

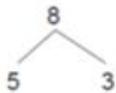


# Haus 3: Umgang mit Rechenschwierigkeiten

 **Passende Zerlegung/Umkehraufgabe:**  
Auch das eine Frage der Sichtweise...

---

**... die man mit Kindern gezielt erarbeiten sollte!**

So zeige ich 8 Finger:  So kann man das aufschreiben: 

So kann man damit rechnen:

$5 + 3 = \underline{\quad}$	$8 - 5 = \underline{\quad}$
$3 + 5 = \underline{\quad}$	$8 - 3 = \underline{\quad}$

**Probier' dasselbe mit 7 und mit 9!**

September 2014 © PIK AS (<http://www.pikas.com.de>)  138

## Modul 3.3 Erarbeitung nicht-zählender Rechenstrategien



# Entspricht das ihren Erfahrungen?

---

"Wird zählendes Rechnen verfestigt, stellt es eine Sackgasse dar, aus der die Schüler im 2. oder im 3. Schuljahr kaum mehr herauskommen."

J.H. Lorenz / H. Radatz, 1993



## Und wie steht es damit?

---

"Am Ende des 1. Schuljahres sollen die Kinder das kleine Einspluseins und Einsminuseins im Zahlenraum bis 20 auswendig wissen [...]

selbstverständlich auf Grundlage eines Verständnisses von Addition und Subtraktion.“

Radatz, Schipper, Dröge & Ebeling 1996, S. 83



# Zählendes Rechnen – Warum eigentlich nicht?

---

Sie kopieren aus einem Fachbuch, die Seiten 26 – 32.

Wie viele Seiten kopieren Sie?



# Zählendes Rechnen – Warum eigentlich nicht?

---

Sie fahren auf Urlaub, vom 9. bis 16. Juli.

Wie viele Hotel-Nächte müssen Sie bezahlen?



## **Nachteile des zählenden Rechnens**

(vgl. Gerster 1994)

- zeitaufwändig
- konzentrationsaufwändig
- prinzipiell fehleranfällig



# Zählendes Rechnen als Haupt-Strategie – Warum eigentlich nicht?

---

## **Als *Hauptstrategie* des Rechnens behindert es**

- das Erkennen von Zahlstrukturen
- das Erkennen von Zusammenhängen
- die Entwicklung von "Zahlensinn"



Worüber wir uns klar sein sollten:

---

**Aus Sicht der Kinder  
spricht doch  
(fast) alles  
für das zählende Rechnen!**



# Zählendes Rechnen – Was denn sonst?

---

- Wer zählen kann, kann zählend rechnen!
- Im überschaubaren Zahlenraum in der Regel erfolgreich!
- Wenn das im Unterricht *zählt*.

VIELE Aufgaben RICHTIG zu lösen,

dann ist es klug,  
bei vertrauten, bewährten Strategien zu bleiben!



# Zählendes Rechnen – Was denn sonst?

---

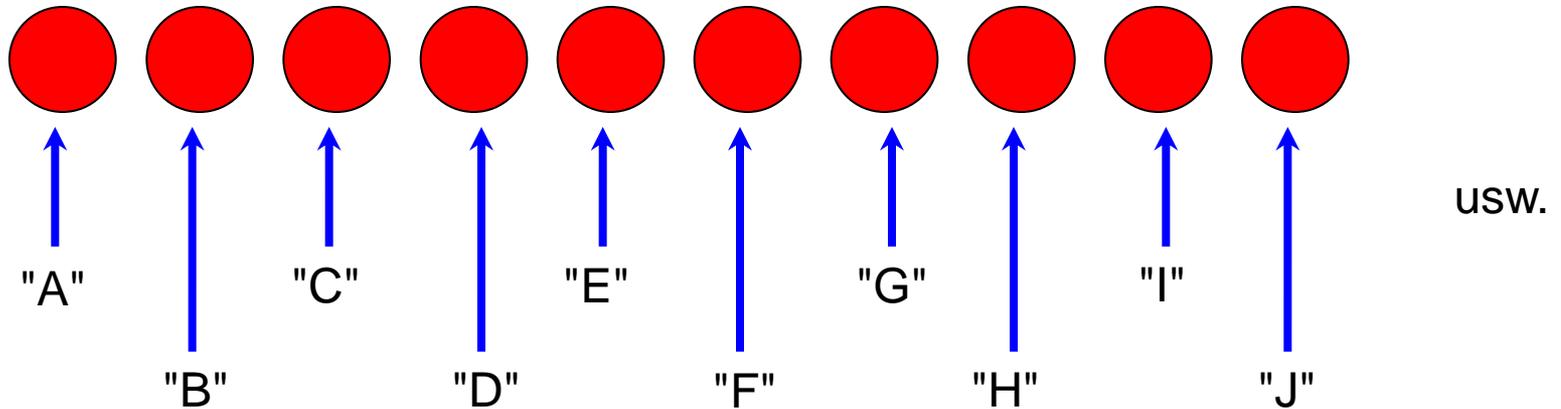
Vor allem aber:

**Was soll ein Kind denn machen,  
wenn es eine Rechnung noch nicht  
weiß?**



# Zählendes Rechnen – Was denn sonst?

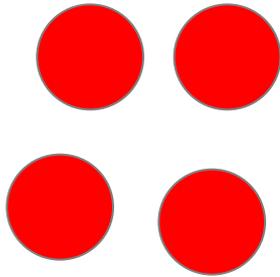
**Ein Versuch, Rechnen aus der Sicht von Kindern zu erleben:**



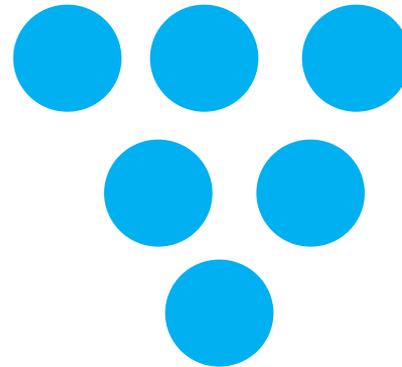


# Ist klar, wie es gemeint ist?

Wie viele rote?



Wie viele blaue?



Wie viele insgesamt?



Rechnen Sie nun bitte...

---

**F + H**



# Aber ohne zu schummeln!

Schummeln = auf Zahlen ausweichen:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...



Also: Vergessen Sie die Zahlen – und rechnen Sie die folgenden Aufgaben:

---

$$C + L$$

$$K + D$$

$$O - C$$

$$O - N$$



Ihre Lösung für  $K + D$ ?

Ihre Strategie?

$$C + L = 0$$

Dann ist  $L + C$  auch 0

$K$  ist um  $A$  weniger als  $L$

$D$  ist um  $A$  mehr als  $C$

Also: 
$$K + D = L + C = 0$$



# Zu kompliziert für Kinder?

---

Aufgabe:  $4 + 6$

Mario, Mitte 1. Schuljahr:  
(ca. 5 Sekunden Nachdenken) Zehn!

Interviewer: Wie bist du draufgekommen?

Mario:

Na so halt. Drei plus sieben ist zehn, das weiß ich schon.  
Das da (tippt auf die 4) ist eins mehr als drei,  
aber das (tippt auf die 6) ist eins weniger,  
also ist es auch zehn.



# Ihre Lösung für $O - C$ ? Ihre Strategie?

---

$$C + L = O$$

$$C + L = O \Rightarrow O - C = L$$



# Zu kompliziert für Kinder?

---

Aufgabe:  $8 - 5$

Anna-Lena, Mitte 1. Schuljahr, sehr rasch: „Drei!“

Interviewer: Wie bist du draufgekommen?

Anna-Lena: Ich rechne auch manchmal verkehrt!

Interviewer: Was heißt das, verkehrt?

Anna-Lena: Weil, schau, weil: 5, 3, ist 8 (zeigt es mit ihren Fingern, die sie bis dahin keines Blickes gewürdigt hat).

Und wenn ich jetzt aber 3 weg gib, dann sind es wieder 5 übrig.



# Ihre Lösung für O - N? Ihre Strategie?

---

$$O - N = A$$

O folgt unmittelbar auf N!



# Wie also könnte ein Kind Rechenaufgaben lösen, ohne zu zählen?

---

Natürlich auch so:

Aufgabe  $3 + 3$

Benni, Mitte 1. Schuljahr, innerhalb einer Sekunde: „Sechs!“

Wie bist du draufgekommen?

Weiß ich auswendig. Ist ja SO babysch!



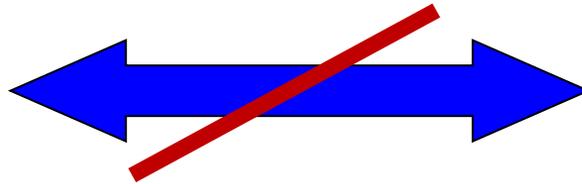
# Auswendiglernen als Schlüssel zum nichtzählenden Rechnen?

