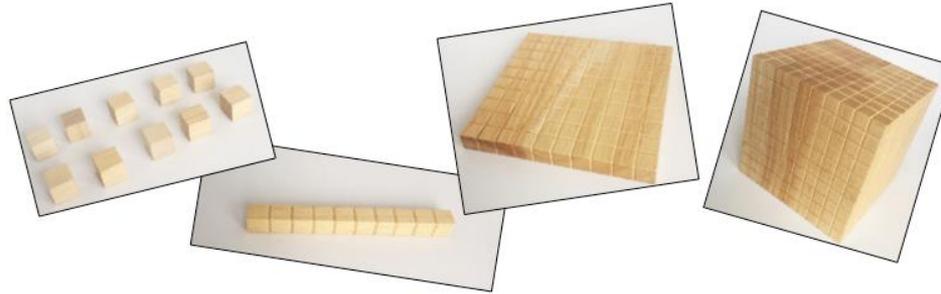
Zum Beispiel das „10er-System-Material“ (Dienes)

*Einer-Würfel*

*Zehner-Stange*

*Hunderter-Platte*

*Tausender-Würfel*



Juni 2018 © PIK AS (<http://www.pikas.dzlm.de>)



78

## Modul 3.5

# Guter Einsatz von Darstellungsmitteln





# Hinweise zu den Lizenzbedingungen



**Diese Folie gehört zum Material und darf nicht entfernt werden.**

- Dieses Material wurde vom PIKAS-Team für das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) konzipiert und kann unter der **Creative Commons Lizenz BY-SA: Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International** weiterverwendet werden.
- Das bedeutet: Alle Folien und Materialien können für Zwecke der Aus- und Fortbildung unter der Bedingung heruntergeladen, verändert und genutzt werden, dass alle Quellenangaben erhalten bleiben, PIKAS als Urheber genannt und das neu entstandene Material unter den gleichen Bedingungen weitergegeben wird.
- Von der Weitergabe ausgenommen sind Fotos, die erkennbar reale Personen zeigen.
- Bildnachweise und Zitatquellen finden sich auf den jeweiligen Folien bzw. in den Zusatzmaterialien.
- Weitere Hinweise und Informationen zu PIKAS finden Sie unter <http://pikas.dzlm.de>.



# Aufbau des Fortbildungsmoduls 3.5

---

1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“
2. Was sind Darstellungsmittel?
3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?
4. Welche Darstellungsmittel wähle ich aus?
5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?
6. Abschluss





# Aufbau des Fortbildungsmoduls 3.5

---

1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“
2. Was sind Darstellungsmittel?
3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?
4. Welche Darstellungsmittel wähle ich aus?
5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?
6. Abschluss





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

---

„**Mathe in den Kopf?**“ – **Wie geht das eigentlich?**

**Ziel** des heutigen **Mathematikunterrichts** in der Grundschule ist es, dass jedes Kind sicher Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren lernt.

Dabei muss jeder Schüler die **Zeit und Möglichkeit** erhalten, eine **tragfähige Zahl- und Operationsvorstellung** aufzubauen. Beide bilden die Grundlage, um später flexibel rechnen zu können.





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

---

## „Mathe in den Kopf?“ – Wie geht das eigentlich?

Bei der **Frage** wie die Mathematik eigentlich in die Köpfe der Kinder kommt, geht es im Wesentlichen um die Überlegung, **wie sich Vorstellungsbilder von mathematischen Mustern und Strukturen in den Köpfen aufbauen** können, damit jedes Kind am Ende **flexibel im Kopf rechnen** kann.





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

---

„**Mathe in den Kopf?**“ – **Wie geht das eigentlich?**

Von **flexiblem Rechnen** spricht man dann, wenn ein Kind im Kopf **ohne „Hilfsmittel“**, sondern lediglich **durch die in der Vorstellung entstandenen Bilder**, rechnen kann.





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

## Am Anfang lernt das Kind so...

### Der individuelle Lernprozess

Phase des Konkreten	Übergangsphase	Phase des Abstrakten
<i>spielen, anfassen, wahrnehmen, analysieren, ...</i>	<i>nachzählen, vergleichen, zuordnen, sortieren, was passt zusammen, ...</i>	<i>Mit Symbolen arbeiten: Zahlen zu Turmbauten aufschreiben. Eine Summenzahl dazu notieren, ...</i>
Kind begegnet konkreten, sinnlich wahrnehmbaren Dingen seiner Umwelt. Es beurteilt die Welt nach ihrem äußeren Schein. „Ich habe mehr Klötze als du“ kann dabei eine erste Feststellung sein.	Kind kombiniert das Konkrete mit etwas Abstraktem. Es vergleicht einen Turm aus Klötzen, zählt ab welcher größer ist. Es stellt fest, dass sein Nachbar 5 mehr hat und kann evt. schon eine 5 auf ein Blatt kritzeln.	Bildliche und symbolische Darstellungen können konkrete Handlungen ersetzen.  Ablösung vom Material: →Es benötigt keine Bauklötze mehr, um $5+3=8$ zu ermitteln.

In Anlehnung an: Hoenisch/ Niggemeyer: „Mathekings“, S. 30/31.





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

---

## Aber...

Das Modell ist nicht linear zu verstehen.

Das Kind befindet sich beim Lernen immer im Prozess.

In diesem geht es Schritte „vor“ und auch „zurück“.

Es zeigt an einem Tag Vorstellungen, die es unter Umständen am nächsten Tag nicht mehr wiederholen kann.

Das Kind baut teilweise gleichzeitig an verschiedenen Pfeilern seiner „Vorstellungsbrücke“!

TIPP: Zeit geben!

Die bildliche und handelnde Ebene darf nicht zu schnell verlassen werden.

Wessolowski, S. 30)

(vgl. Kaufmann/





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

## Mathe in den Kopf?!

Seit Jahrhunderten ist man sich nicht nur in der Didaktik der Mathematik einig darüber, dass **Handeln** das Lernen begünstigt.

*Frage??*

„Wie stellt man sich dieses Handeln aber konkret im Mathematikunterricht vor?

Wie kommt es dabei zu „den Zahlen im Kopf?“

(Lorenz 2011, S. 39)





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

---

## Mathe in den Kopf?!

Für den Mathematikunterricht erfand man im Laufe der Zeit verschiedenste **didaktische Materialien** um mathematische Strukturen und Muster mithilfe einer Handlung zu verdeutlichen.

*Frage??*

„Wie hat man sich aber das Lernen mit diesen Materialien vorzustellen?“

(Lorenz 2011, S. 39)





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

## Mathe in den Kopf?!

### Von der Handlung zur mentalen Vorstellung („Mathe im Kopf“)

„Konkrete Phase“

Mit Material handeln  
und Handlungen  
beobachten  
(von sich selbst und  
anderen).

„Auf dem Weg in den  
Kopf“

Rechenwege im Kopf  
vorstellen und  
beschreiben.

„Im Kopf (richtig) rechnen“

Mit dem „Bild im Kopf“  
(mentale Vorstellung) ohne  
Material rechnen.

Modell in Anlehnung an Wartha IN Schipper/ Wartha/ Schroeders 2011, S.113f.





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

## Mathe in den Kopf?!

Von der Handlung  
zur mentalen Vorstellung („Mathe im Kopf“)



„Konkrete Phase“

„Auf dem Weg in den  
Kopf“

„Im Kopf (richtig) rechnen“

**Was** genau im Kopf eines Kindes passiert, können wir nur erahnen.  
**Im Austausch mit ihm**, kann es uns Einblicke in seinen „Kopf“ gewähren.

**Am Ende scheint es so zu sein:**  
**„ ...das ‚Nahebringen‘ und seine Wirkung bleiben unscharf,  
das Kind verbleibt eine black box.“**

(Lorenz 2011, S. 51)





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

---

## **Mathe in den Kopf?! Das kann helfen:**

- Bereitstellung und Nutzung ausgewählter Materialien
- guter Umgang mit diesen Materialien
- Gespräche (und Instrumente) zur Überprüfung der Vorstellungen, die Kinder „im Kopf“ haben





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

## Material nutzen zum **Aufbau von Zahlvorstellung**

Alltagsmaterial benutzen





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

## Material nutzen zum **Aufbau von Zahlvorstellung**

### **Wichtig: Der kardinale Aspekt!!**

„Für viele Kinder ist es zunächst schwer zu verstehen, dass 3 Kinder „drei Kinder“ sind, das 3. Kind jedoch nur eines.“

(Kaufmann/ Wessolowski)

2006, S. 22)

„Da sind mehr  
Nüsse“ (kardinal)



L: „Könnt ihr jetzt sagen, wie viel mehr  
Nüsse im vollen Glas waren?“

B: „elf!“

M: „sechs!“

### **Weitere Übungen:**

z. B. Teil-Ganzes Beziehungen verdeutlichen:



Grundschulzeitschrift Heft 182, 2005 (W. Schipper, Förderkartei)

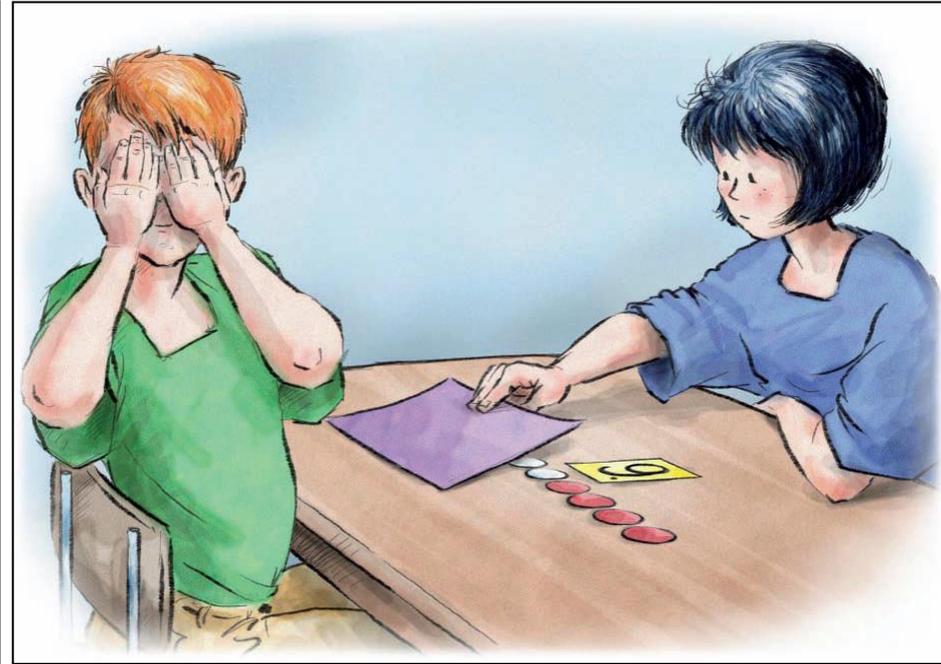
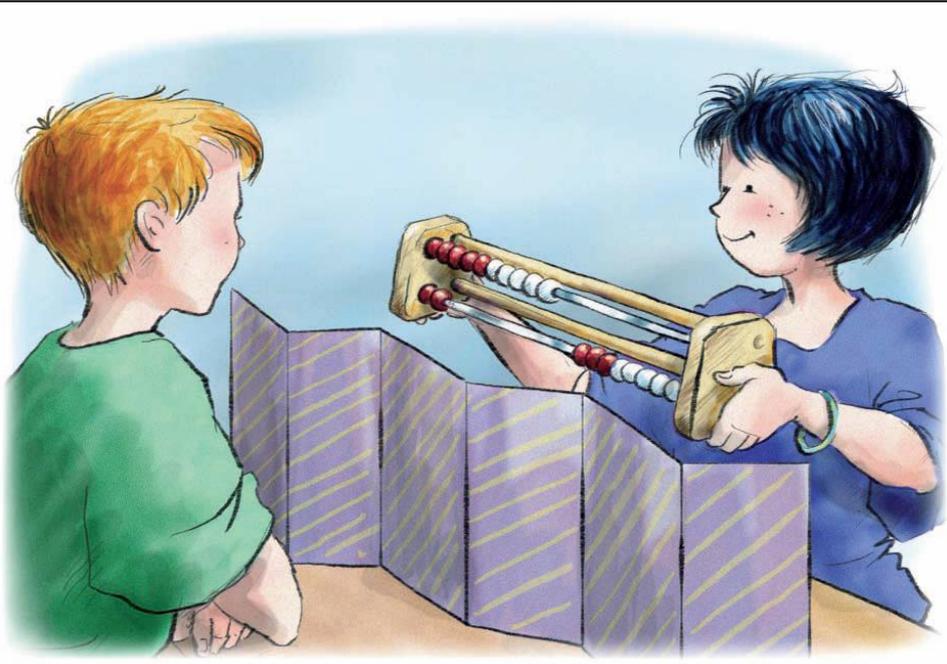




# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

## Material nutzen zum **Aufbau von Zahlvorstellung**

Mathematisches Material benutzen



Bilder: W. Schipper, Förderkartei: [www.uni-bielefeld.de/idm/serv/rechenstoer.htm](http://www.uni-bielefeld.de/idm/serv/rechenstoer.htm)

„Blitzgucken“

„Zerlegen“



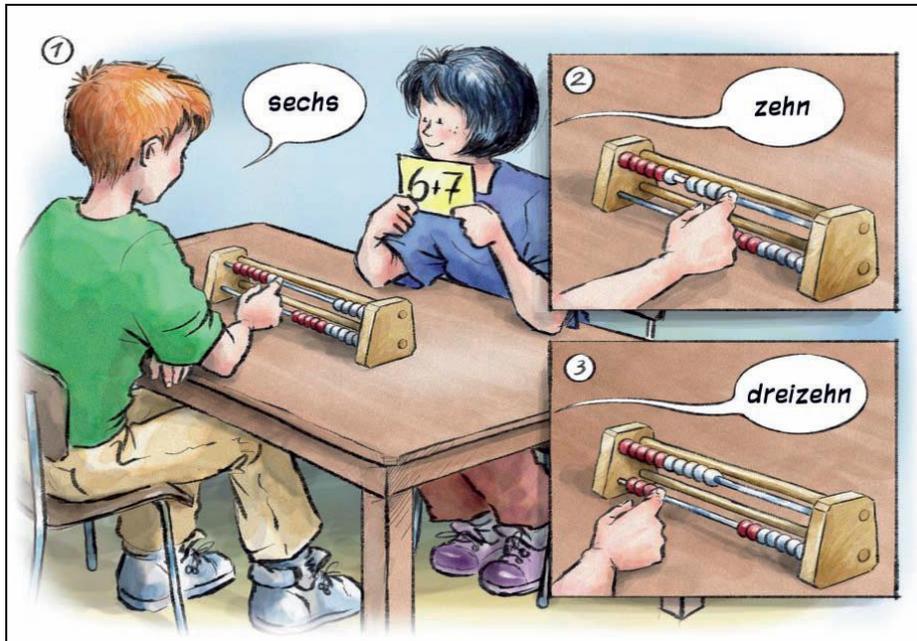


# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

## Material nutzen zum **Aufbau von Operationsvorstellung**

Mathematisches Material benutzen

Mit Material handeln und Handlung beobachten / beschreiben



Rechenweg im Kopf vorstellen und beschreiben



Bilder: W. Schipper, Förderkartei: [www.uni-bielefeld.de/idm/serv/rechenstoer.htm](http://www.uni-bielefeld.de/idm/serv/rechenstoer.htm)





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

## Material nutzen zum **Aufbau von Operationsvorstellung**

Mathematisches Material benutzen

Mit Material handeln und Handlung beobachten / beschreiben



Rechenweg im Kopf vorstellen und beschreiben



Bilder: W. Schipper, Förderkartei: [www.uni-bielefeld.de/idm/serv/rechenstoer.htm](http://www.uni-bielefeld.de/idm/serv/rechenstoer.htm)





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

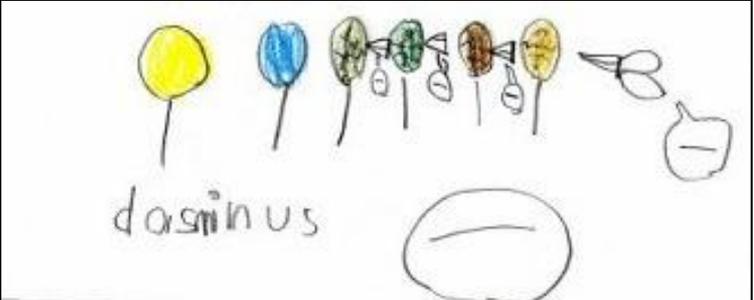
## „Blick in den Kopf“

Die Beobachtung von Schülern beim Darstellungswechsel und das Gespräch darüber geben z.B. Auskunft über die **Zahl- und Operationsvorstellung**

Name: Denis  
Datum:

 Manche Kinder können nicht lesen und sie kennen auch das Minuszeichen nicht. Erkläre einem Kind die Aufgabe  $6 - 4 = 2$ .

 Du kannst ein Bild dazu malen!



das minus 



# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

---

**Heute wissen wir...**

„ (...),  
dass Schwierigkeiten (beim Rechnen lernen)  
nicht unbedingt  
Schwierigkeiten mit der Mathematik sein müssen,  
sondern  
Schwierigkeiten mit dem Mathematikunterricht  
sein können.“

(Spiegel/ Selter 2007)





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

---

## Fakten aus BIRTE 2

Die Vergleichsstudien TIMSS, PISA und IGLU zeigen, dass bei etwa **20%** der deutschen SchülerInnen die mathematischen Kompetenzen so niedrig sind, dass sie große Probleme bei der Bewältigung mathematischer Anforderungen in der Schule und im späteren Berufsleben zu erwarten haben.

Immer wieder kehrende Symptome:

- Verfestigtes *zählendes Rechnen*
- *Eingeschränktes Verständnis für die Stellenwerte*
- *Unzureichende Vorstellung für Zahlen und Operationen*





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

## Fakten aus BIRTE 2

**„Unser Schulsystem ist auf die Arbeit mit solchen Kindern nicht gut vorbereitet. (...).“**

Für Lehrerinnen und Lehrer stellen Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen eine große Herausforderung dar, weil sie in aller Regel weder in der ersten noch in der zweiten Ausbildungsphase gelernt haben, Symptome für Rechenstörungen zu diagnostizieren, um auf dieser Basis individuelle Förderpläne zu erstellen und umzusetzen (...).

Möglichkeiten einer angemessenen Prävention oder Intervention – auch im Rahmen des Regelunterrichts- können daher häufig nicht genutzt werden. Hier fehlen zu oft die spezifischen Fachkenntnisse und die notwendigen organisatorischen Rahmenbedingungen.“ (Schipper 2011, S. 4)





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

## Forderungen nach BIRTE 2

„Reduzierung der exzessiven Nutzung unstrukturierter **Materialien**“ (vor allem Rechenplättchen).

Schwierigkeit scheint in der Praxis zu stecken: Lehrerinnen sind sich unsicher, wann und wie sie auf andere (strukturierte) Materialien umsteigen sollen.

„Frühe und dauerhafte Sicherung von Zahl- und Aufgabenbeziehungen“.

Ein Fünftel der Kinder war nicht in der Lage das Doppelte von 6 zu bestimmen. Tipp hier: „Faktenwissen“ aneignen. Meint nicht stumpfes Auswendiglernen!  
„Faktenwissen macht frei für andere Anforderungen!“

„Sicherung des Verständnisses strukturierter **Materialien**“.

BIRTE 2 zeigt, dass Probleme der Kinder nicht dadurch entstanden, dass keine strukturierten Materialien verwendet wurden. Die Frage ist, WIE sie konkret genutzt wurden. Wichtig wären zunächst ausführliche Übungen zur quasi-simultanen Zahlauffassung, da sie Strukturverständnis und operatives Verständnis fördern.



# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

---

## Daraus folgt...

**... Notwendigkeit der gezielten Auswahl und des passenden Einsatzes von Darstellungsmitteln beim**

1. Aufbau von Zahlvorstellungen (Modul 3.1 / Modul 3.4)
2. Aufbau von Operationsvorstellungen (Modul 3.2)
3. Ableiten und Automatisieren / flexiblen Rechnen (Modul 3.3)





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

## Daraus folgt...

... **Notwendigkeit der gezielten Auswahl und des passenden Einsatzes von Darstellungsmitteln beim**

1. Aufbau von Zahlvorstellungen (Modul 3.1 / Modul 3.4)
2. Aufbau von Operationsvorstellungen (Modul 3.2)
3. Ableiten und Automatisieren / flexiblen Rechnen (Modul 3.3)

### Es muss geklärt werden:

1. Was sind Darstellungsmittel?
2. Wozu brauche ich Darstellungsmittel?
3. Welche Darstellungsmittel wähle ich aus?
4. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?

**Modul 3.5**





# 1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“

## Es muss geklärt werden:

1. Was sind Darstellungsmittel?
2. Wozu brauche ich Darstellungsmittel?
3. Welche Darstellungsmittel wähle ich aus?
4. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?

**Modul 3.5**

## Und auch das:

- ... „Wenn alle Kinder rechnen können, benötige ich Darstellungsmittel höchstens noch zum Fördern, oder?“
- ... Wie lange können/ sollen Schüler Darstellungsmittel beim Rechnen benutzen?
- ... Sind Darstellungsmittel „offen“ zugänglich oder erhalten nur „bestimmte“ Kinder „bestimmtes“ Material?





# Aufbau des Fortbildungsmoduls 3.5

---

1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“
2. Was sind Darstellungsmittel?
3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?
4. Welche Darstellungsmittel wähle ich aus?
5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?
6. Abschluss





## 2. Was sind Darstellungsmittel?

---

### **Begriffe, die dasselbe meinen...**

Montessori: „Mathematisches Material“

Radatz/ Schipper (Handbuch 1, 1996): „Arbeitsmittel“

Gaidoschik (2000): „Anschauungsmaterial“ oder „Erarbeitungsmaterial“

Spiegel/ Selter (2003): „Anschauungsmittel“, „Veranschaulichungen“,  
„anschauliche Darstellungen“

Lorenz (2003): „Veranschaulichungsmittel“

Rödler (2006): „Rechenmittel“

Kaufmann/ Wesslowski (2006): „Arbeitsmittel“

Scherer/Opitz (2010): „Anschauungsmittel und Veranschaulichungen“





## 2. Was sind Darstellungsmittel?

### PIK definiert so:

Wir sprechen von

**DarstellungsFORMEN** und **DarstellungsMITTELN**.

**DarstellungsFORMEN** sind

- Handlungen
- Bildliche Darstellungen
- Symbolische Darstellungen
- Sprache

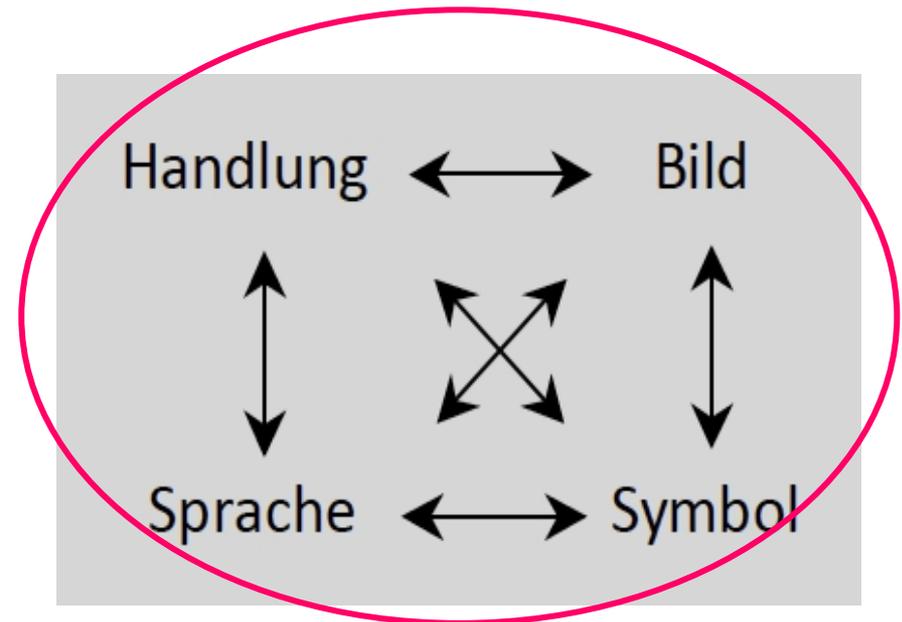


Abbildung entnommen aus: Kaufmann & Wessolowski 2006, S. 25





## 2. Was sind Darstellungsmittel?

**DarstellungsFORMEN** werden durch unterschiedliche **DarstellungsMITTEL** repräsentiert.

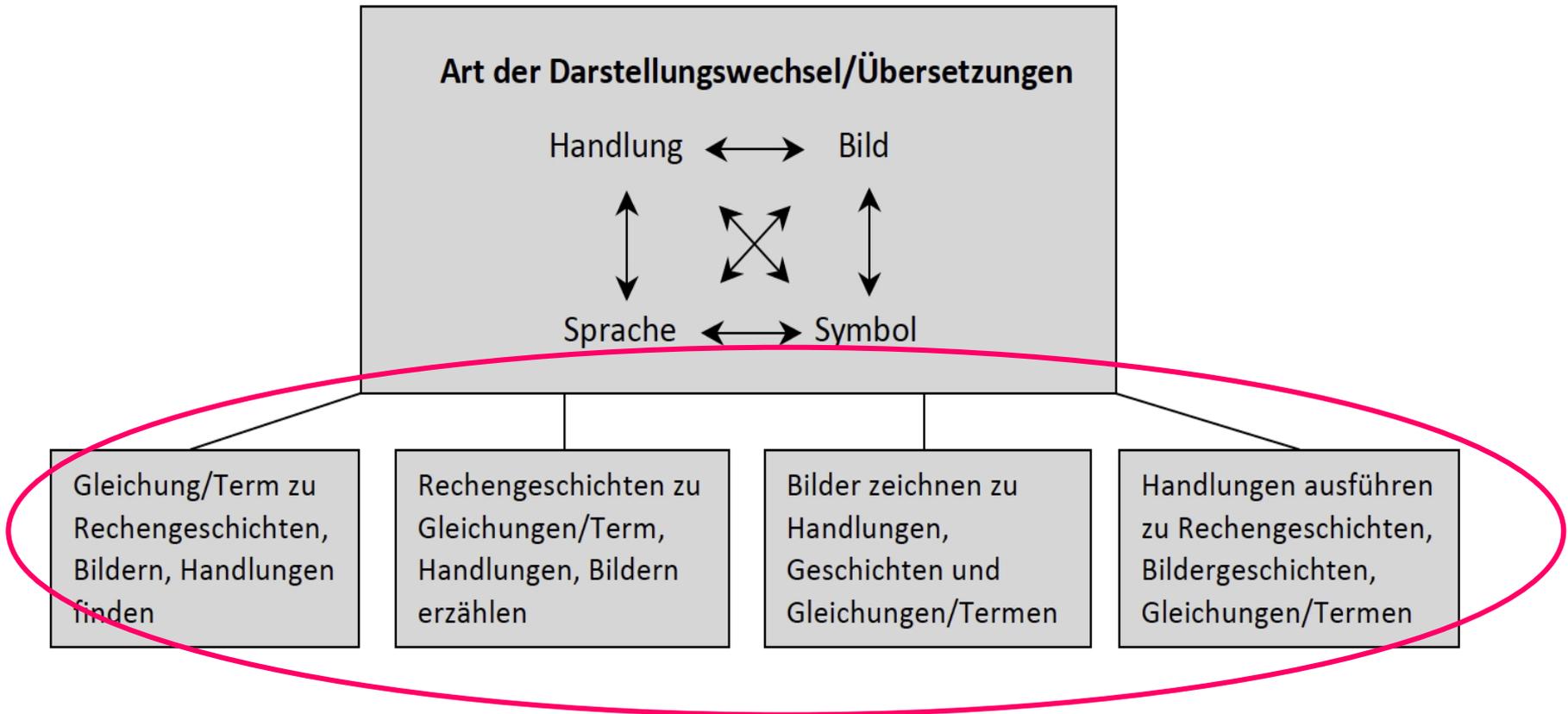


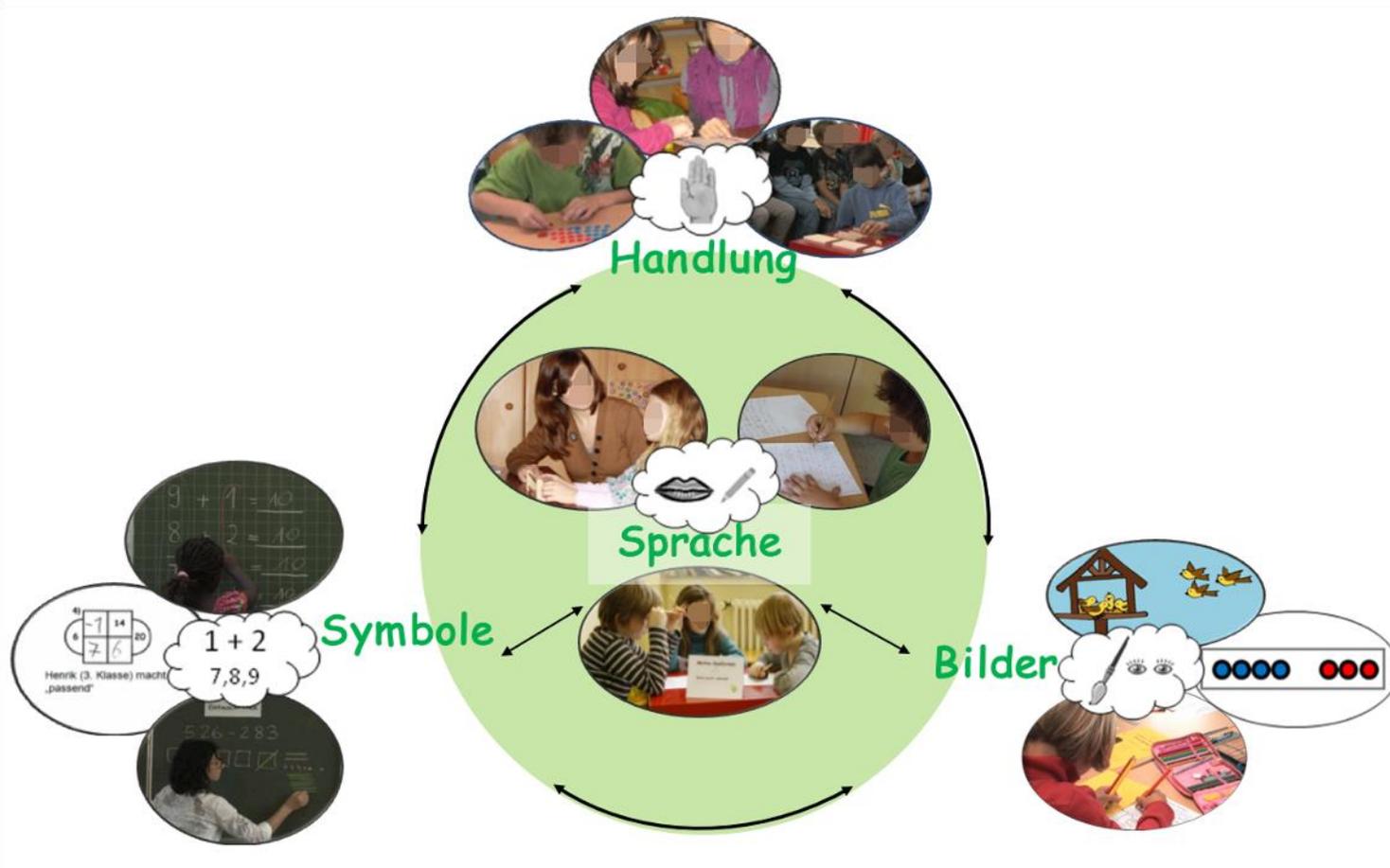
Abbildung entnommen aus: Kaufmann & Wessolowski 2006, S. 25