Zahlenraum bis einschließlich 10:

45	Plusrechnungen (ohne 0 als Summand)
55	Minusrechnungen (ohne 0 als Subtrahend)
45	<u>zweigliedrige Zerlegungen (ohne 0 als „Teil“)</u>
145	Grundaufgaben, die beherrscht werden sollten

Ohne Erkennen der Zusammenhänge tatsächlich 145 isolierte Fakten!

$$3 + 3 = 6$$



$$6 - 3 = 3$$

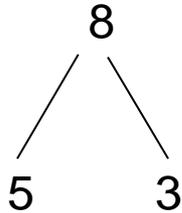
Auswendigmerken unter diesen Umständen nicht unmöglich, aber

**1) schwierig**

**2) von zweifelhaftem Wert**



# Tragfähige Alternativen zum zählenden Rechnen 1: Zahlen als Zusammensetzungen denken & nutzen



Hier ist frühes  
Auswendigmerken  
wichtig!

$$5 + 3 = 8$$

$$3 + 5 = 8$$

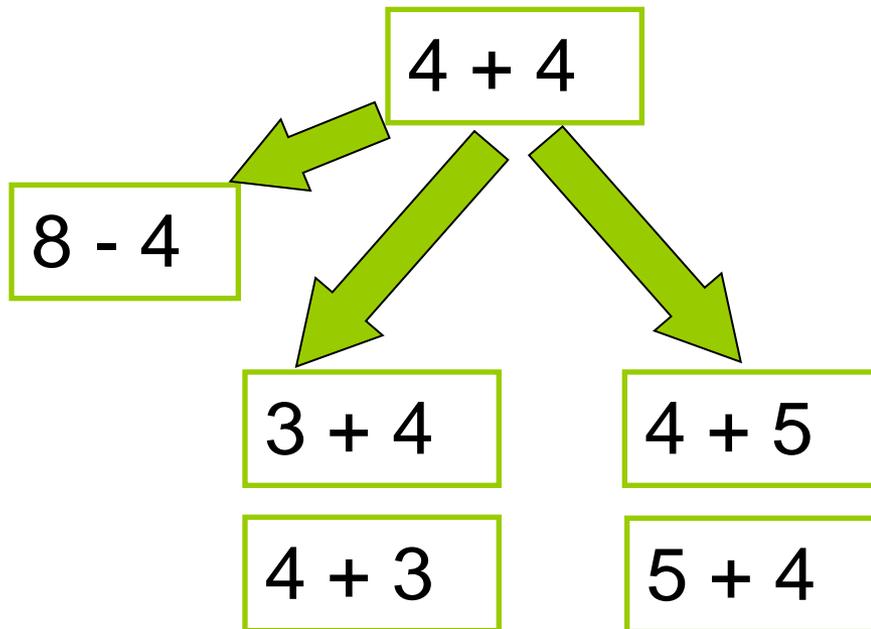
$$8 - 5 = 3$$

$$8 - 3 = 5$$

Das lässt sich aus bereits  
Gewusstem erschließen –  
aber nur auf Basis  
von Verständnis!



# Tragfähige Alternativen zum zählenden Rechnen 2: Zahlen als Zusammensetzungen denken & nutzen



Hier ist frühes  
Auswendigmerken  
wichtig!

Das lässt sich aus bereits  
Gewusstem erschließen –  
aber nur auf Basis  
von Verständnis!

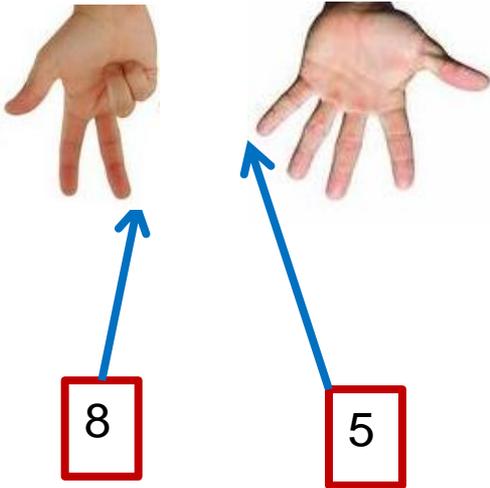


# Zahlen als Zusammensetzung: Keine Selbstverständlichkeit!



Da(s) ist 5!

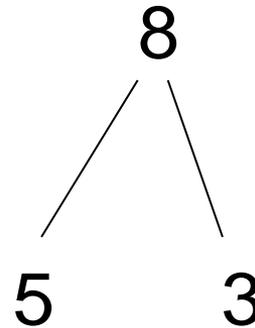
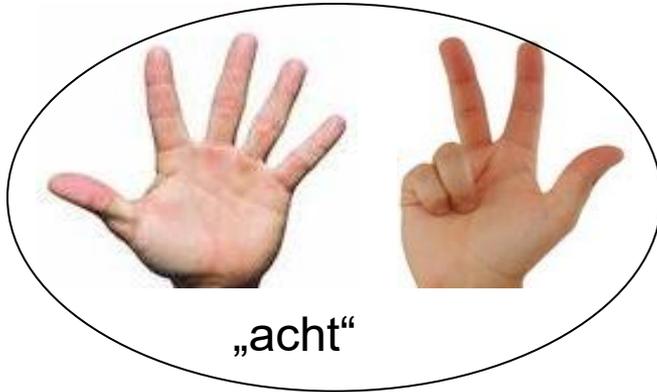
Da(s) ist 8!



Bestimmend für das Zahl-Denken vieler Kinder zu Schulbeginn:  
Zahlen als Stationen in einer Reihe



# Dagegen “the major conceptual achievement of the early school years” (Resnick 1983):



●	
●	
●	●
●	●
●	●

$$5 + 3 = 8$$

$$3 + 5 = 8$$

$$8 - 5 = 3$$

$$8 - 3 = 5$$

Zahlen als Zusammensetzungen, „Teile-Ganzes-Konzept“  
Vgl. u.a. Resnick 1983; 1992; Gerster & Schultz 2002;  
Gaidoschik 2007; Fritz & Ricken 2008; Gerster 2009

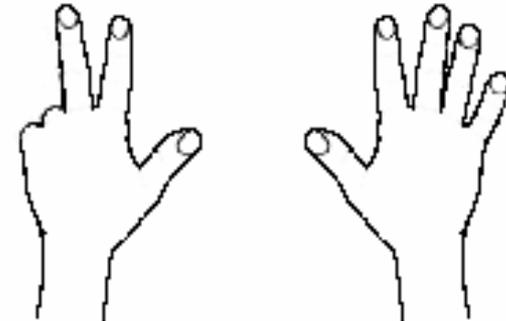
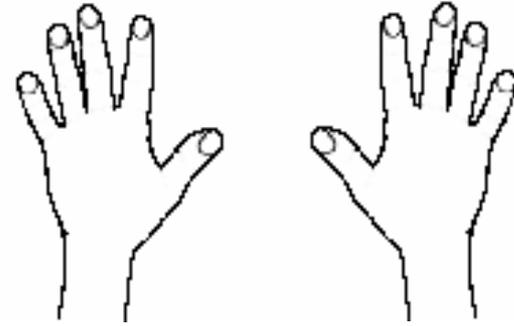


# Nächstliegendes Material zur Erarbeitung von "Zahlen als Zusammensetzung"...

Erstes Teilziel:

Anzahlen bis 10 „auf einen Sitz“ zeigen können

- Tun lassen
- Darüber reden!
- Ziel: *Struktur* sollen *bewusst* werden
- *Sinnvoll:*  
Vorerst Konzentration auf "Kraft der Fünf"

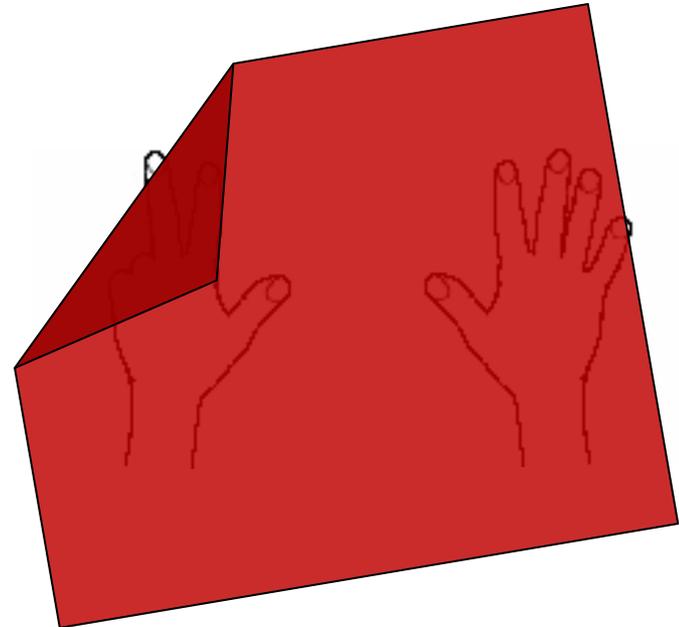




# Mit Fingern ohne Probleme möglich:

„Verdecktes Handeln“  
als Zwischenschritt  
zur Vorstellung:

- Unter dem Tisch
- Hinter dem Rücken
- Mit verbundenen Augen

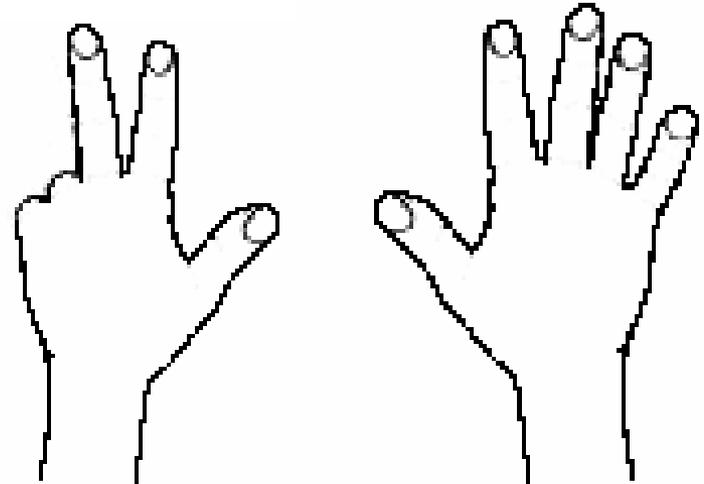




# Wichtig:

Schon früh

Strukturen benützen = festigen



Je nach Vorkenntnissen auch schon auf Ziffern-/Symbolebene,  
diese aber nicht im Vordergrund:

Es geht ums Handeln und Versprachlichen!