## 2. Was sind Darstellungsmittel?

### Darstellungsformen und Darstellungsmittel

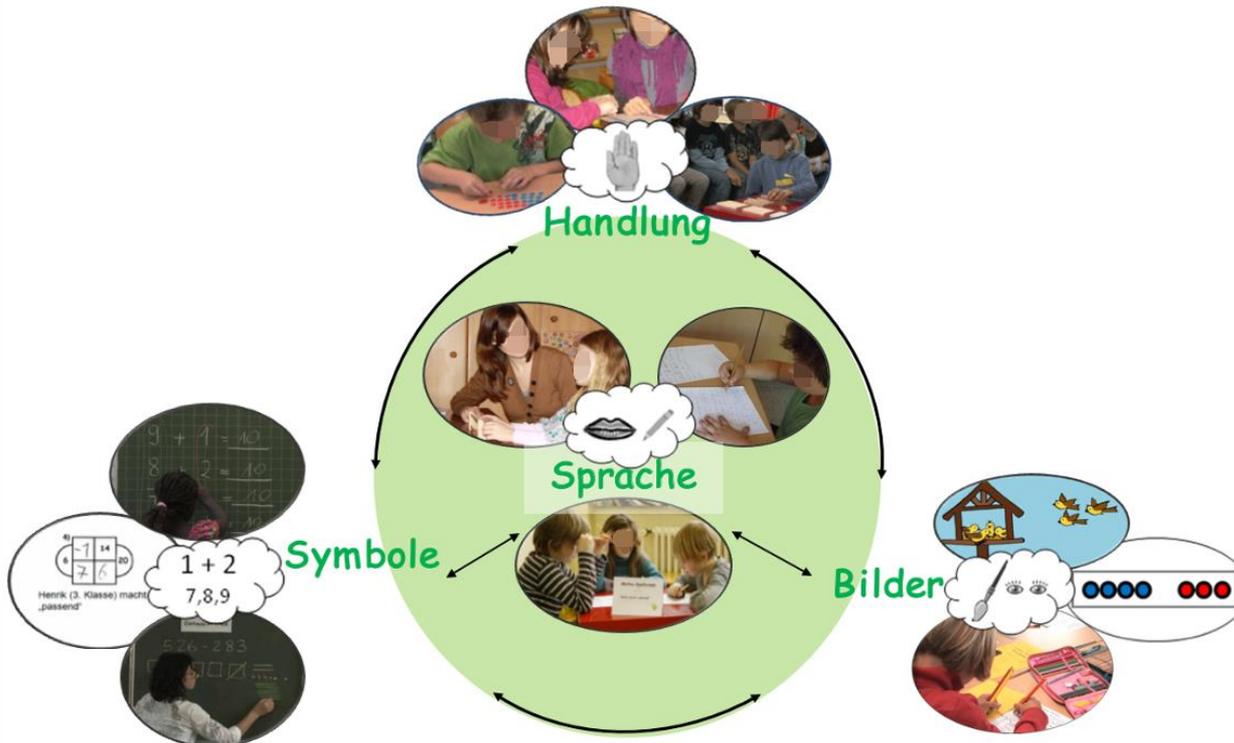




## 2. Was sind Darstellungsmittel?

### Darstellungsformen und Darstellungsmittel

Die verschiedenen **DarstellungsFORMEN** und **DarstellungsMITTEL** sind jedoch nicht als *Stufen* zu verstehen, die der Reihe nach hinter sich gelassen werden.





## 2. Was sind Darstellungsmittel?

### Was genau sind eigentlich Darstellungsmittel?

#### Handlung

<b><i>Unstrukturierte Materialien</i></b>	<b><i>Strukturierte Materialien</i></b>
<p><b><u>Naturmaterialien</u></b> (Kastanie, Eicheln, Nüsse, Apfel, ...)</p> <p><b><u>Alltagsmaterialien</u></b> (Bauklötze, Spielfiguren, Perlen, Muggelsteine, diverse Plättchen, ...)</p> <p><b><u>Didaktische Materialien</u></b> (Wendeplättchen - <b>wenn sie ohne das Feld benutzt werden</b> - , Ziffernkarten, ...)</p>	<p><b><u>Didaktische Materialien</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪ Zahlenbilder</li></ul> <p><b>(Würfelbilder, Abb. Blitzgucken, Punktefelder)</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪ Rechenkette/ Zahlenstrahl</li><li>▪ 10er System-Material (Dienes)</li><li>▪ Rechenrahmen</li><li>▪ 20er Feld mit Wendeplättchen</li><li>▪ 100er Feld/ 100er Tafel</li><li>▪ Finger (Kraft der 5)</li><li>▪ Rechengeld (<b>Eignung wird allerdings unterschiedlich bewertet...</b>)</li></ul>





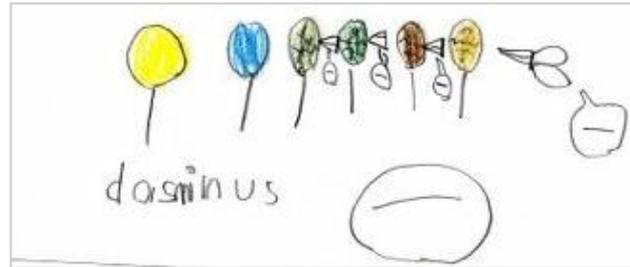
# 2. Was sind Darstellungsmittel?

## Was genau sind eigentlich Darstellungsmittel?

**Bilder**



**Sprache**



4 Kinder Schignen salei. 3 Kinder  
Wolen mit Schiben.

546 - 198 = 348	Bietet sich für diese Zahlen ein besonderer Rechen-trick an? ja <input checked="" type="checkbox"/> nein <input type="checkbox"/>
546 → 498 = 548 - 200 = 348	Erkläre deinen Rechenweg! Die eine Zahl ist sehr nah an dem nächster Hundertert deswegen kann mann sehr gut den veränder gleich trick machn nemehn

**Symbole**

$$7 - 4$$

$$54$$

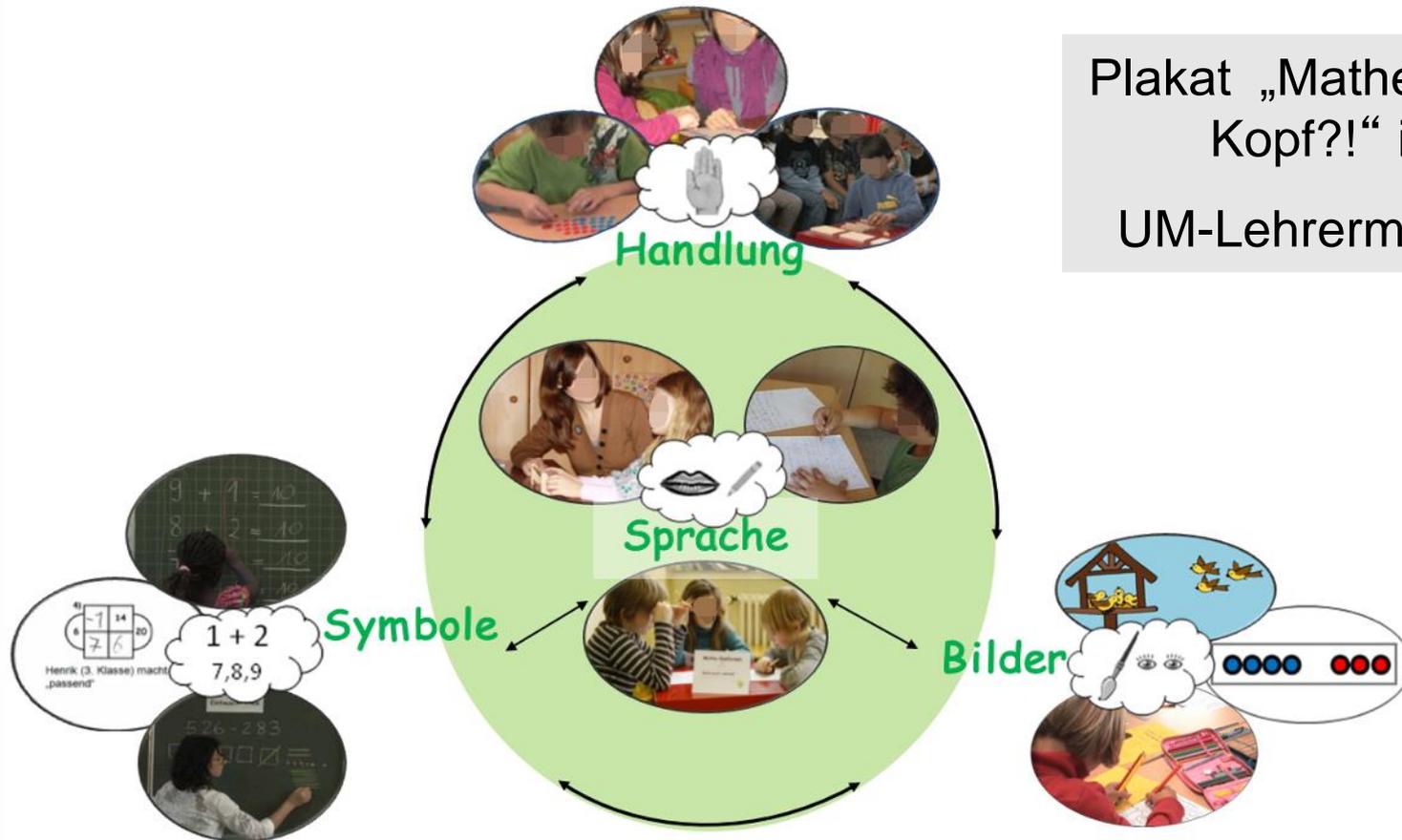
$$< >$$





## 2. Was sind Darstellungsmittel?

### Darstellungsformen und Darstellungsmittel





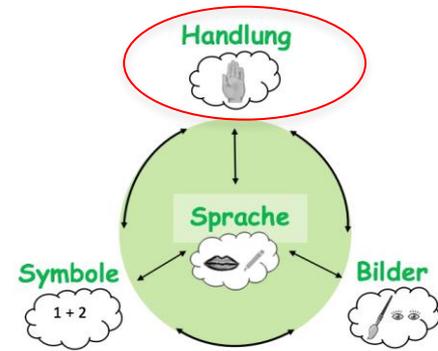
## 2. Was sind Darstellungsmittel?

### Darstellungsformen und Darstellungsmittel

#### Handlung

Was? Mit didaktischem Material oder mit Alltags- und Naturmaterial handeln, spielerische Darstellung (z. B. Rollenspiel), aktives und passives Handeln.

Wozu? Handlungen zu Rechengeschichten, Bildergeschichten, Termen/Gleichungen.



Familie Becker hat vier Kinder. Manchmal spielen alle zusammen. Am Wochenende kommen drei Kinder zu Besuch.



$$4 + 3$$

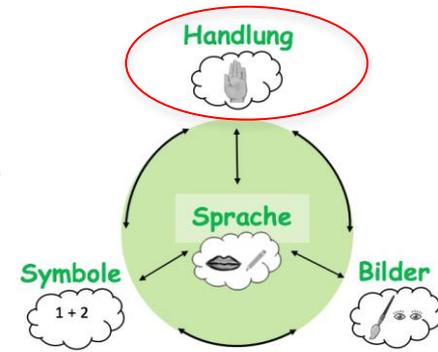
**Handlung**





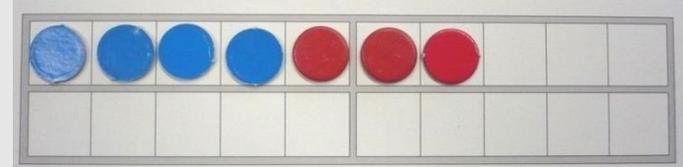
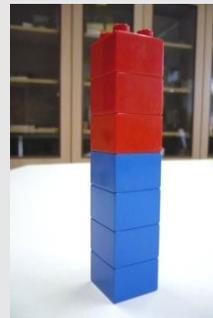
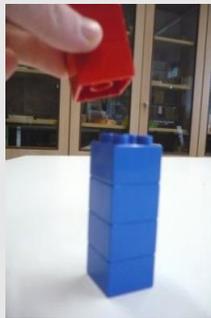
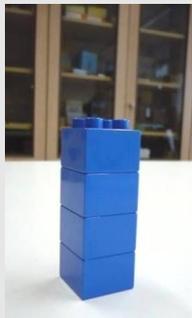
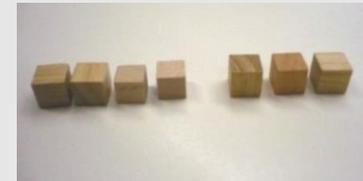
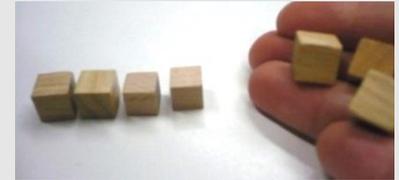
# 2. Was sind Darstellungsmittel?

## Darstellungsformen und Darstellungsmittel



Handlungen werden vollzogen an  
 z.B. **Alltags- und Naturmaterial**

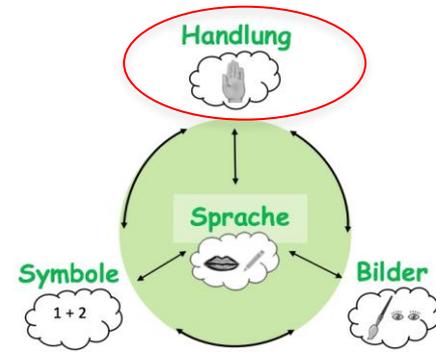
oder **didaktisch (strukturiertem) Material**



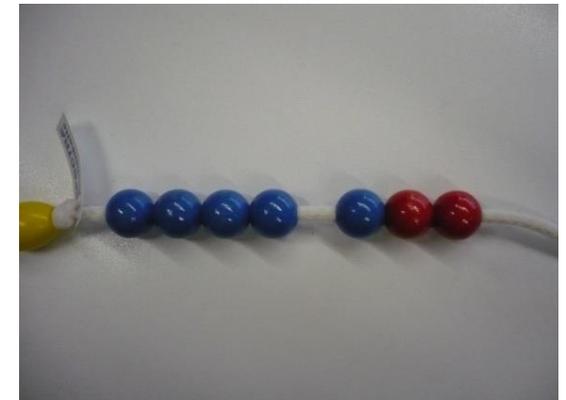
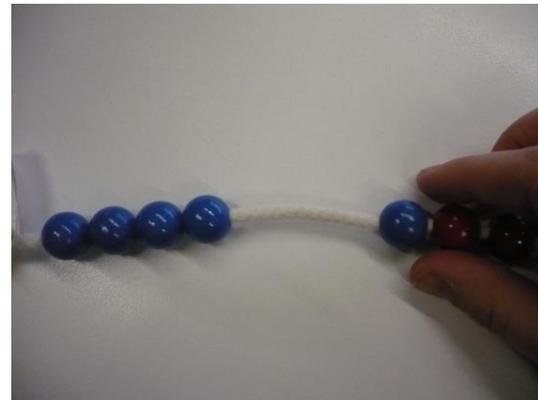
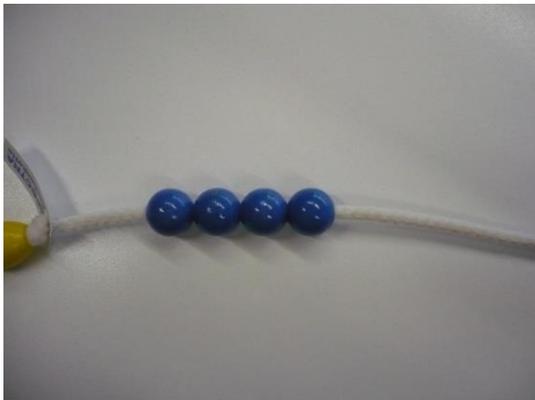


## 2. Was sind Darstellungsmittel?

### Darstellungsformen und Darstellungsmittel



Handlung „*geschickt*“ übersetzt mit Fingern und der Rechenkette





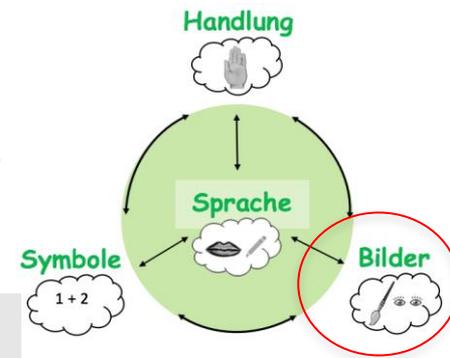
## 2. Was sind Darstellungsmittel?

### Darstellungsformen und Darstellungsmittel

#### Bilder

Was? Bilder (Zeichnungen, Skizzen, Mengenbilder etc.) malen und deuten.

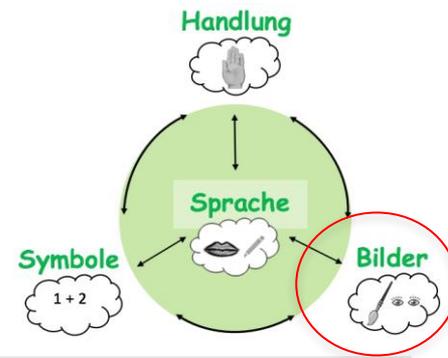
Wozu? Handlungen oder Rechengeschichten darstellen, Gleichungen/Terme oder Mengen verdeutlichen (z. B. durch Strichlisten, Punktebilder). Und aus Bildern zu lebensweltlichen Situationen oder aus didaktischem Material Terme ablesen.





# 2. Was sind Darstellungsmittel?

## Darstellungsformen und Darstellungsmittel

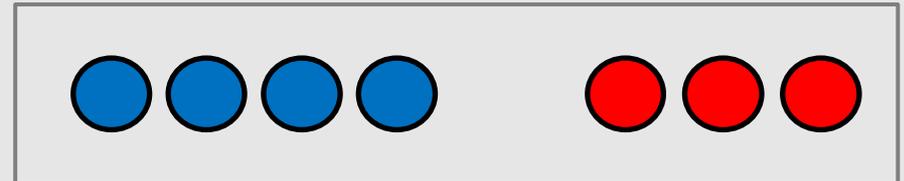
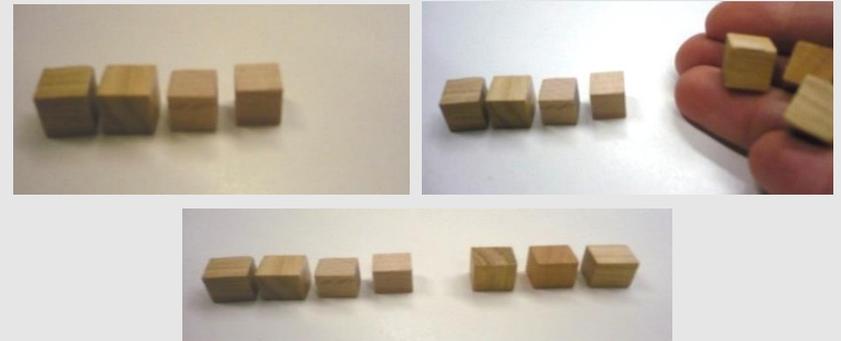
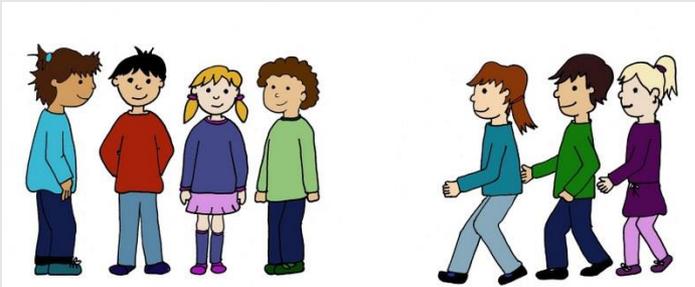


Bildliche Darstellungen bilden **Lebensweltliche Situationen**

oder

**didaktische Materialien**

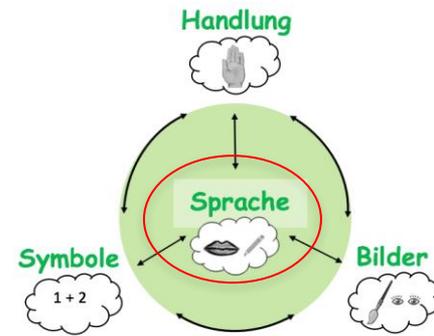
ab.





## 2. Was sind Darstellungsmittel?

### Darstellungsformen und Darstellungsmittel



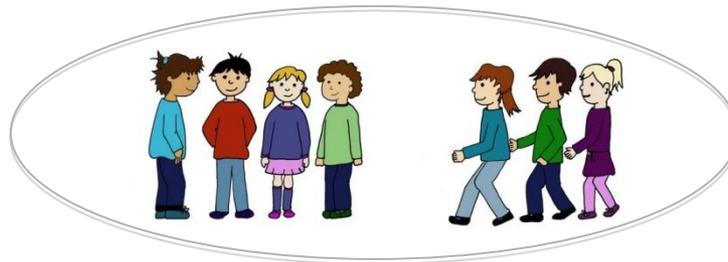
#### Sprache

Was? Über die Sache kommunizieren (mündlich und schriftlich): sprechen, aufschreiben, zuhören, nachfragen, erklären, begründen.

Wozu? Mathematische Sachverhalte ausdrücken (durch Terme/Gleichungen, Handlungen, Bilder, Rechenwege).

Wer? Kommunikation miteinander (Schüler-Schüler, Schüler-Lehrer, Schüler-Lehrer-Eltern) und Selbstreflexion innerhalb des eigenen Lernprozesses.

Wie? Im Einzel-, Partner-, Gruppengespräch, im Plenum, in der Mathekonferenz, am Sprechtag und in Selbsteinschätzungsbögen, Rechengeschichten, Beschreibungen, Erklärungen, Beweise.



**Sprache**

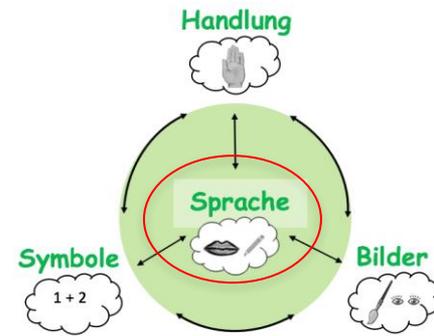




## 2. Was sind Darstellungsmittel?

### Darstellungsformen und Darstellungsmittel

Sprache drückt mathematische Sachverhalte aus  
z.B. in Form von **Rechengeschichten**



4 Kinder Schignensaleio 3 Kinder  
Wolen mit Schilen.

Familie Becker hat vier Kinder.  
Manchmal spielen alle zusammen.  
Am Wochenende kommen drei Kinder  
zu Besuch.

aber auch in Form von **Beschreibungen** und **Erklärungen**

$$546 - 198 = 348$$

$$546 - 198 =$$

$$548 - 200 = 348$$

Bietet sich für diese Zahlen ein besonderer Rechentrick an? ja  nein

Erkläre deinen Rechenweg!

Die eine Zahl ist sehr nah an dem nächsten  
Hundertert deswegen kann man sehr  
gut den veränder gleich trick machen  
nemehn





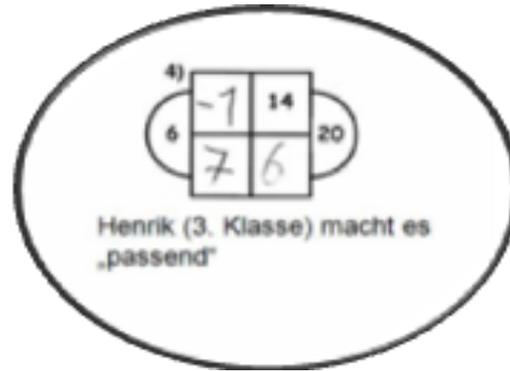
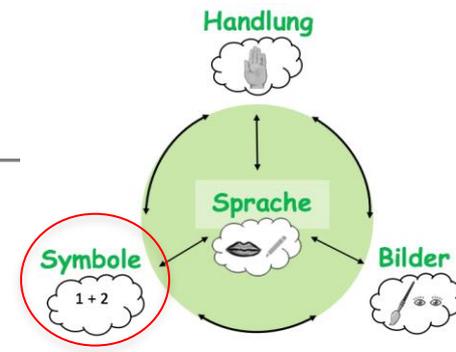
# 2. Was sind Darstellungsmittel?

## Darstellungsformen und Darstellungsmittel

### Symbole

Was? Mathematische Symbole benutzen (Zahlen, Terme, Gleichungen etc.).

Wozu? Rechengeschichten, Bilder oder Handlungen in mathematische Symbole übersetzen.



Henrik (3. Klasse) macht es „passend“



**Mathe-Sprache**

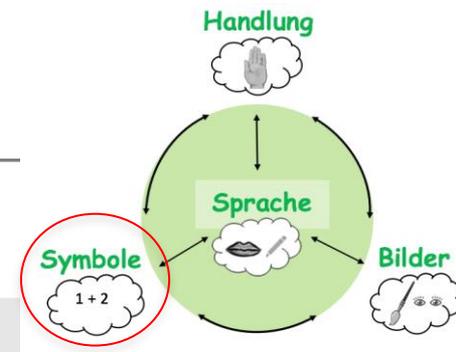




## 2. Was sind Darstellungsmittel?

### Darstellungsformen und Darstellungsmittel

Symbolische Darstellungen drücken mathematische Sachverhalte durch **formale Zahlen** aus



Familie Becker hat vier Kinder. Manchmal spielen alle zusammen. Am Wochenende kommen drei Kinder zu Besuch.



$$4 + 3$$

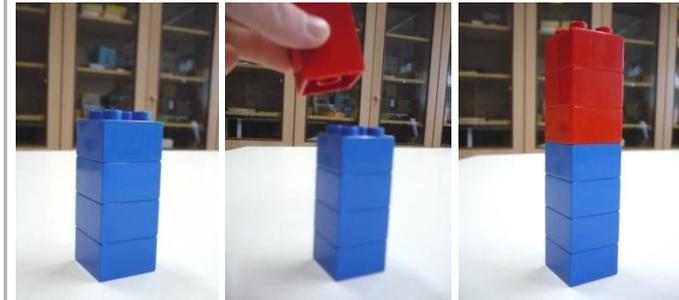
$$4 + 3$$

$$7 - 3$$

$$7 - 4$$

$$4 + \_ = 7$$

Selbst durchgeführte oder beobachtete Handlung



$$4 + 3$$

$$4 + \_ = 7$$





# Aufbau des Fortbildungsmoduls 3.5

---

1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“
2. Was sind Darstellungsmittel?
3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?
4. Welche Darstellungsmittel wähle ich aus?
5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?
6. Abschluss





### 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

## Lehrplan Mathematik NRW

### Lernen und Lehren:

„Mathematik ist ohne Darstellungen nicht **(be-)greifbar**, sodass neben dem Einsatz **verschiedener Darstellungsformen** (Handlungen mit Material, bildliche Darstellungen, Sprache und mathematische Symbole) auch deren **wechselseitige Vernetzung, nicht nur in Einführungsphasen**, unabdingbar ist.

Darstellungsmittel sind zudem eine **Kommunikations- und Argumentationshilfe** für das **Veranschaulichen von Denkwegen und das Sichtbarmachen von mathematischen Zusammenhängen und Gesetzmäßigkeiten.**“

(MSW 2021, S. 73)





### 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

---

Darstellungsmittel sind mehr als nur „HILFSMITTEL“!

Im Gegenteil, sie können verschiedene  
**Funktionen** erfüllen!





### 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

#### Funktion 1:

**Sie dienen als Lernmaterialien**  
(*nicht nur im Förderunterricht!!!*)

Zur Entwicklung einer  
**Zahl- und Operationsvorstellung**

Um mit Ihrer Hilfe **Vorgehensweisen**  
zu entwickeln  
(z.B. Rechenwege darstellen, ...)

#### Funktion 2:

**Sie dienen zur Veranschaulichung  
mathematischer Strukturen**  
(Forschermittel-Film)

als Instrument des **Erkennens**  
- „vom Beobachten zum Erkennen“  
- „vom Beschreiben zum Begründen“

als Instrument des **Kommunizierens**  
- „wo Worte fehlen“ – machen  
Gedanken, Strukturen und Muster  
sichtbar

**Übrigens: In jeder Jahrgangsstufe!**



### 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

#### Funktion 1:

**Sie dienen als Lernmaterialien**  
(*nicht nur im Förderunterricht!!!*)

Zur Entwicklung einer  
**Zahl- und Operationsvorstellung**

Um mit Ihrer Hilfe **Vorgehensweisen**  
zu entwickeln  
(z.B. Rechenwege darstellen, ...)

#### Funktion 2:

**Sie dienen zur Veranschaulichung**  
**mathematischer Strukturen**  
(Forschermittel-Film)

als Instrument des **Erkennens**

- „vom Beobachten zum Erkennen“
- „vom Beschreiben zum Begründen“

als Instrument des **Kommunizierens**

- „wo Worte fehlen“ – machen Gedanken, Strukturen und Muster sichtbar



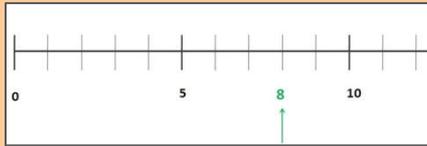


### 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

Es geht darum, die Bedeutung von Zahlen zu verstehen

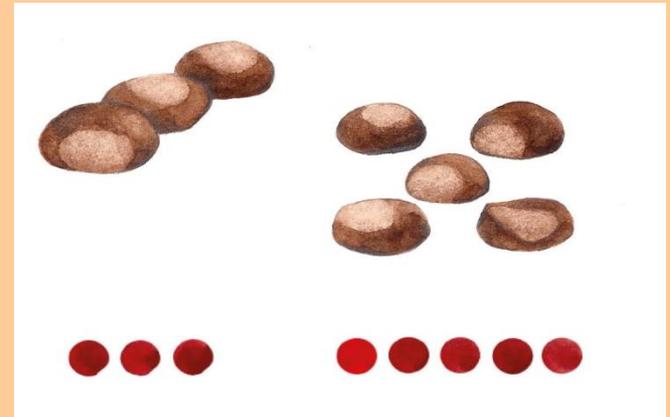
#### *Ordinal*

Die Zahl als Bezeichnung einer Ordnung in einer Menge.



#### *Kardinal*

Die Zahl als Bezeichnung für eine Menge.



Seite 8

- In der Zahlwortreihe: 1,2,3, ...8, ...  
oder: eins, zwei, ..., acht, ...
- 8 auf dem Zahlenstrahl

- 8 Kastanien, Plättchen, Stifte, ...
- 8 Plättchen auf dem 20er Feld, ...