# Ein weites Feld für erstes nicht-zählendes Rechnen!

**Welche Rechenoperationen können mit „Handpaketen“ von Anfang an nicht-zählend gelöst werden?**

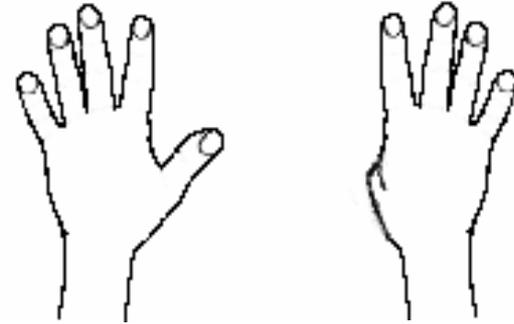
$5+1$	$1+5$	$6-5$	$6-1$	$1+ \_ = 6$	$5+ \_ = 6$	$5+6$	$6+5$	$6+6$
$5+2$	$2+5$	$7-5$	$7-2$	$2+ \_ = 7$	$5+ \_ = 7$	$5+7$	$7+5$	$7+7$
$5+3$	$3+5$	$8-5$	$8-3$	$3+ \_ = 8$	$5+ \_ = 8$	$5+8$	$8+5$	$8+8$
$5+4$	$4+5$	$9-5$	$9-4$	$4+ \_ = 9$	$5+ \_ = 9$	$5+9$	$9+5$	$9+9$
$5+5$		$10-5$		$5+ \_ = 10$				



# Zahlen als Zusammensetzungen erarbeiten – und nutzen!

## Weiterer Schritt:

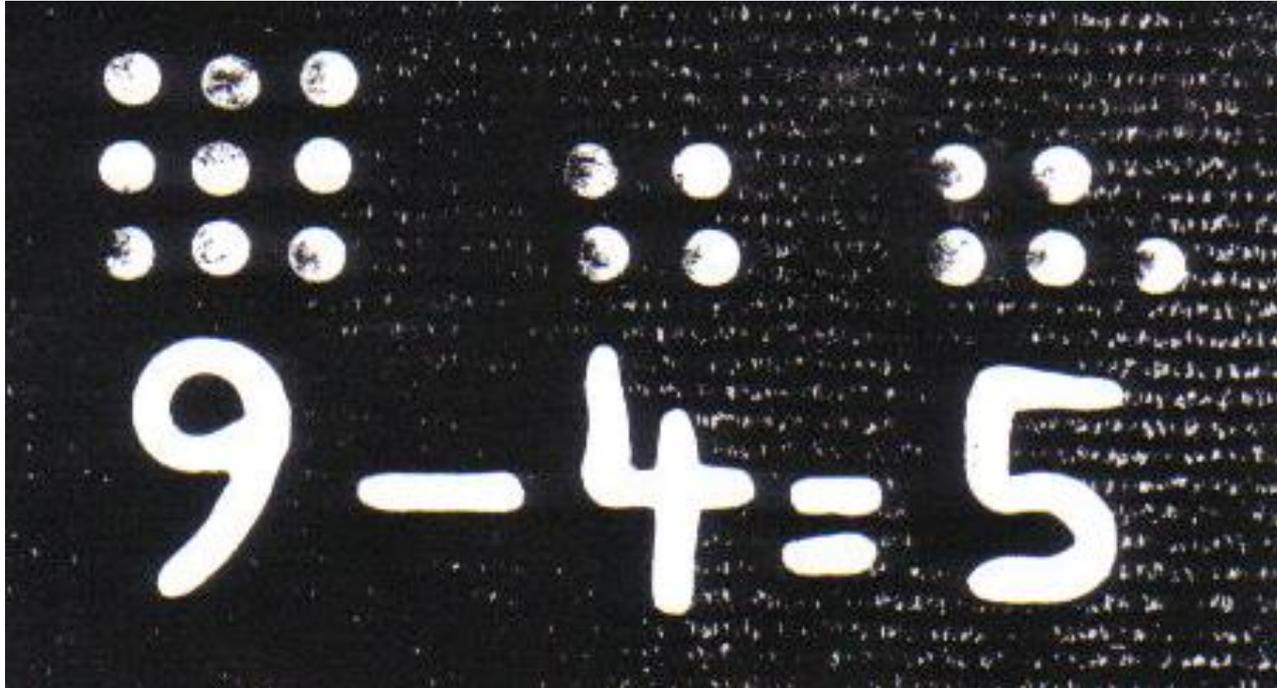
- Symbolische Darstellungen entwickeln



$$\begin{array}{c} 9 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 5 \quad + \quad 4 \end{array}$$



# Die Tücken der Symbole...



„Dyskalkulie-Training  
nach der AFS-Methode“

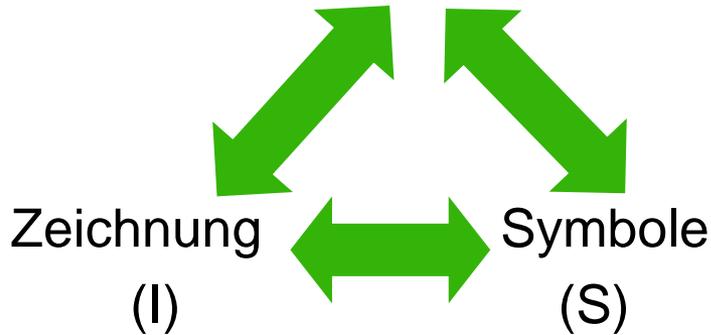
Aus: Kopp-Duller, A./Duller, L.: Dyskalkulie-Training nach der AFS-Methode. Klagenfurt: KLL-Verlag



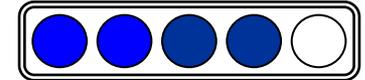
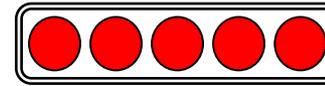
# Dagegen: Symbole und Wirklichkeit dauerhaft verknüpfen!

Dabei von Anfang an wichtig:  
Sachaufgaben, Rechengeschichten

Handlung (E)



in allen Varianten!



$$\begin{array}{c} 9 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 5 \quad + \quad 4 \end{array}$$

$9 - 5 = 4$

$4 + 5 = 9$

$9 - 4 = 5$

$5 + 4 = 9$



# Kinder erfinden Sachaufgaben:

## 1. Volksschule, Jänner

HANNAH W.

Peter hat 6 Luftballons ein

er ist im Park. Da hat er

nur mehr fünf.



# Kinder erfinden Sachaufgaben:

## 1. Volksschule, Jänner

---

Ich gehe in einen Greiesterachlös da sehe ich  
8 Zornd und 6 brachen kometen dazu danistes 14



# Kinder erfinden Sachaufgaben:

## 1. Volksschule, Jänner

Ich gehe Wald ich sehe

30 Rehe und es kommen noch

10 der zu wifile sind es es

sind 40



# Kinder erfinden Sachaufgaben:

## 1. Volksschule, Jänner

Ich habe 5 Klauens Kost  
ume und 7 briencesinen.

$$5 + 7 = 6$$



# Kinder erfinden Sachaufgaben:

## 1. Volksschule, Dezember

es ist schon Weihnachten Das Christkind  
hat 9 Engel als Helfer 5 Bäckerei  
Geschenke in 2 Brigaden Sie den Kindern  
2 üben fliegen

---

$$5 + 2 + 2 = 9$$



# Kinder erfinden Sachaufgaben:

## 1. Volksschule, Dezember



$$4 - 1 = 3$$



# Kinder erfinden Sachaufgaben:

## 1. Volksschule, Dezember

---

LUKAS

ich ghehe in Erhen

Geisterschulos Dort sheh

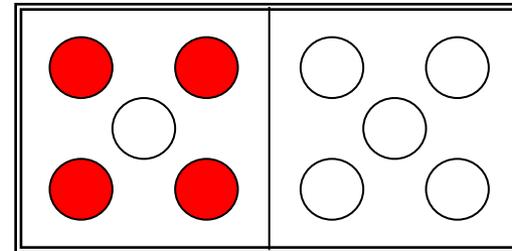
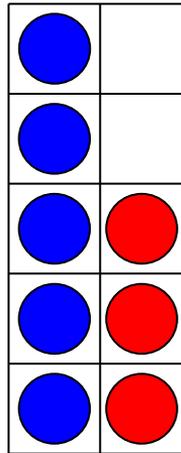
ich einen Geist und auf