**UND: 8 ist das Doppelte von 4, 8 hat Vorgänger und Nachfolger,**

**8 hat unterschiedliche Zerlegungen (4+4, 2+6, ...)**



# 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

---

*Ordinale Zahlaspekte*  
(Zählzahl~ 1,2,3,4,..  
Ordnungszahl~ 1. Tag im Jahr)

*Kardinale Zahlaspekte*

*Maßzahlaspekte*

*Codierungsaspekt*

*Operatoraspekt*

*Rechenzahlaspekt*





### 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

---

#### Warum ist das wichtig?

„Untersuchungen (...) haben gezeigt, dass die Entwicklung des Ordinalzahlaspekts als kindgemäße Zählzahl der Entwicklung des Kardinalaspekts vorausgeht (...).

Kinder, die Zahlen einseitig ordinal denken, haben dadurch keine Möglichkeit, neue Aufgaben von bekannten abzuleiten. Wenn sie das Ergebnis  $3+4$  zählend ermitteln, müssen sie danach das Ergebnis  $4+3$  neu „er-zählen“. Auch die Ableitung, dass  $3+5$  „eins mehr“ ergeben muss als  $3+4$ , ist mit einseitigem ordinalen Zahlverständnis nicht möglich.“

Kaufmann/ Wessolowski (2006), S. 22



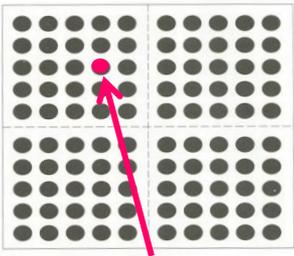


# 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

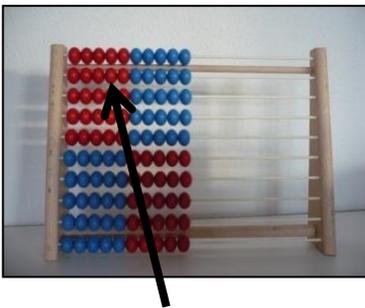
## Ordinaler Aspekt



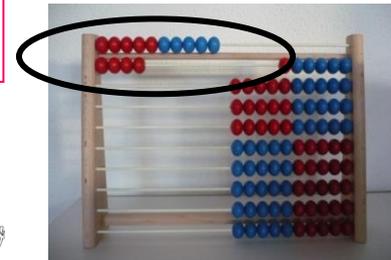
Er liest auf S. 8



Ich bin auf Platz 24 gelandet.

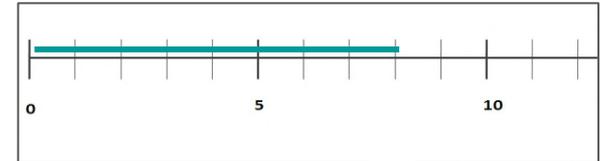
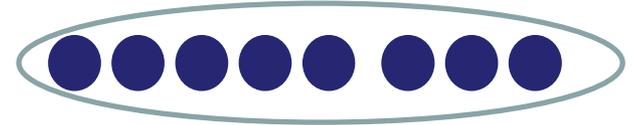


14 Kinder einladen.

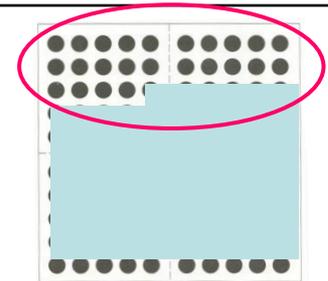


Anders „GUCKEN“

## Kardinaler Aspekt



8 Stunden noch...





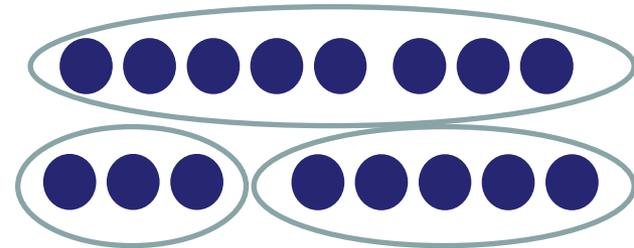
### 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

Um die Beziehung zwischen Zahlen zu verstehen, werden Mengen in Beziehung zueinander gesetzt.

*Zum Beispiel: acht*

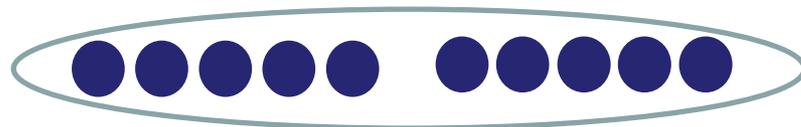


Zahlen als Teile in einem Ganzen verstehen (Zerlegung)



Anzahlen unterschiedlicher Mengen vergleichen:

weniger, mehr, gleich viele





### 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

#### Darstellungswechsel üben – **Operationsvorstellung**

#### Das 1x1 Zahlenquartett

Das Zahlenquartett besteht aus insgesamt 120 Karten – also 30 mal 4 Karten mit unterschiedlichen Darstellungen für 30 verschiedene Multiplikationsaufgaben des kleinen Einmaleins.

Die Karten sind in drei Differenzierungsstufen bezogen auf den Zahlenraum der Multiplikationsaufgabe unterteilt:

Karten mit Multiplikationsaufgaben, deren Ergebnisse  $\leq 20$  sind

Karten mit Multiplikationsaufgaben, deren Ergebnisse  $> 20$  und  $\leq 50$  sind

Karten mit Multiplikationsaufgaben, deren Ergebnisse  $> 50$  und  $\leq 100$  sind







# 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

## Darstellungswechsel üben – **Operationsvorstellung**

Einführungsphase im Kreis

The blackboard displays six cards and a ruler:

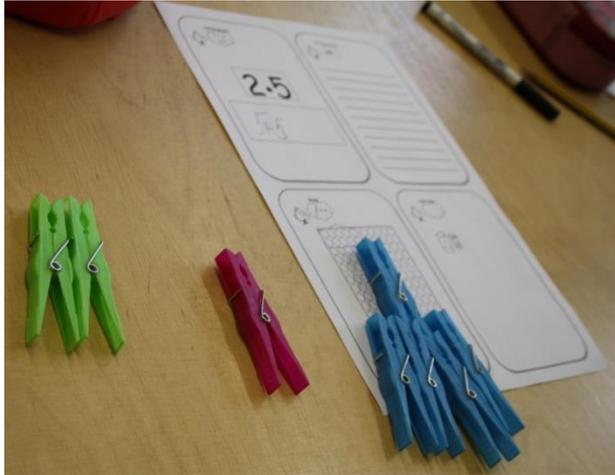
- Card 1 (top left):** A cloud shape containing the math problem  $1 + 2$  and the numbers 7, 8, 9.
- Card 2 (top middle):** A cloud shape containing a paintbrush and a pair of eyes.
- Card 3 (top right):** A cloud shape containing a pencil and a pair of lips.
- Card 4 (middle left):** A rounded rectangle titled "Rechenaufgabe" containing a small cloud with  $1 + 2$  and 7, 8, 9, and two boxes with  $3 \cdot 4$  and  $4 + 4 + 4$ .
- Card 5 (middle middle):** A rounded rectangle titled "Bilder" containing a small cloud with  $1 + 2$  and 7, 8, 9, a 4x4 grid of circles with a red box around the top-left 2x2 area, and a number line with a red arc from 0 to 4.
- Card 6 (middle right):** A rounded rectangle titled "Rechengeschichte" containing a small cloud with a pencil and lips, three ice cream cones, and the text: "Die drei Freundinnen Lena, Florina und Anna gehen Eis essen. Jeder nimmt vier Eiskugeln."

A ruler at the bottom is marked from 0 to 50. A hand is pointing at the "Rechengeschichte" card.



# 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

## Darstellungswechsel üben – Operationsvorstellung



$$2 \cdot 5$$



**Bilder zur Aufgabe finden!**

**Kann das stimmen??**



$$3 \cdot 5$$



$$6 \cdot 2$$

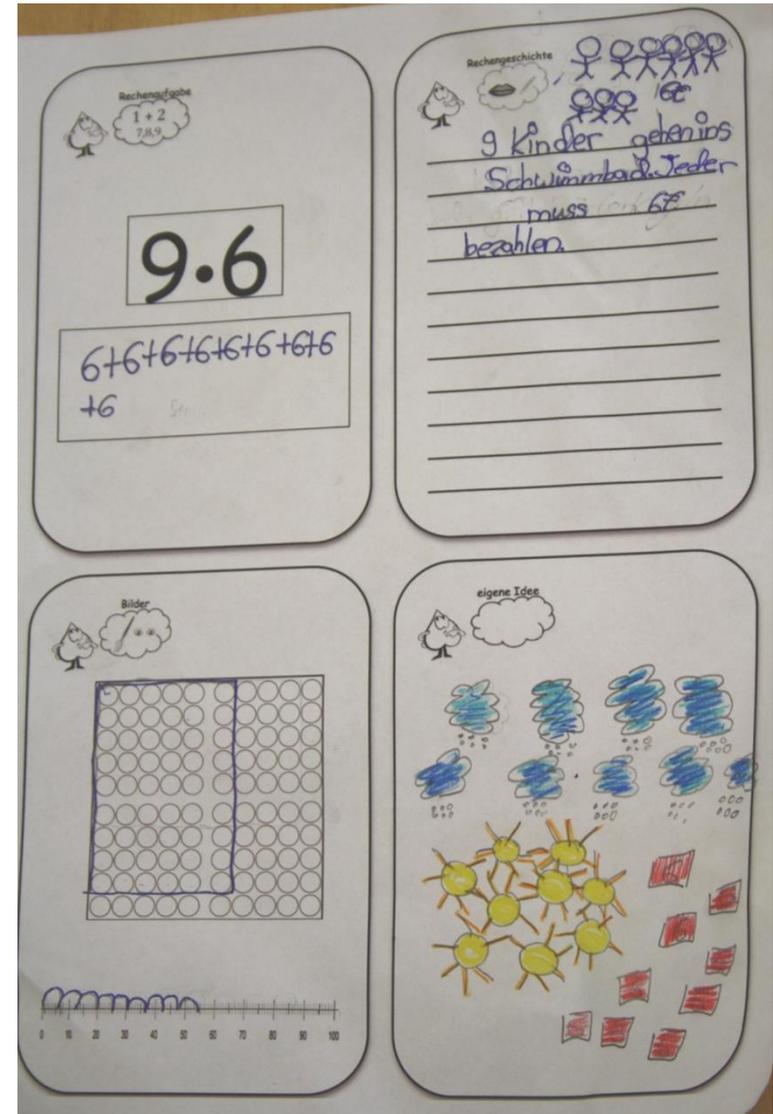




# 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

## Darstellungswechsel üben – **Operationsvorstellung**

Ein fertiges Quartett





# 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

## Darstellungswechsel üben – **Operationsvorstellung**

Der Wortspeicher



Unser Wortspeicher  
„Das Malquartett“

das Malquartett



**Malaufgabe**

$$3 \cdot 4$$



**Plusaufgabe**

$$4 + 4 + 4$$





# 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

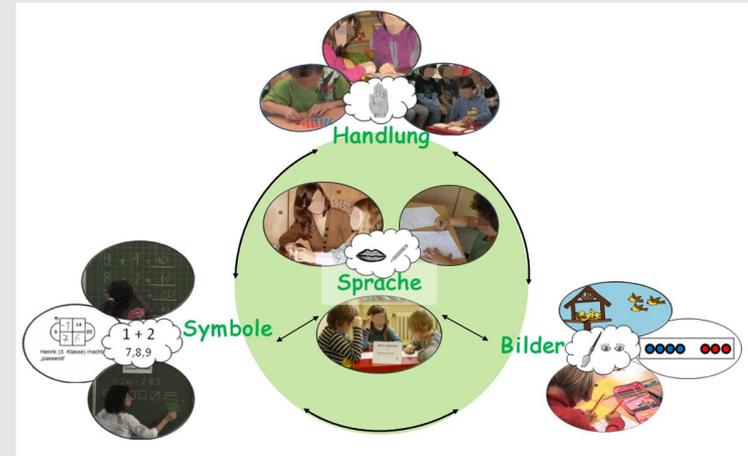
## Aktivität:



Finden Sie Möglichkeiten, wie Sie das Plakat und die Symbole noch innerhalb Ihres Unterrichts einsetzen könnten!

Überlegen Sie einige Minuten alleine. Tauschen Sie sich dann mit Ihrem Sitznachbarn aus.

Tragen Sie Ihre Ideen im Plenum vor.





# 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

## Funktion 1:

**Sie dienen als Lernmaterialien**  
*(nicht nur im Förderunterricht!!!)*

Zur Entwicklung einer  
**Zahl- und Operationsvorstellung**

Um mit Ihrer Hilfe **Vorgehensweisen**  
zu entwickeln  
(z.B. Rechenwege darstellen, ...)

## Funktion 2:

**Sie dienen zur Veranschaulichung**  
**mathematischer Strukturen**  
(Forschermittel-Film)

als Instrument des **Erkennens**

- „vom Beobachten zum Erkennen“
- „vom Beschreiben zum Begründen“

als Instrument des **Kommunizierens**

- „wo Worte fehlen“ – machen Gedanken, Strukturen und Muster sichtbar

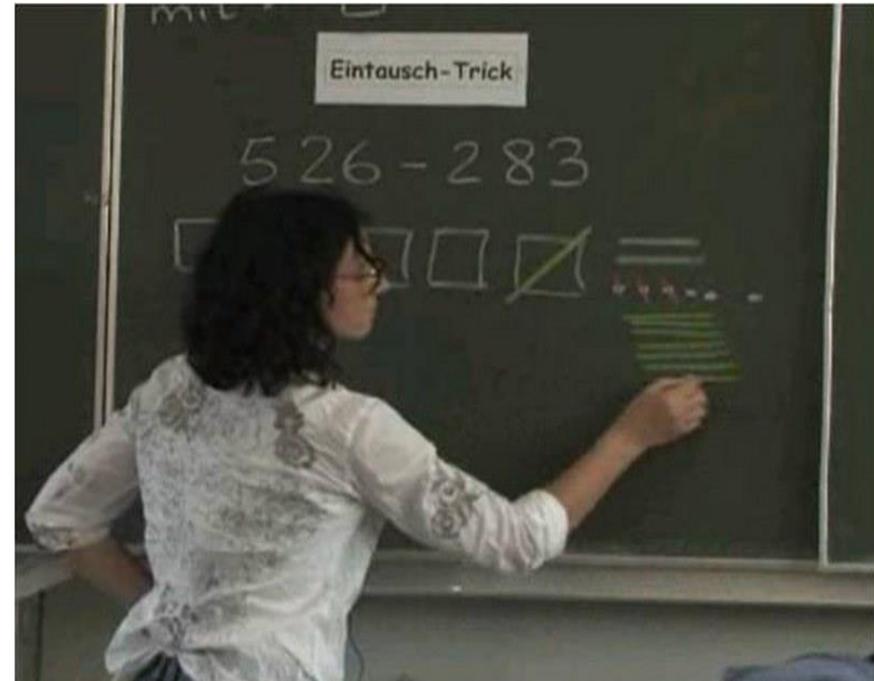




### 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

#### **Funktion 1:**

Sie dienen als Lernmaterialien: Sie unterstützen bei der Entwicklung von Vorgehensweisen (z.B. Rechenwege darstellen)