ein mal  $1+9=10$



# Methodische Varianten für Erarbeitung von "Zahlen als Zusammensetzung"

Kärtchen mit Zehnerfeld-Darstellungen

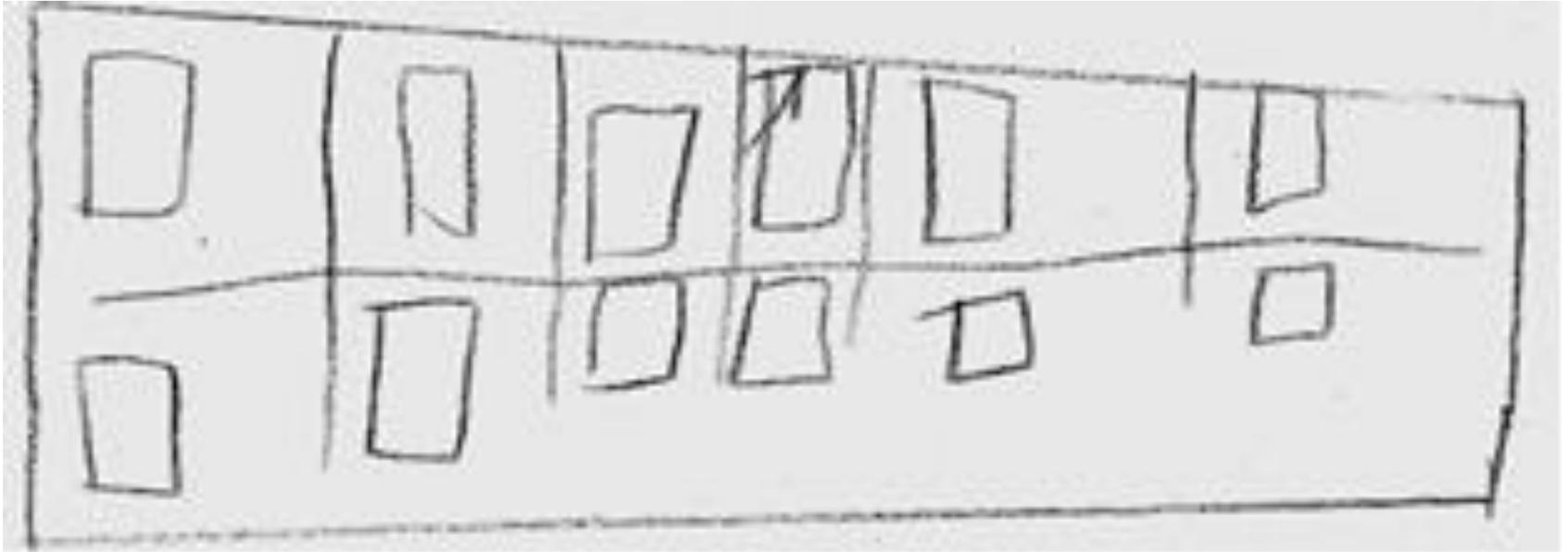


Wendeplättchen & Rechenschiffchen





# Material als Lernhilfe?

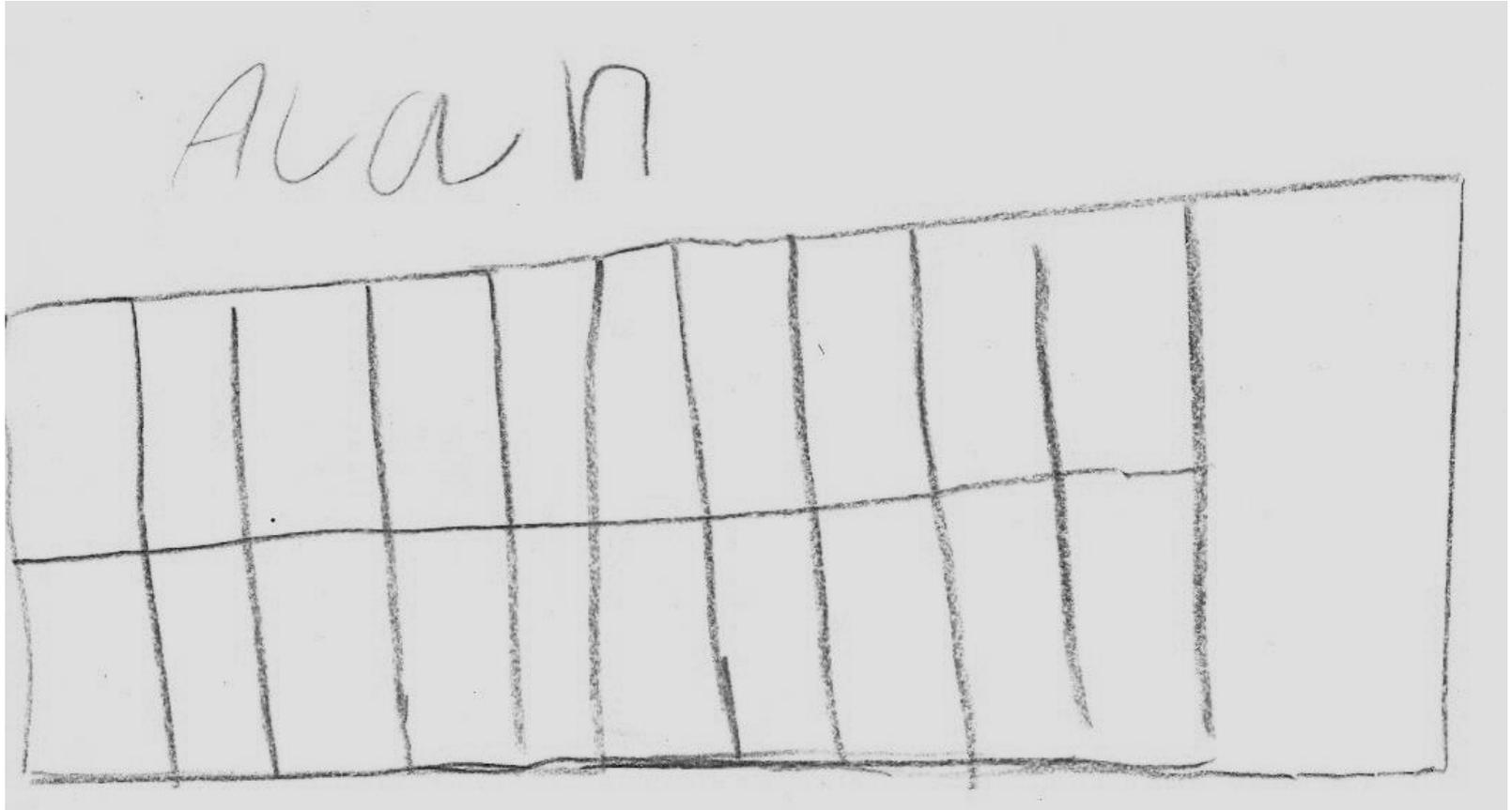


Anfang 2. Schuljahr: „Zeichne ein Zehnerfeld“  
Zehnerfeld-Darstellung war die Haupt-Veranschaulichung  
in dieser Klasse im ersten Schuljahr!

(Zeichnungen zur Verfügung gestellt von Jutta Schäfer, PH Ludwigsburg – Reutlingen)

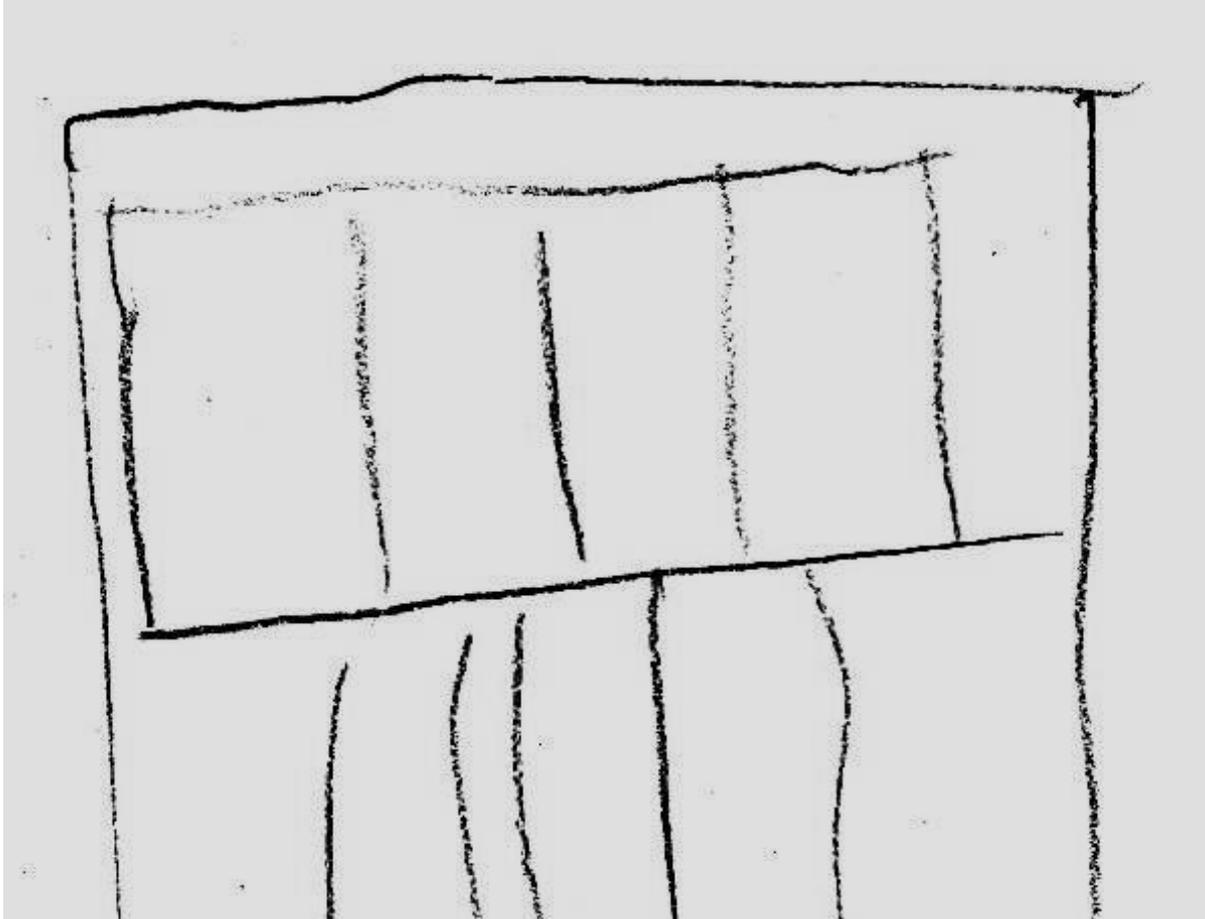


# Material als Lernhilfe?



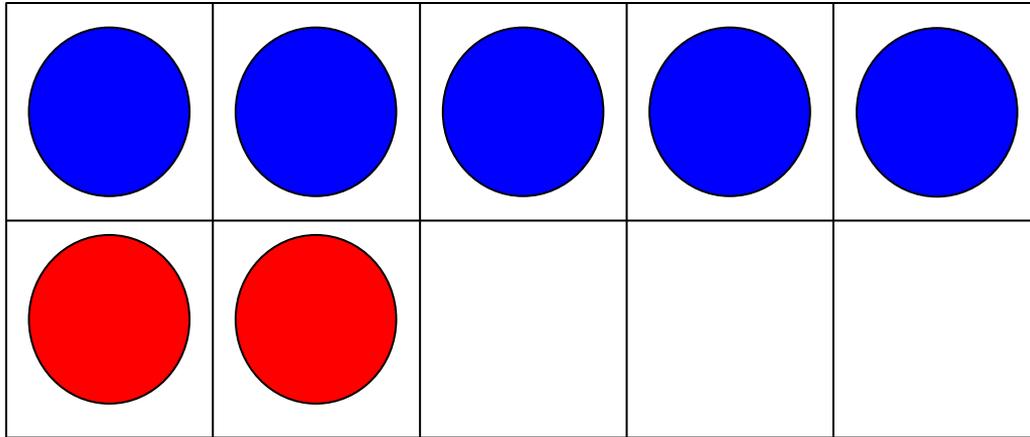


# Material als Lernhilfe?





# Material als *Lernstoff!* Deshalb: "Blitzblick"-Übungen (Gerster 2005)



Nur kurz zeigen (Overhead), dann:

„Wie viele Punkte“?

"Wie hast du das (so schnell) gesehen?"



## Unerlässlich: Strukturieren als *eigene Tätigkeit* des Kindes

---

"Lege 5 Plättchen so, dass man auf einen Blick erkennen kann, wie viele es sind!"

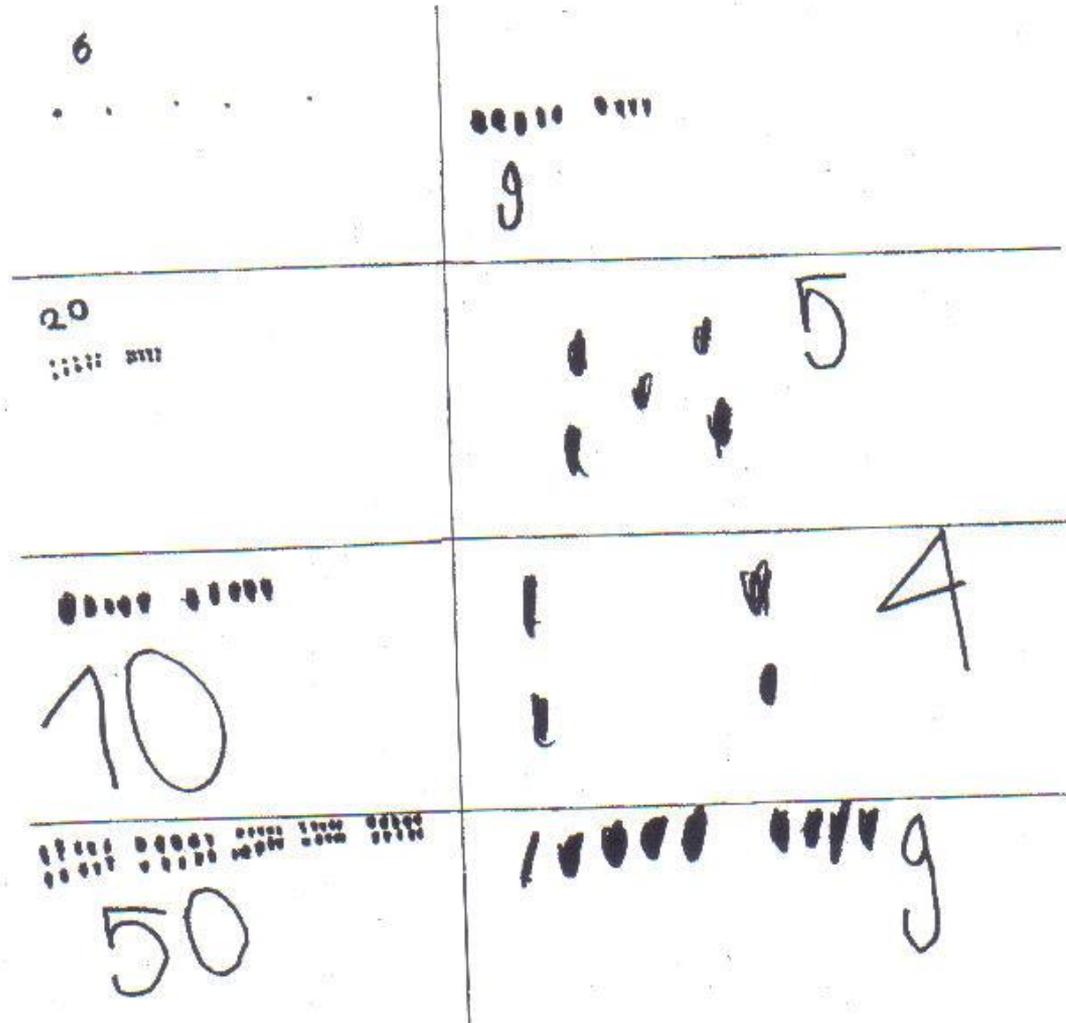
"Lege 8 Plättchen so, dass man auf einen Blick erkennen kann, wie viele es sind!"

"Zeichne 7 Kreise so, dass man auf einen Blick erkennen kann, wie viele es sind!"

„Suche dir selbst eine Zahl! Mach‘ dafür eine Zeichnung, auf der man auf einen Blick erkennt, wie viele es sind!"



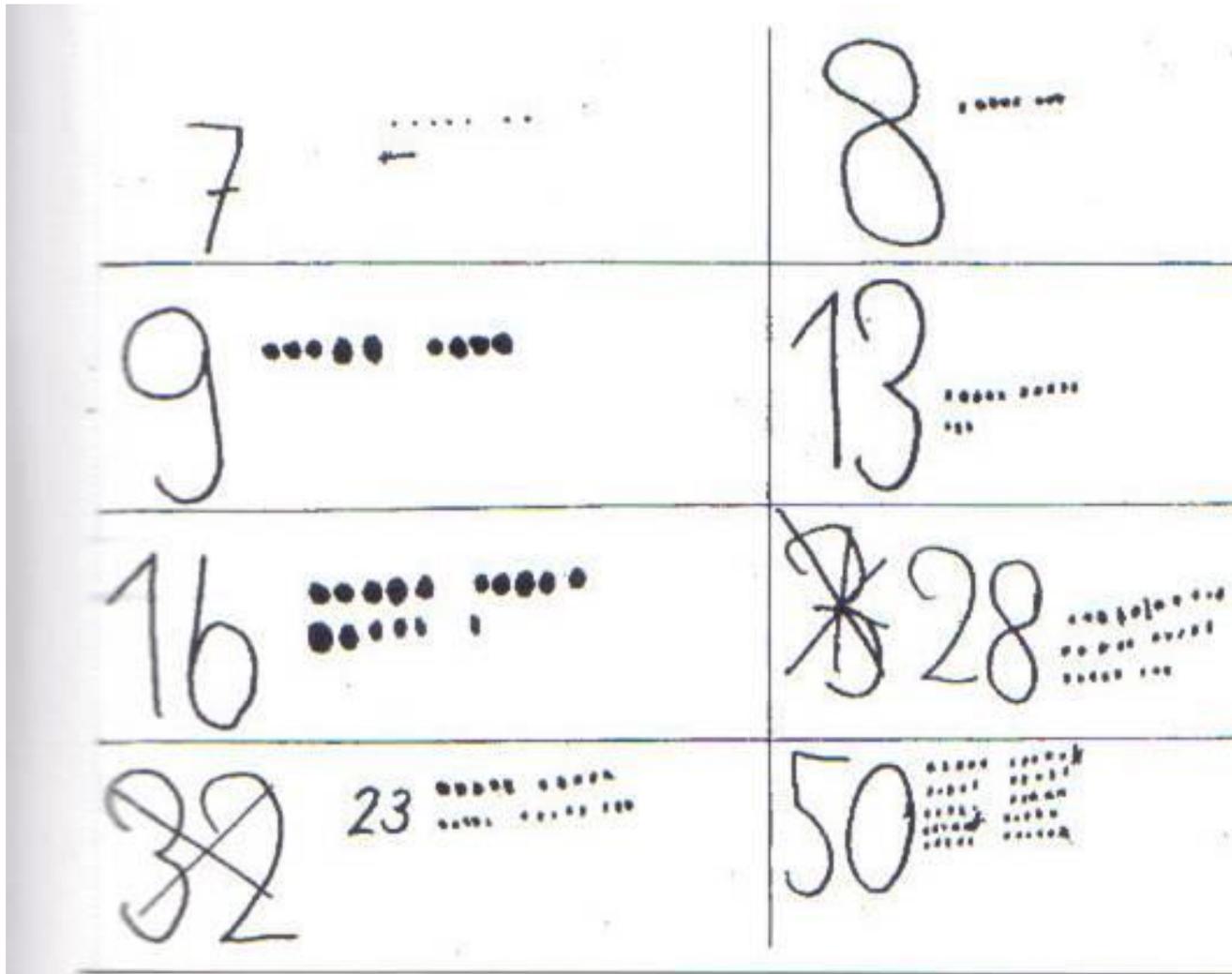
„Zeichne so, dass man die Zahl auf einen Blick erkennt!“