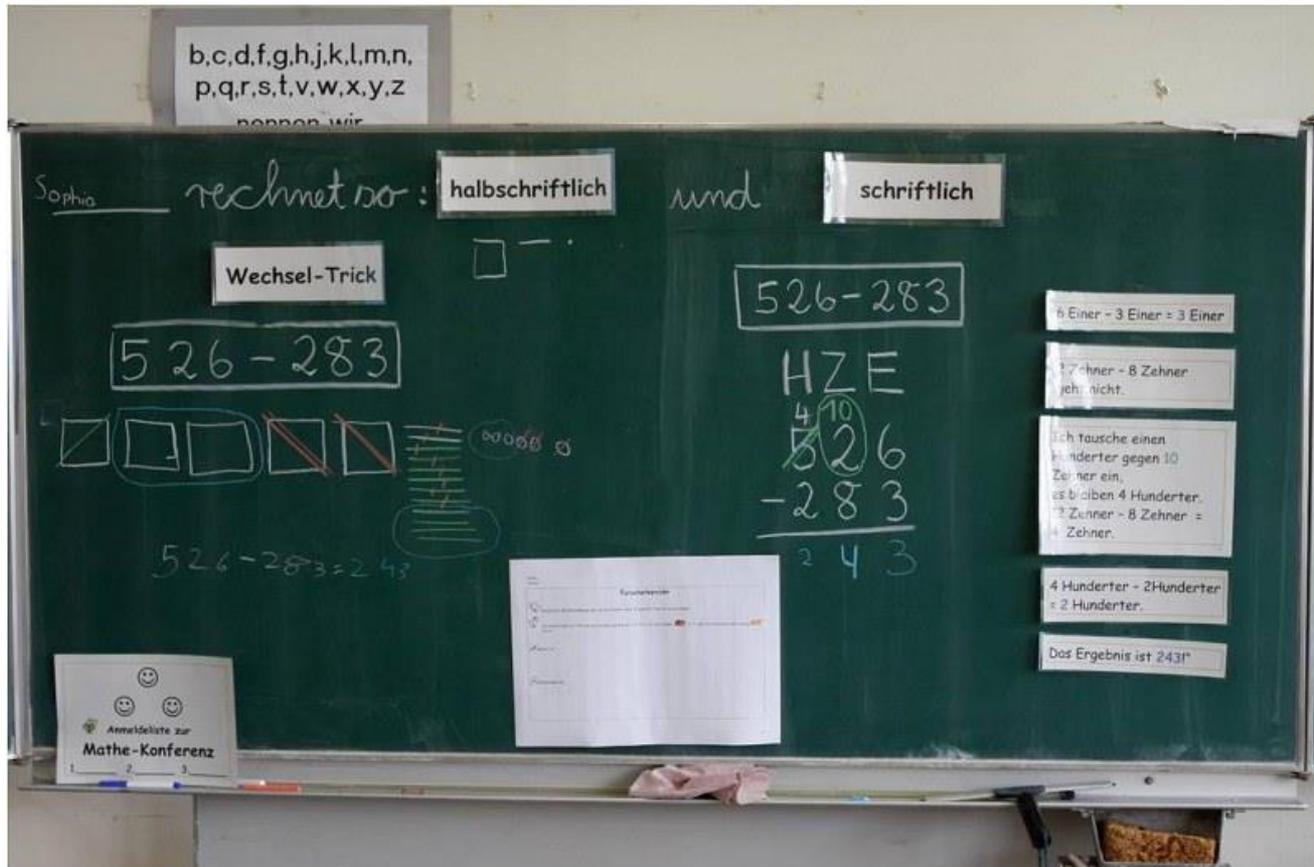




# 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

## Funktion 1:

Sie dienen als Lernmaterialien: Sie unterstützen bei der Entwicklung von Vorgehensweisen (z.B. Rechenwege darstellen)

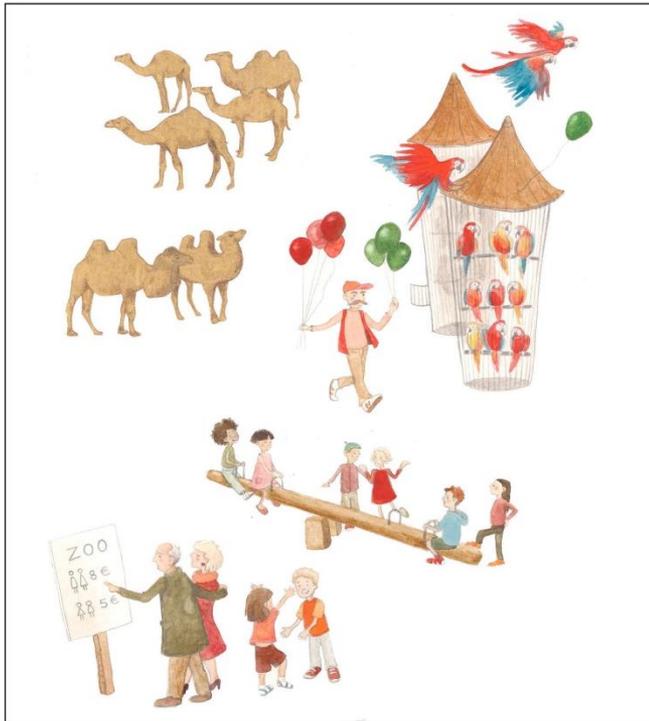




# 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

## Funktion 1:

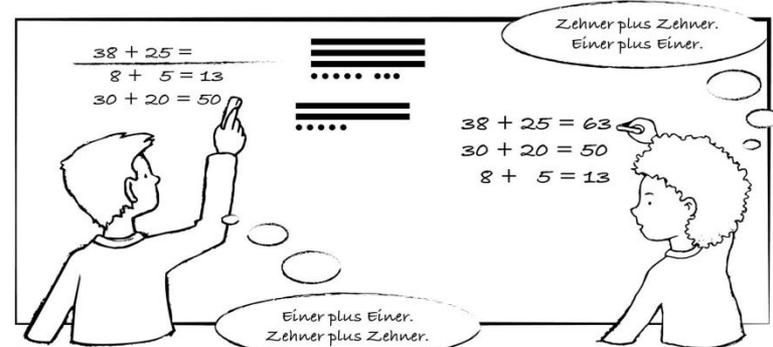
Zur Entwicklung einer Zahl- und Operationsvorstellung



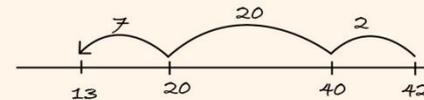
1. Finde zu jeder Aufgabe ein passendes Bild, lege mit Plättchen nach und rechne aus.

- |                                 |   |                                     |
|---------------------------------|---|-------------------------------------|
| $2 + 2 = 4$                     |  | $4 + 3 + 1 = \underline{\quad}$     |
| $3 + 2 = \underline{\quad}$     |  | $4 + 4 - 1 = \underline{\quad}$     |
| $4 + 2 = \underline{\quad}$     |   | $8 + 8 + 5 + 5 = \underline{\quad}$ |
| $3 + 3 + 3 = \underline{\quad}$ |   | $2 \cdot 2 = \underline{\quad}$     |

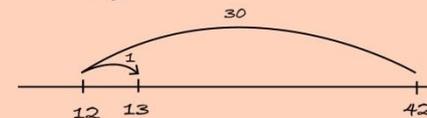
Um Vorgehensweisen zu entwickeln



Sina  
 $42 - 29 =$



Kemal  
 $42 - 29 =$





# 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

## Funktion 1:

Sie dienen als Lernmaterialien  
(nicht nur im Förderunterricht!!!)

Zur Entwicklung einer  
**Zahl- und Operationsvorstellung**

Um mit Ihrer Hilfe **Vorgehensweisen**  
zu entwickeln  
(z.B. Rechenwege darstellen, ...)

## Funktion 2:

Sie dienen zur Veranschaulichung  
**mathematischer Strukturen**  
(Forschermittel-Film)

als Instrument des **Erkennens**

- „vom Beobachten zum Erkennen“
- „vom Beschreiben zum Begründen“

als Instrument des **Kommunizierens**

- „wo Worte fehlen“ – machen Gedanken, Strukturen und Muster sichtbar

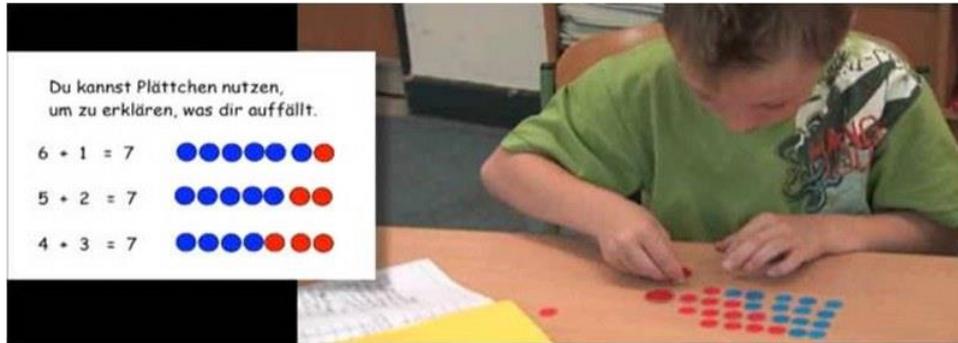




# 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

## Funktion 2:

Zur Veranschaulichung mathematischer Strukturen



Plättchen als Instrument des Erkennens:  
Mit Plättchen Muster sichtbar machen und beschreiben  
→ Gesetzmäßigkeit begründen

Plättchen als Instrument des Kommunizierens:

„Wo Worte und Fachausdrücke fehlen“ können Plättchen die Entdeckungen der Kinder sichtbar machen.





### 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

**Aktivität:**



**Der „Forschermittelfilm“**

IM Haus 1





### 3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?

#### Aktivität:



#### Beobachtungsauftrag:

- Was erfahren Sie hier über den Einsatz von Darstellungsmitteln im Mathematikunterricht, das Ihnen neu ist?
- Was können Sie für Ihren Unterricht mitnehmen und konkret umsetzen?





# Aufbau des Fortbildungsmoduls 3.5

---

1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“
2. Was sind Darstellungsmittel?
3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?
4. Welche Darstellungsmittel wähle ich aus?
5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?
6. Abschluss





## 4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?

---

### Mögliche Kriterien:

- „Weniger ist mehr!“ (Wittmann 1993)
- Darstellungsmittel, deren Vor- und Nachteile bekannt sind und die zum jeweiligen Lerninhalt passen.  
(Vgl. Stiftung Warentest)
- Darstellungsmittel, die *fortsetzbar* für alle Schuljahre sind.
- Darstellungsmittel, die dem *Lehrwerk* entsprechen.





## 4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?

---

### Mögliche Kriterien:

- „Weniger ist mehr!“ (Wittmann 1993)
- Darstellungsmittel, deren Vor- und Nachteile bekannt sind und die zum jeweiligen Lerninhalt passen.  
(Vgl. Stiftung Warentest)
- Darstellungsmittel, die *fortsetzbar* für alle Schuljahre sind.
- Darstellungsmittel, die dem *Lehrwerk* entsprechen.





## 4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?

---

„Mathematisch gesehen bedeutet der Sprung auf der Hundertertafel um ein Kästchen nach unten dasselbe wie das Dazuschieben von zehn Perlen am Rechenrahmen – für Kinder ist dies nicht unbedingt erkennbar. (...) Deshalb ist die Frage nach einem geeigneten Arbeitsmittel insbesondere aus Sicht der Kinder mit Rechenstörungen berechtigt.“

Kaufmann/ Wessolowski (2006), S. 39





## 4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?

### Aktivität:



Berechnen Sie folgende Aufgaben!

a)  $15 - 8 = \underline{\quad}$

c)  $83 - 29 = \underline{\quad}$

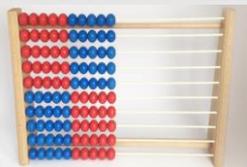
e)  $465 - 227 = \underline{\quad}$

b)  $39 + 50 = \underline{\quad}$

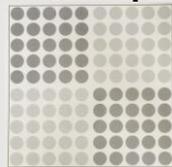
d)  $47 + \underline{\quad} = 63$

Nutzen Sie dabei verschiedene mathematische Materialien, um Ihren Rechenweg darzustellen.

Bei welcher Aufgabe eignet sich welches Darstellungsmittel am besten? Erörtern Sie pro und contra mit Ihrem Nachbarn.



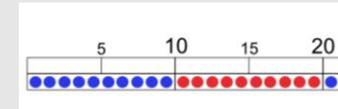
Rechenrahmen



100er Tafel



10erSystem  
Material (Dienes)



Zahlenstrahl





## 4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?

---

### Mögliche Kriterien:

- „Weniger ist mehr!“ (Wittmann 1993)
- Darstellungsmittel, deren Vor- und Nachteile bekannt sind und die zum jeweiligen Lerninhalt passen.  
(Vgl. Stiftung Warentest)
- **Darstellungsmittel, die *fortsetzbar* für alle Schuljahre sind.**
- Darstellungsmittel, die dem *Lehrwerk* entsprechen.



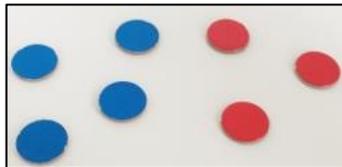


## 4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?

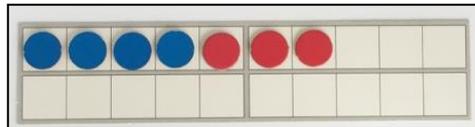
**Darstellungsmittel, die fortsetzbar für alle Schuljahre sind**

Zum Beispiel das Material „mathe 2000“:

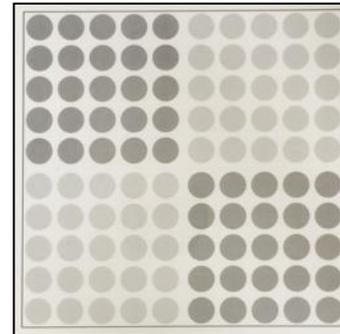
*Plättchen*



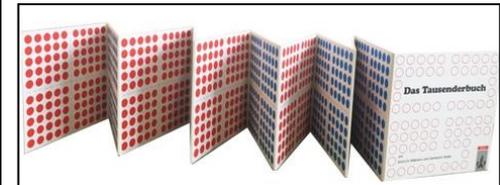
*Zwanzigerfeld*



*Hunderterfeld*



*Tausenderbuch*





## 4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?

**Darstellungsmittel, die fortsetzbar für alle Schuljahre sind**

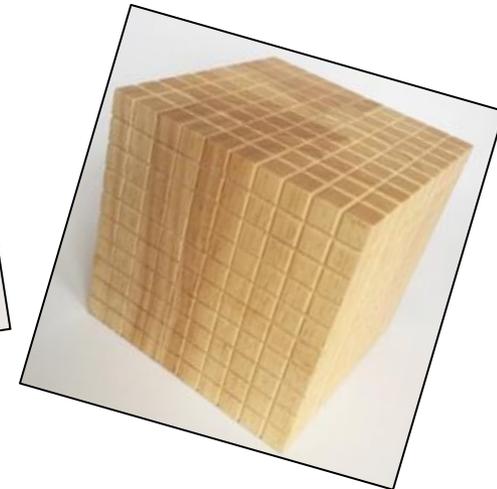
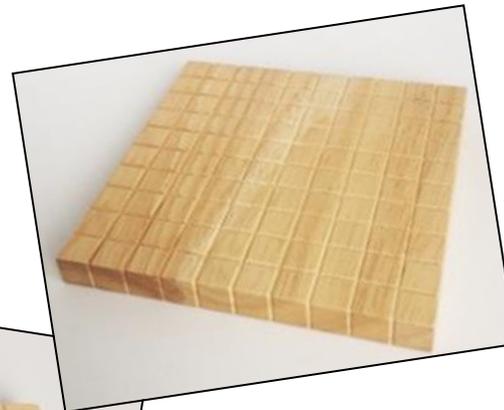
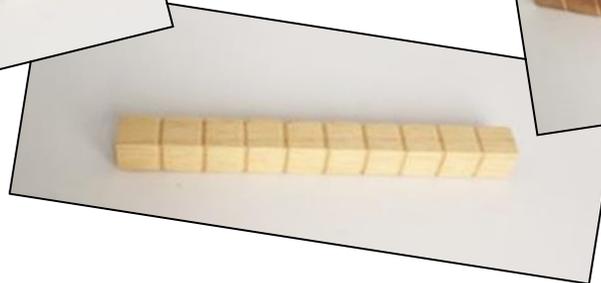
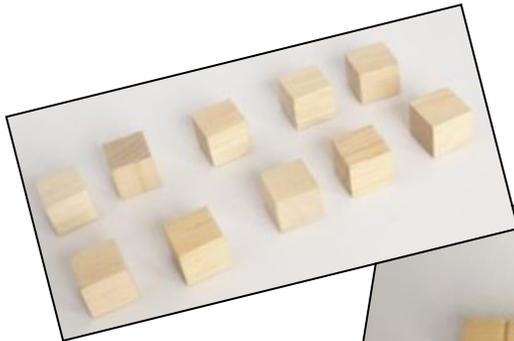
Zum Beispiel das „10er-System-Material“ (Dienes)

*Einer-Würfel*

*Zehner-Stange*

*Hunderter-Platte*

*Tausender-Würfel*

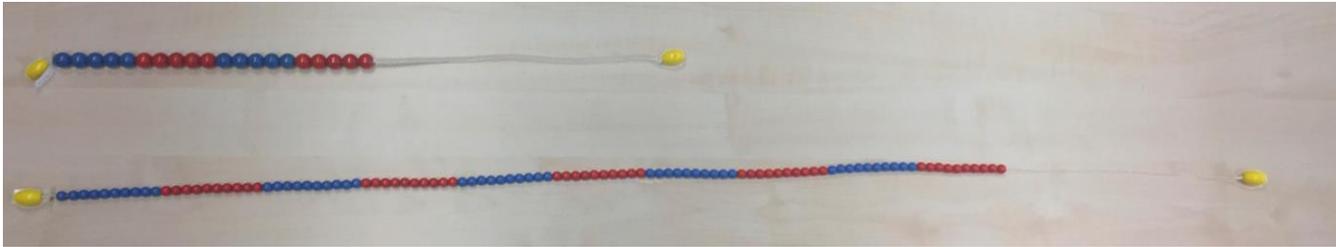




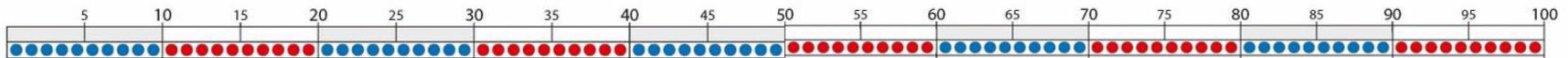
## 4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?

**Darstellungsmittel, die fortsetzbar für alle Schuljahre sind**

*Zwanzigerkette und Hunderterkette*



*Rechenstrich*





## 4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?

---

### Mögliche Kriterien:

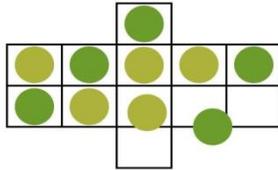
- „Weniger ist mehr!“ (Wittmann 1993)
- Darstellungsmittel, deren Vor- und Nachteile bekannt sind und die zum jeweiligen Lerninhalt passen.  
(Vgl. Stiftung Warentest)
- Darstellungsmittel, die *fortsetzbar* für alle Schuljahre sind.
- **Darstellungsmittel, die dem *Lehrwerk* entsprechen.**





# 4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?

Plättchen



Einerplättchen



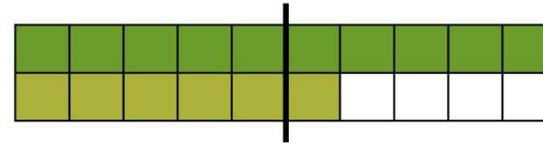
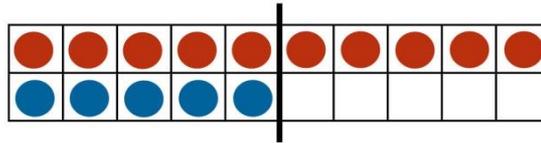
Würfel



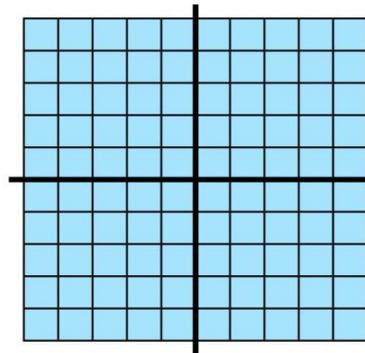
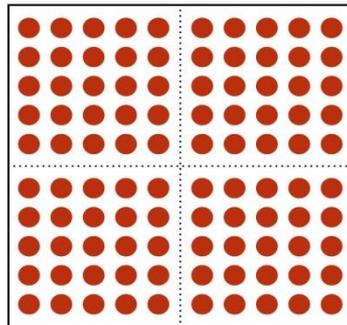
Ich sehe  $4+5$ .

Ich sehe  $5+4$ .

Zwanzigerfeld



Hunderterfeld und -tafel



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100





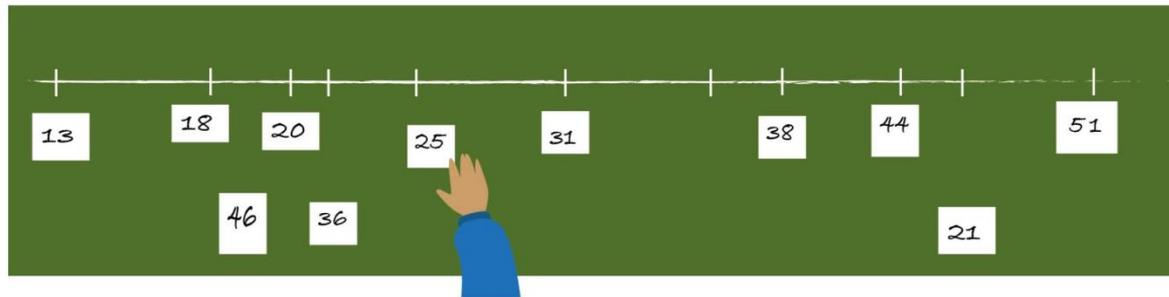
# 4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?

## Darstellungsmittel, die dem Lehrwerk entsprechen

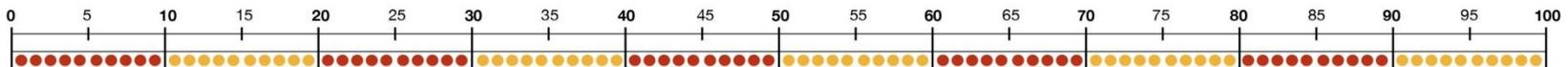
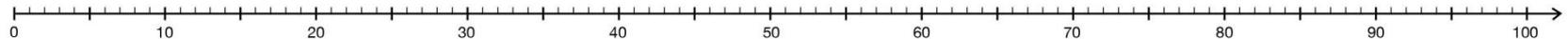
Zwanzigerreihe / Zwanzigerstreifen



Rechenstrich



Zahlenstrahl

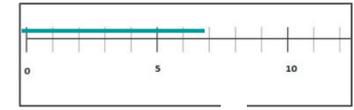
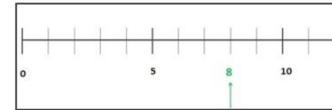




# 4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?

## Merkblatt:

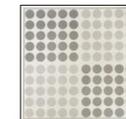
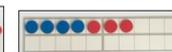
- „Weniger ist mehr!“ (Wittmann 1993)
- Darstellungsmittel, deren Vor- und Nachteile bekannt sind und die zum jeweiligen Lerninhalt passen.  
(Vgl. Stiftung Warentest)
- Darstellungsmittel, die *fortsetzbar* für alle Schuljahre sind.
- Darstellungsmittel, die dem *Lehrwerk* entsprechen.



Zehnerübergang im Sinne des schrittweisen Rechnens ( $ZE \pm E$ ; bis zum vollen Zehner) lässt sich gut handelnd darstellen (besonders für Kinder mit Lernschwierigkeiten hilfreich).



Addition und Subtraktion voller Zehner ( $ZE \pm Z$ ) ist dagegen hieran nicht gut darstellbar.





## 4. Welche Darstellungsmittel soll ich für meine Klasse auswählen?

### **Aktivität:**



Entwickeln Sie anhand der Kriterien Ideen, wie die Auswahl und Bereitstellung von mathematischen Materialien an Ihrer Schule optimiert werden könnte.

Denken Sie außerdem über organisatorische Aufgaben nach, die damit verbunden sind!

Notieren Sie gemeinsam mit Ihren Stufenmitgliedern eine „to do liste“.

**Zeit: 20 Minuten**





# Aufbau des Fortbildungsmoduls 3.5

---

1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“
2. Was sind Darstellungsmittel?
3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?
4. Welche Darstellungsmittel wähle ich aus?
5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?
6. Abschluss





## 5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?



### Aktivität

1. Material sichten! („*ICH-DU-WIR*“)  
 Gehen Sie „gedanklich“ durch Ihren Klassenraum und schreiben Sie auf, welche didaktischen Materialien dort für die Kinder bereit stehen.  
Notieren Sie auch die ungefähre Stückzahl.  
Überlegen Sie auch, welche Materialien tatsächlich im „täglichen Einsatz“ sind.
2. Stellen Sie sich anschließend gegenseitig Ihre Notizen vor.  
 Halten Sie die Ergebnisse schriftlich fest!





## 5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?

„Darstellungsmittel sind **nicht selbsterklärend**:  
Sie müssen speziell für den Mathematikunterricht gelernt werden!“

Höhtker/Selter (1995)

### Und Sie werfen häufig Fragen auf:

- Welche Kinder sollen Darstellungsmittel nutzen? Alle?
- In welcher Reihenfolge führe ich Darstellungsmittel ein?
- Mische ich dabei flächige und lineare Darstellungsmittel?
- Gibt es Materialien, die ich auf jeden Fall nicht verwenden sollte?
- Mein Lieblingsmaterial ist ..., die Kollegen meiner Jahrgangsstufe wollen aber andere Materialien verwenden. Wie soll ich damit umgehen?
- ...



Sie haben vielleicht noch ganz andere Fragen? Tauschen Sie sich darüber aus!





## 5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?

---

### **Gedanken vorab:**

***Einerseits*** sollen mithilfe von **Darstellungsmitteln** mathematische Strukturen aufgebaut werden.

(Vgl. H3, Modul 3.5: Sachinfo „Mathe in den Kopf“)

***Andererseits*** sollen **Veranschaulichungen** helfen, mathematische Sachverhalte zu vereinfachen.

Doch gut gemeinte Vereinfachungen können vollkommen anders verstanden werden...



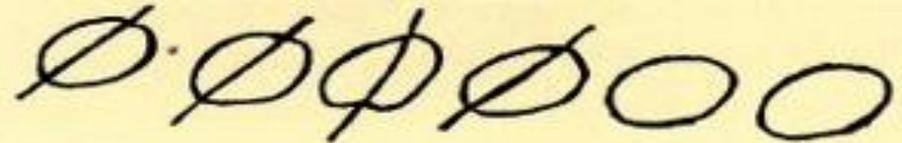


## 5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?

### Ein Beispiel zum Nachdenken:

„Das Kullersystem habe ich überhaupt nicht verstanden. Frau B. hat gesagt: Schnucki frißt den Kuchen auf. Sie hat sechs Kullern an die Tafel gemalt und vier durchgestrichen und dann eingekringelt. ... Ich habe das Durchstreichen nicht verstanden. Mit Zahlen wäre es wohl leichter gewesen als mit Kullern ... Ich weiß nur, dass ich zuerst mit Zahlen gehandelt habe. Und dann kam plötzlich das Kullersystem. Und das war der Zusammenbruch. Ich versuchte, es zu verstehen. Aber ich weiß heute davon nichts mehr – wirklich nichts mehr. Sie hatte die Kullern halbiert. Ich versuchte, es besser zu verstehen. Ich suchte nach dem Kern. Sie hat gleich halbiert, und dann hat sie das Lernen für sich einkassiert. ...“ – „Ich verstehe nicht, was meinst du? Was meinst du mit halbiert?“ –

„Ja, zum Beispiel bei den Wenigeraufgaben. Zum Beispiel bei der Aufgabe Schnucki frißt den Kuchen auf.“ – „Ich verstehe nicht, was du meinst. Was meinst du mit halbiert.“ – „Ja, sie hat halbiert, aber die redet vom Durchstreichen. Sie hat die Kullern halbiert. Das ist doch alles Heuchelei. Wenn man einen Apfel halbiert, dann hat man doch zwei Hälften.“ – „Ich verstehe dich nicht. Kannst du es aufmalen, was sie an die Tafel gezeichnet hat?“ – „Ja, das kann ich.“ Er malte.



Als ich mir die Zeichnung anschaute, sah ich, dass Ralf recht hatte.

Aus: Spiegel/ Selter 2003, S. 93





## 5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?

---

### **Das zeigt uns erneut:**

„Für die Schule gilt demnach, dass Schwierigkeiten nicht unbedingt Schwierigkeiten mit der Mathematik sein müssen, sondern Schwierigkeiten mit dem Mathematikunterricht sein können.“

(Ebd., S. 93)

**Wie sehen konkrete Schritte zur Einführung von Darstellungsmitteln (did. Material) aus, um ein bestimmtes Lernziel zu erreichen?**





## 5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?

**Darstellungsmittel verwendet man im Unterricht schwerpunktmäßig, um in folgenden Bereichen mathematische Strukturen „sichtbar“ zu machen:**

1. Darstellungsmittel, zum Aufbau von **Zahlvorstellungen** (Modul 3.1)!
2. Darstellungsmittel, zum Aufbau von **Operationsvorstellungen** (Modul 3.2)!
3. Darstellungsmittel, um **Rechenwege** darzustellen (Modul 3.5)!

Dabei eignen sich nicht immer dieselben Materialien! Benutzt man zum Aufbau von Zahlvorstellung z.B. den Rechenrahmen, so muss man doch feststellen, dass er sich beim Aufbau von Operationsvorstellung oder zum Darstellen von Rechenwegen nicht immer gut eignet.

**Im Folgenden werden daher Schritt für Schritt Überlegungen zum sinnvollen Einsatz unterschiedlicher Darstellungsmittel am Beispiel „**Rechenwege darstellen**“ angestellt.**





# Gedanken zur gleichzeitigen Verwendung von Material bei der Darstellung von Rechenwegen

Bei der Frage, welche Materialien sich eignen, um Rechenwege darzustellen, bedarf es einer gut durchdachten Auswahl dieser. Wählen Kinder Materialien zur Darstellung von Rechenwegen selbstständig aus, sollte die Lehrerin dies gut im Blick haben und möglicherweise auch Gegenvorschläge bei der Auswahl machen.

**„ Zum einen stellt die eigenständige Auswahl eines Veranschaulichungsmittels eine kognitive Überforderung dar (...). Erst wenn das Kind viele Materialien in ihrer Handhabung kennen würde, wäre eine Entscheidung für oder gegen eines möglich. In Unkenntnis über Vor- und Nachteile bleibt ihm lediglich die Sympathie für Farbe und Form als Entscheidungsinstanz.“**

(Lorenz 2003, S. 35)





# Gedanken zur Auswahl von Material bei der Darstellung von Rechenwegen

Noch einmal gilt es darüber nachzudenken, dass Kinder bei der Auswahl unterschiedlicher Materialien zur Darstellung ihrer Rechenwege sehr gut beraten werden müssen. Nicht jedes Material kann alle Rechenwege gleich gut darstellen! Hier sollte zunächst der Lehrer selbst durch Ausprobieren einen Überblick erhalten (Hilfe: H3, Modul 3.2: Stiftung Warentest zur Auswahl von mathematischen Materialien). Anschließend sollten Schüler dazu angeregt werden, selbst solche Erfahrungen am Material zu machen.