Aus:Hengartner u.a.1999



„Zeichne so, dass man die Zahl auf einen Blick erkennt!“

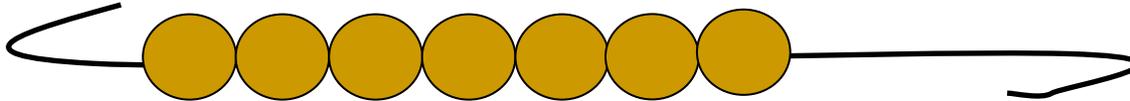


Aus:Hengartner u.a.1999



# Wie Zahlwissen gezielt erweitert werden kann und muss...

## Ein dafür bewährtes Material: Kugelketten...

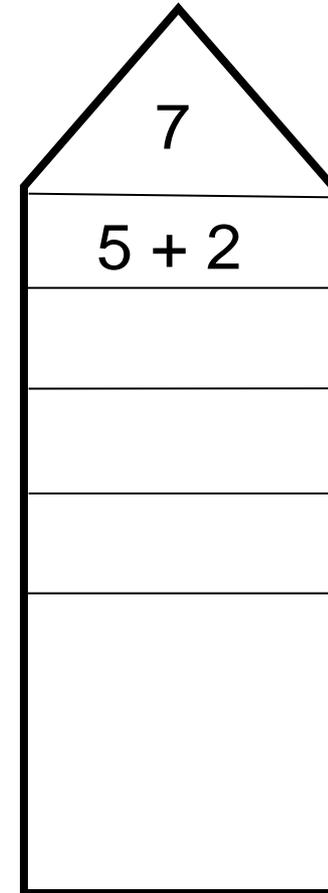
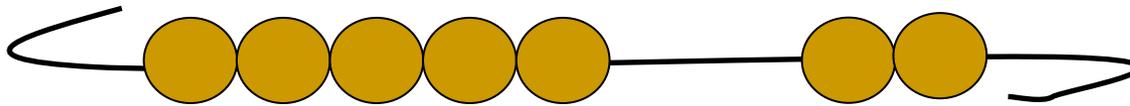




# Wie Zahlwissen gezielt erweitert werden kann und muss...

## Zunächst: Freies Experimentieren

„Wie kann man 7 Kugeln auf zwei Portionen verteilen?“

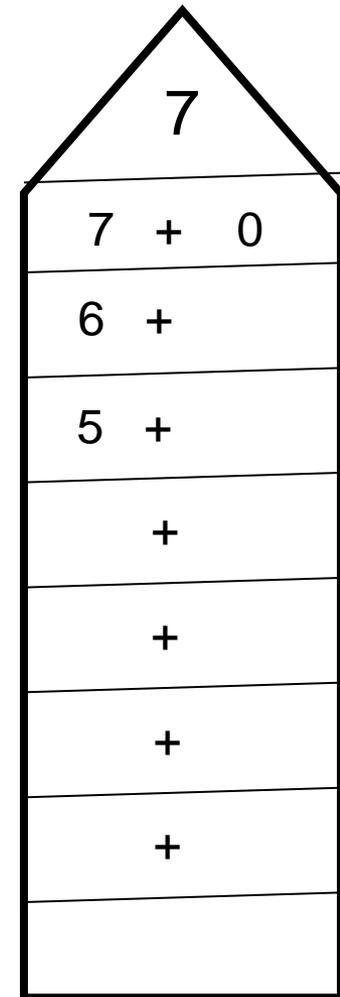
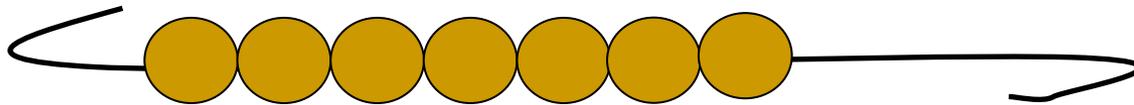




# Zahlen in *allen* Zusammensetzungen: Ein Vorschlag...

**Entscheidender nächster Schritt:**

Zerlegen mit System!



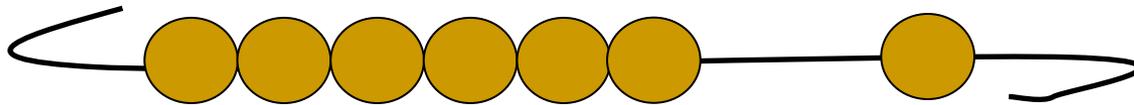
Bewusst nur begonnen:

Können Kinder das System fortsetzen?

Oder finden Sie ein anderes, eigenes System?



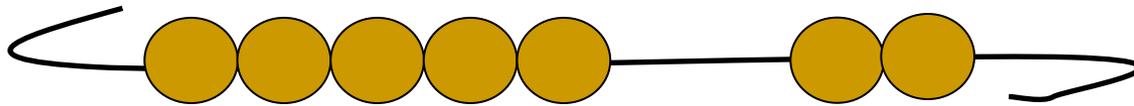
# Ein Vorschlag zur Erarbeitung...



7
7 + 0
6 +
5 +
+
+
+
+



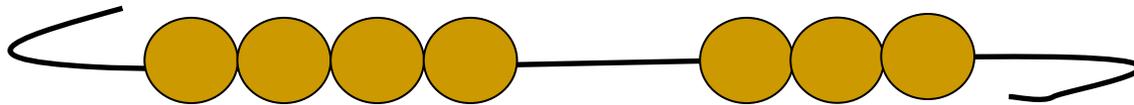
# Ein Vorschlag zur Erarbeitung...



7
7 + 0
6 + 1
5 +
+
+
+
+



# Ein Vorschlag zur Erarbeitung...



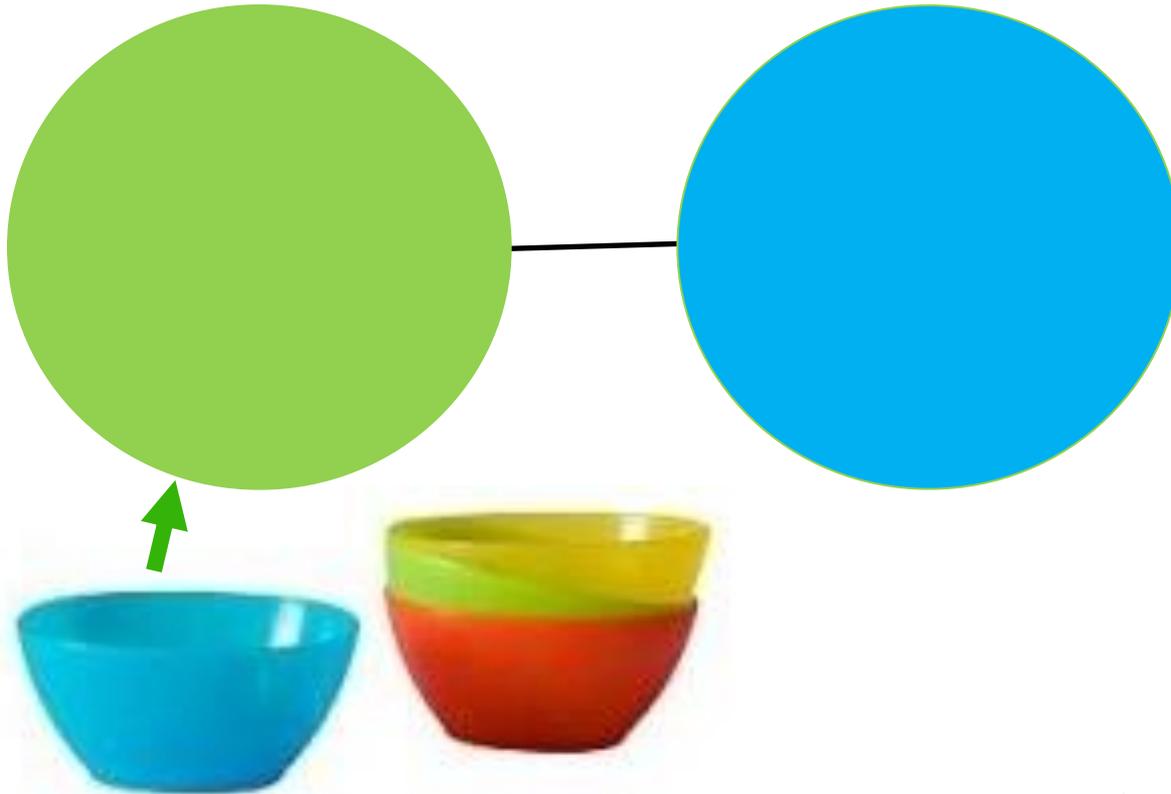
7
7 + 0
6 + 1
5 + 2
4 +
+
+
+



# Ein Vorschlag zur Erarbeitung...

Variante, für manche Kinder entscheidend:

„Verdeckter Materialeinsatz“



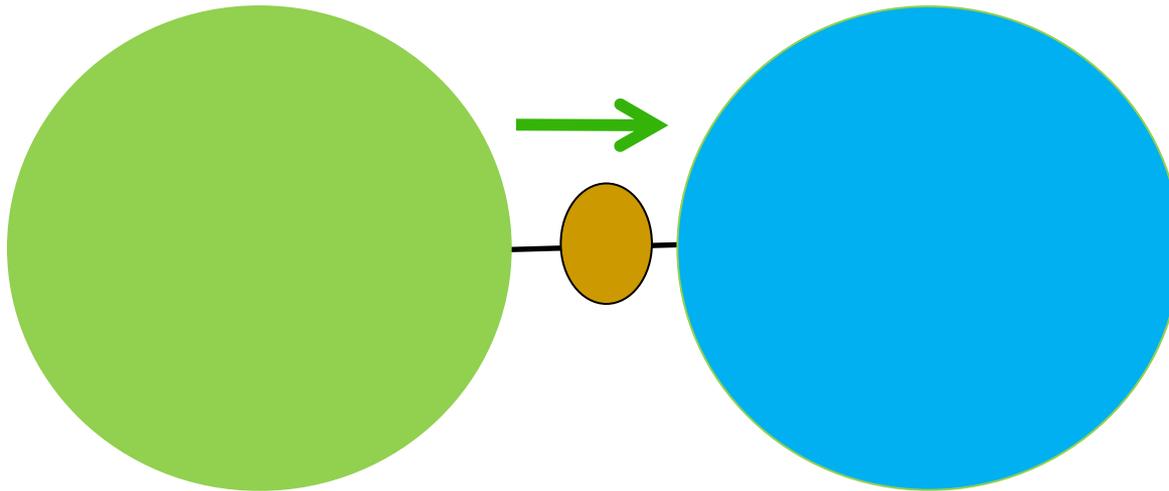
7		
7	+	0
6	+	1
5	+	2
4	+	3
	+	
	+	
	+	



# Ein Vorschlag zur Erarbeitung...

Die Kugeln verschwinden unter Bechern/  
Schüsseln; Verschieben je einer Kugel von  
da nach dort findet ohne Blickkontakt statt!

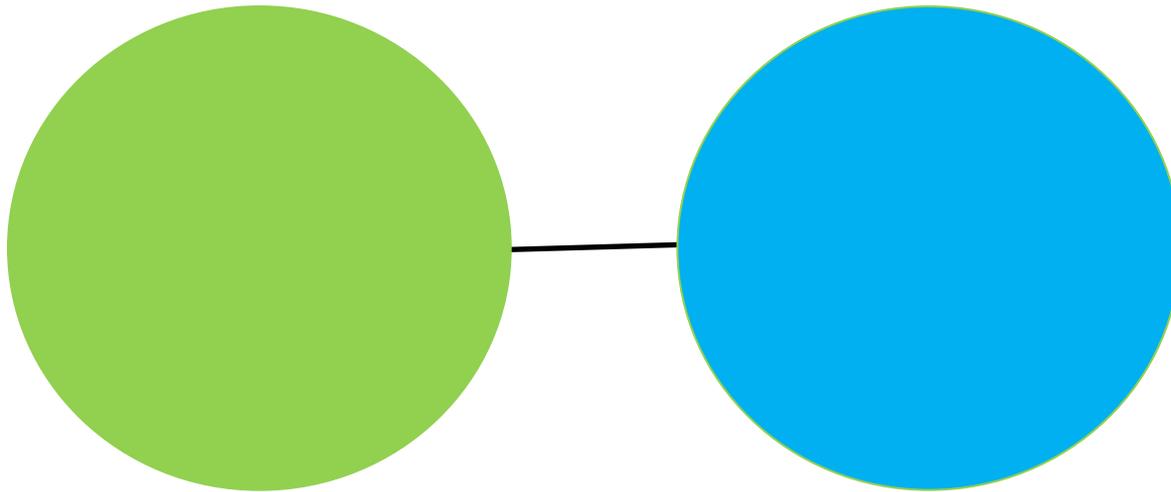
“



7		
7	+	0
6	+	1
5	+	2
4	+	3
	+	
	+	
	+	



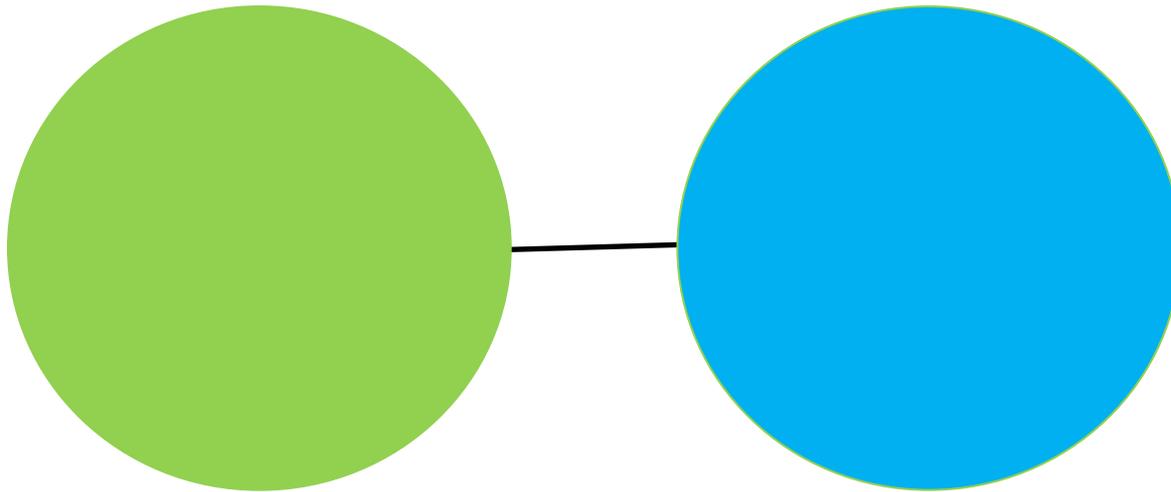
# Ein Vorschlag zur Erarbeitung...



7		
7	+	0
6	+	1
5	+	2
4	+	3
	+	
	+	
	+	



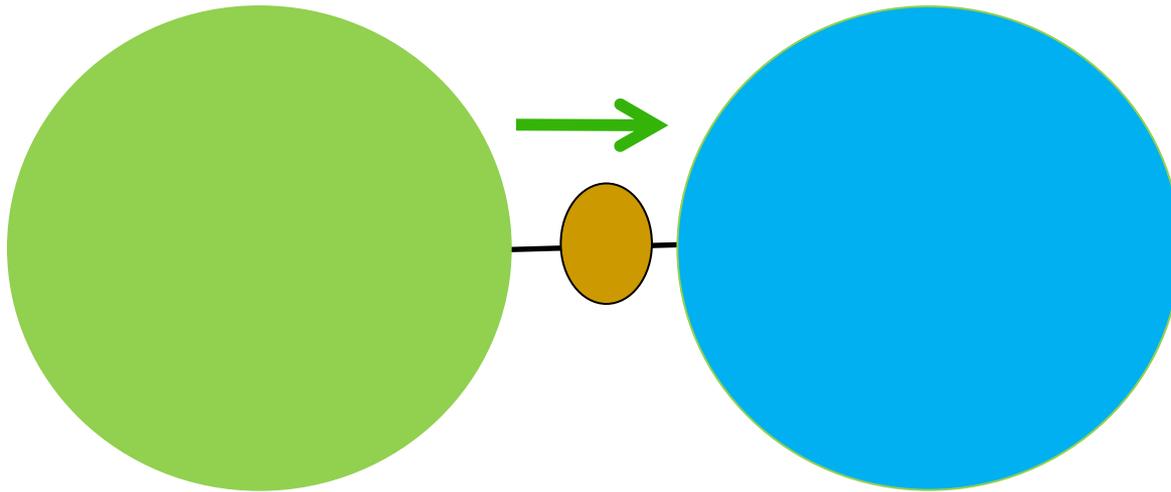
# Ein Vorschlag zur Erarbeitung...



7
7 + 0
6 + <b>1</b>
5 + <b>2</b>
4 + <b>3</b>
<b>3</b> + <b>4</b>
+
+



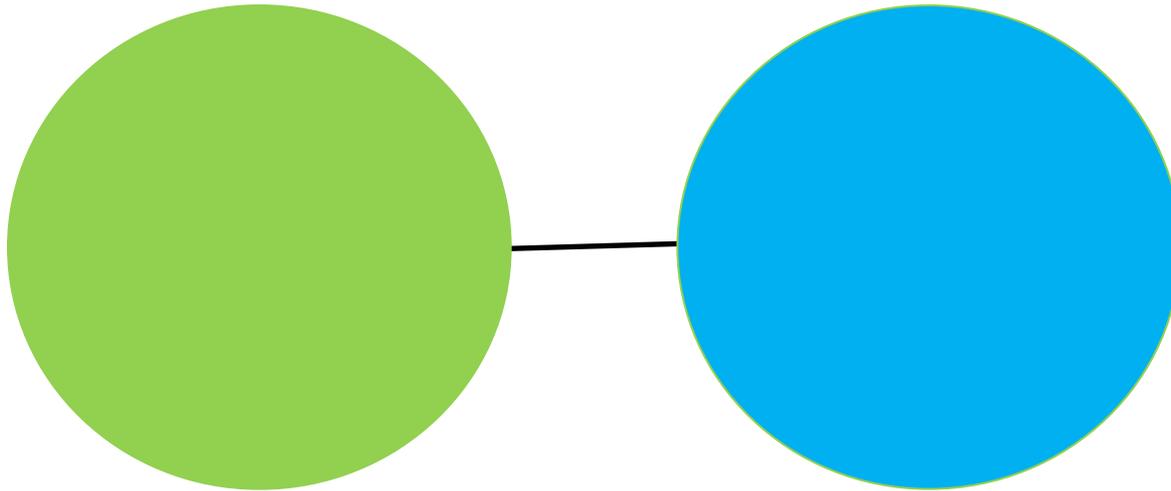
# Ein Vorschlag zur Erarbeitung...