**„Zum anderen ist aber die gleichzeitige Verwendung mehrerer Materialien insbesondere bei leistungsschwächeren Schülern problematisch. Die Handlungen, die für eine Rechenoperation an einem Veranschaulichungsmittel durchgeführt werden, fallen bei dem nächsten anders aus. Man vergleiche die Handlung  $28 + 30$  am Rechenrahmen, am Zahlenstrahl, an der Hundertertafel und an den Mehr-System-Blöcken. Die Handlungen sind nicht übertragbar, sie sind grundverschieden.“**

(Lorenz 2003, S. 35f)





## 5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?

### Aktivität



Material überprüfen und darüber diskutieren:

Im Folgenden werden nun einige didaktische Materialien zum Darstellen von Rechenwegen vorgestellt und schlagwortartig einige PRO und CONTRA Aspekte aufgezeigt.



**Überlegen Sie für sich und dann gemeinsam:**



**Können Sie die Argumente nachvollziehen?**

**Welche Materialien setzen Sie zum Aufbau von Zahlvorstellung ein. Und warum?**

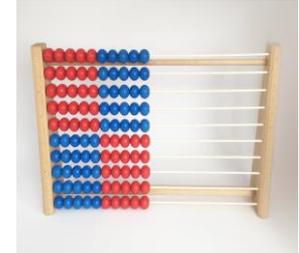
**Worauf würden Sie in Zukunft besonders achten?**





# Achtung!! Materialeinsatz beim Rechnen

## Rechenrahmen



Zehnerübergang im Sinne des schrittweisen Rechnens ( $ZE \pm E$ ; bis zum vollen Zehner) lässt sich gut handelnd darstellen

Besonders hilfreich für Kinder mit Lernschwierigkeiten



Addition und Subtraktion voller Zehner ( $ZE \pm Z$ ) ist dagegen nicht gut darstellbar





# Achtung!! Materialeinsatz beim Rechnen

## 100er Tafel

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



Zahlbeziehungen werden deutlich

Addition und Subtraktion voller Zehner ( $ZE \pm Z$ ) gut darstellbar (Schritte nach unten/oben)



Vorstellung des Hunderterraums muss entwickelt sein, bevor sie eingesetzt wird!

Beziehung zwischen den Zahlen oft schwierig zu verstehen

Bsp.: 11 weiter entfernt von 10 als 20.  
Vgl. Lorenz (2003), 32

Eignet sie sich *weniger* zum Rechnen, da sie auch zum zählenden Rechnen verleitet





# Achtung!! Materialeinsatz beim Rechnen

## 10er System Material (Dienes)

😊 Material eignet sich gut zum Rechnen

😞 **Aber: Einheiten müssen klar sein!**

7 + 5: 1 Zehnerstange und 2 Einer-Würfel

→ Kann bei Kindern mit Rechenschwierigkeiten dazu führen, dass sie das Ergebnis 3 deuten

Bündelung und Entbündelung muss ausreichend eingeübt werden, um auch hier keine „Materialfehler“ aufkommen zu lassen (vgl. Lorenz 2003, S. 29)

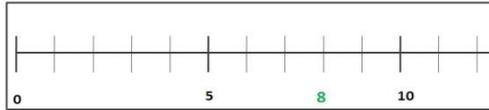
486 + 274 kann zu dem Ergebnis 61312 führen, da Kinder 6 H, 13 Z, 12 E vor sich liegen sehen





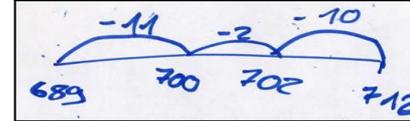
# Achtung!! Materialeinsatz beim Rechnen

## Zahlenstrahl



- 😊 Grundidee der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen ist hieran gut vermittelbar
- ☹️ Legt zählendes Rechnen nah und ist daher nicht für jedes Kind geeignet, um an ihm erste Rechenstrategien zu entwickeln

## Rechenstrich



- 😊 Bietet Kontext für Gespräche über verschiedene Rechenwege  
Umkehroperationen und Rechenstrategien lassen sich veranschaulichen
- ☹️ Ermöglicht keine Entwicklung von Rechenstrategien, sondern setzt das Vorhandensein einer mental zur Verfügung stehenden Rechenstrategie voraus





## 5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?

### Aktivität

Nutzen Sie unseren **Stiftung Warentest – TEIL 2**, um selbst PRO und CONTRA Erfahrungen mit unterschiedlichen Materialien zu dokumentieren.



**Arbeiten Sie zunächst allein (ICH)**

**Tauschen Sie Ihre Erkenntnisse mit den anderen aus (DU)**

**Entscheiden Sie am Ende gemeinsam, wann welches Material  
in Ihrem Unterricht eingesetzt werden soll (WIR)**



Halten Sie alles schriftlich fest.





# Aktivität



## „Stiftung Warentest“ zur Beurteilung von didaktischen Materialien für den Einsatz im Mathematikunterricht

Im vorliegenden „Warentest“ sollen didaktische Materialien daraufhin überprüft werden, ob sie sich

- a) zur **Zahldarstellung**, aber auch
- b) zur **Darstellung von Operationen** eignen!

**Denn: Nicht jedes Material kann alles!**

Für den Unterricht bedeutet das am Ende, Materialien auszuwählen und einzuführen, die für alle Schuljahre und Zahlräume zielführend eingesetzt werden können.

### Aufgabe:

- Nehmen Sie die didaktischen Materialien zur Hand, die Sie im Unterricht einsetzen möchten.
- Füllen Sie für jedes einzelne Material beide Teile des „Stiftung Warentest“ aus.

★ Diskutieren Sie anschließend mit einem Kollegen oder dem ganzen Stufenteam Ihre Ergebnisse. Finden Sie gemeinsam eine Entscheidung für Material, das den „Warentest“ gut bestanden hat, das aber auch zu ihrem Buch und ihrem Unterricht passt.

★ Überlegen Sie, ob nicht auch ihre Schüler den „Warentest“ zur Darstellung von Operationen (Teil 2) im Unterricht durchführen können, um selbst über die Vor- und Nachteile ins Gespräch zu kommen.

### Literatur

Radatz/ Schipper: Handbuch für den Mathematikunterricht 1. Schuljahr. Hannover 1996.

### Didaktische Kriterien Teil 2

	Können mithilfe des Materials folgende Aufgaben dargestellt werden?	voll zutreffend	weitgehend	teilweise	nicht zutreffend	Notizen
1	$15 - 8 =$					
2	$39 + 50 =$					
3	$83 - 29 =$					
4	$47 + \underline{\quad} = 63$					
5	$465 - 227 =$					

### Gesamturteil

(Zählen Sie in jedem Teil des Stiftung Warentest aus, welche Einschätzung am häufigsten vorkommt. Notieren sie diese hier. Dabei können Sie nicht Zutreffendes streichen.):

1. Das didaktische Material erfüllt die **praktischen Kriterien** voll / weitestgehend / teilweise / nicht.
2. Das didaktische Material erfüllt die **didaktischen Kriterien in Teil 1** voll / weitestgehend / teilweise / nicht.
3. Das didaktische Material erfüllt die **didaktischen Kriterien in Teil 2** voll / weitestgehend / teilweise / nicht.

### Begründung/ Bemerkung:



## 5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?

---

**Es folgen Beispiele  
zum Aufbau „mentaler Vorstellungen“  
im Unterricht!**





# „Rechenaufgaben“ in den Kopf?!

Von der Handlung  
zur mentalen Vorstellung („Mathe im Kopf“)



„Konkrete Phase“

„Auf dem Weg in den  
Kopf“

„Im Kopf (richtig) **rechnen**“

**Was** genau im Kopf eines Kindes passiert,  
können wir nur erahnen.

**Im Austausch mit ihm**, kann es uns  
Einblicke in seinen „Kopf“ gewähren.





# „Rechenaufgaben“ in den Kopf?!

## Von der Handlung zur mentalen Vorstellung („Mathe im Kopf“)

„Konkrete Phase“

Mit Material handeln  
und Handlungen  
beobachten  
(von sich selbst und  
anderen).

„Auf dem Weg in den  
Kopf“

**Rechenwege** im Kopf  
vorstellen und  
beschreiben.

„Im Kopf (richtig) **rechnen**“

Mit dem „Bild im Kopf“  
(mentale Vorstellung) ohne  
**Material rechnen.**

Modell in Anlehnung an Wartha IN Schipper/ Wartha/ Schroeders 2011, S.113f.



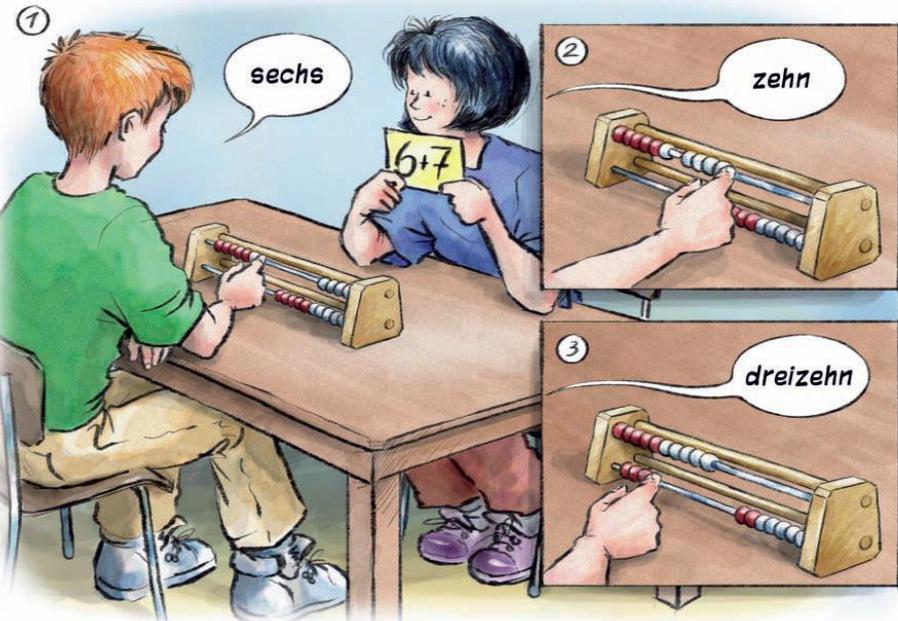


# „Rechenaufgaben“ in den Kopf?!

## „Mentales Handeln“ anregen

Mit Material handeln und Handlung beobachten/ beschreiben

Rechenweg im Kopf vorstellen und beschreiben



vv. Schipper, Forderkartei: [www.uni-bielefeld.de/idm/serv/rechenstoer.htm](http://www.uni-bielefeld.de/idm/serv/rechenstoer.htm)





# „Rechenaufgaben“ in den Kopf?!

## „Mentales Handeln“ anregen

Mit **Material handeln** und Handlung beobachten/ beschreiben

Rechenweg im **Kopf vorstellen** und beschreiben



„Aus den Handlungen am Rechenrahmen sollen **mentale Vorstellungen** entstehen, die es den Kinder letztlich ermöglichen, **Rechenaufgaben nur noch im Kopf zu lösen.**“  
(Schipper)

W. Schipper, Förderkartei: [www.uni-bielefeld.de/idm/serv/rechenstoer.htm](http://www.uni-bielefeld.de/idm/serv/rechenstoer.htm)





# „Rechenaufgaben“ in den Kopf?!

## „Mentales Handeln“ anregen

Mit **Material handeln** und Handlung beobachten/ beschreiben

Rechenweg im **Kopf vorstellen** und beschreiben



W. Schipper, Förderkartei: [www.uni-bielefeld.de/idm/serv/rechenstoer.htm](http://www.uni-bielefeld.de/idm/serv/rechenstoer.htm)





# Aufbau des Fortbildungsmoduls 3.5

---

1. Grundlegende Gedanken: „Wie kommt Mathe in den Kopf?!“
2. Was sind Darstellungsmittel?
3. Wozu braucht man Darstellungsmittel?
4. Welche Darstellungsmittel wähle ich aus?
5. Wie führe ich Darstellungsmittel ein?
6. Abschluss





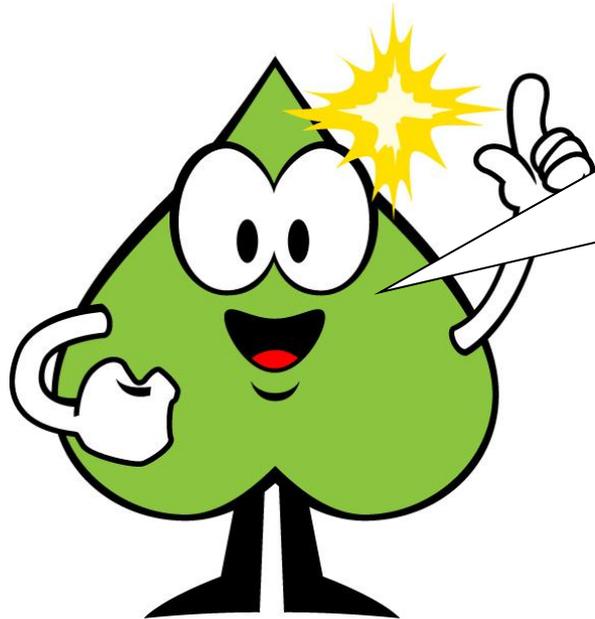
**Zum Abschluss**



**Entwickeln Sie einen „Fahrplan“  
für die Weiterarbeit!**

**Halten Sie alles schriftlich fest!**





Vielen Dank für  
Ihre  
Aufmerksamkeit!





# Literatur

- Gaidoschik, Michael: Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis. Buxtehude 2010.
- Hoensch/Niggemeyer: Mathekings. Junge Kinder fassen Mathematik an. Weinheim, Basel, Berlin 2007.
- Kaufmann/ Wessolowski: Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine. Seelze 2006.
- Lorenz, J. H.: „Die Macht der Materialien (?) - Anschauungsmittel und Zahlenrepräsentation“ IN: Mathematikdidaktik Grundschule. Medien und Materialien. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2011. Hrsg. von Anna Susanne Steinweg.
- Müller/ Wittmann: Handbuch produktiver Rechenübungen. 1. Schuljahr. Leipzig 2. Auflg. 2007.
- Peter-Koop/ Grüßing: Mit Kindern Mathematik erleben. Seelze 2007.
- Radatz/Schipper: Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr. Hannover 1996.
- Rödler, K.: Erbsen, Bohnen, Rechenbrett: Rechnen durch Handeln. Seelze 2006.
- Scherer, P.: Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern durch Fordern. Band 1: Zwanzigerraum. Leipzig, 1. Auflg. 2003.
- Schipper, W.: SINUS-Transfer Grundschule. Mathematik. Modul G4: Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern. Kiel 2005.
- Schipper, Wilhelm/ Wartha, Sebastian/ von Schroeders, Nicolai: Bielefelder Rechentest für das 2. Schuljahr. Handbuch zur Diagnostik und Förderung. Braunschweig 2011.
- Schipper, Wilhelm: Vom Calculieren zum Kalkulieren – Materialien als Lösungs- und als Lernhilfe. IN: Mathematikdidaktik Grundschule. Medien und Materialien. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2011. Hrsg. von Anna Susanne Steinweg.
- Spiegel/ Selter (2003): Kinder und Mathematik. Was Erwachsene wissen sollen. Seelze, 4. Auflg. 2007.
- Wittmann, Erich Ch.: 'Weniger ist mehr': Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule. In: K.P. Müller (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker: 394-397, 1993.

## Internetverzeichnis

KIRA: [www.kira.uni-dortmund.de](http://www.kira.uni-dortmund.de)

PIK AS: [www.pikas.uni-dortmund.de](http://www.pikas.uni-dortmund.de)