7		
7	+	0
6	+	1
5	+	2
4	+	3
3	+	4
	+	
	+	



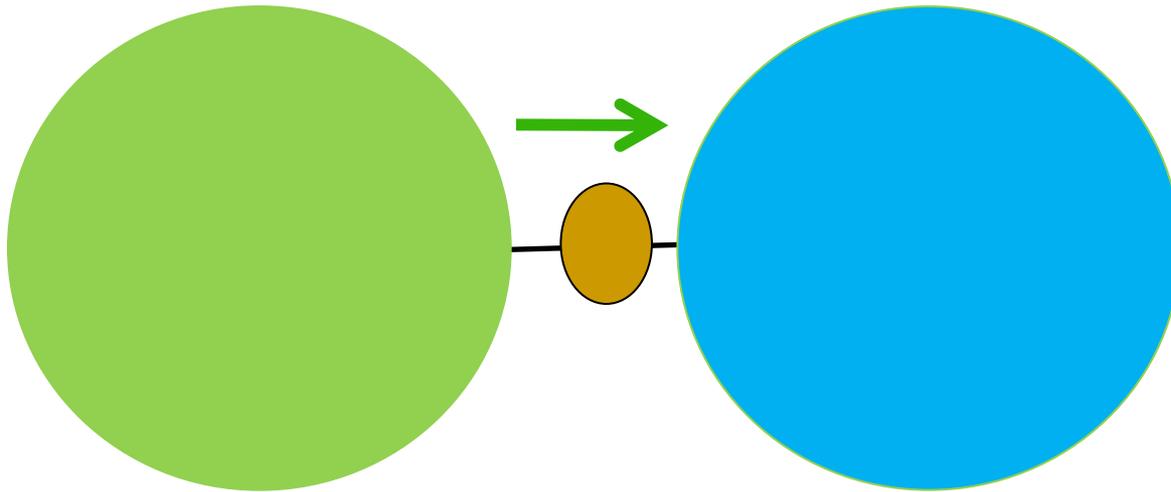
# Ein Vorschlag zur Erarbeitung...



7
7 + 0
6 + <b>1</b>
5 + <b>2</b>
4 + <b>3</b>
<b>3</b> + <b>4</b>
<b>2</b> + <b>5</b>
+



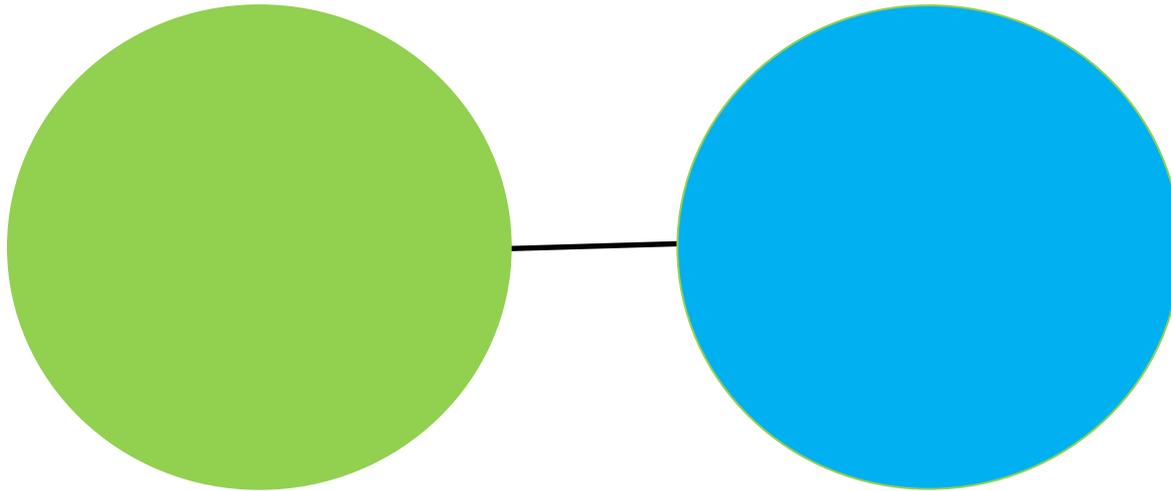
# Ein Vorschlag zur Erarbeitung...



7
7 + 0
6 + <b>1</b>
5 + <b>2</b>
4 + <b>3</b>
<b>3</b> + <b>4</b>
<b>2</b> + <b>5</b>
+



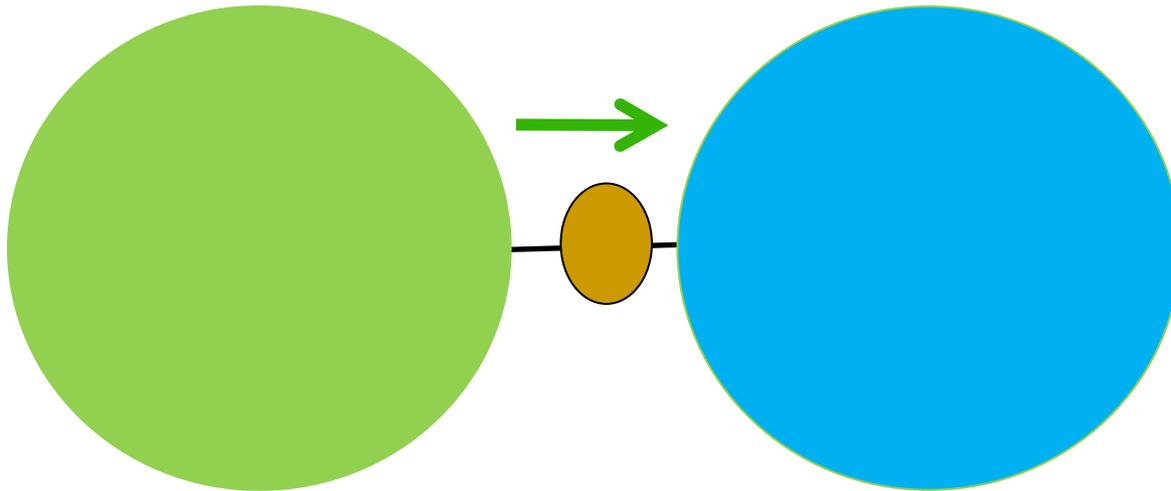
# Ein Vorschlag zur Erarbeitung...



7
7 + 0
6 + <b>1</b>
5 + <b>2</b>
4 + <b>3</b>
<b>3</b> + <b>4</b>
<b>2</b> + <b>5</b>
<b>1</b> + <b>6</b>



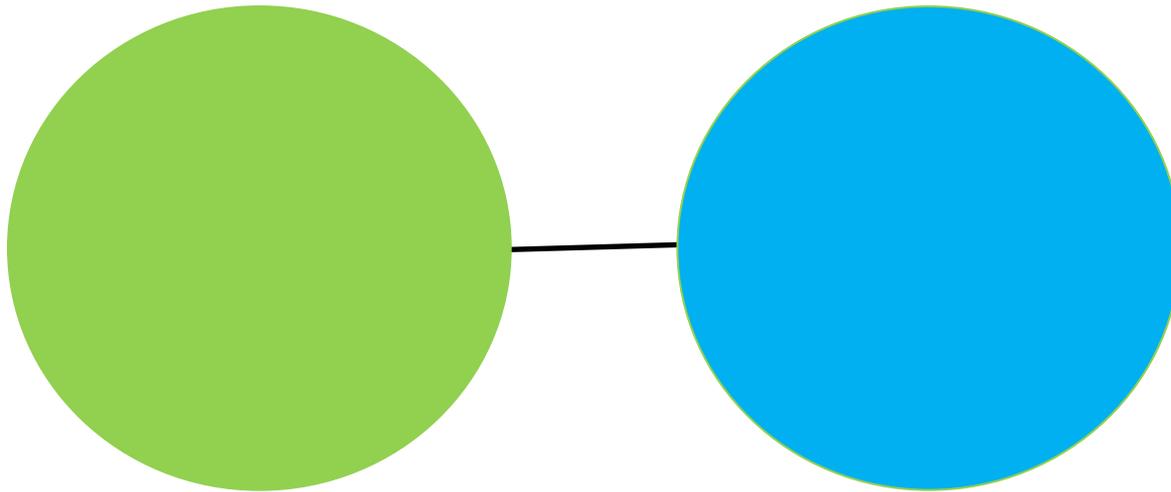
# Ein Vorschlag zur Erarbeitung...



7
7 + 0
6 + 1
5 + 2
4 + 3
3 + 4
2 + 5
1 + 6



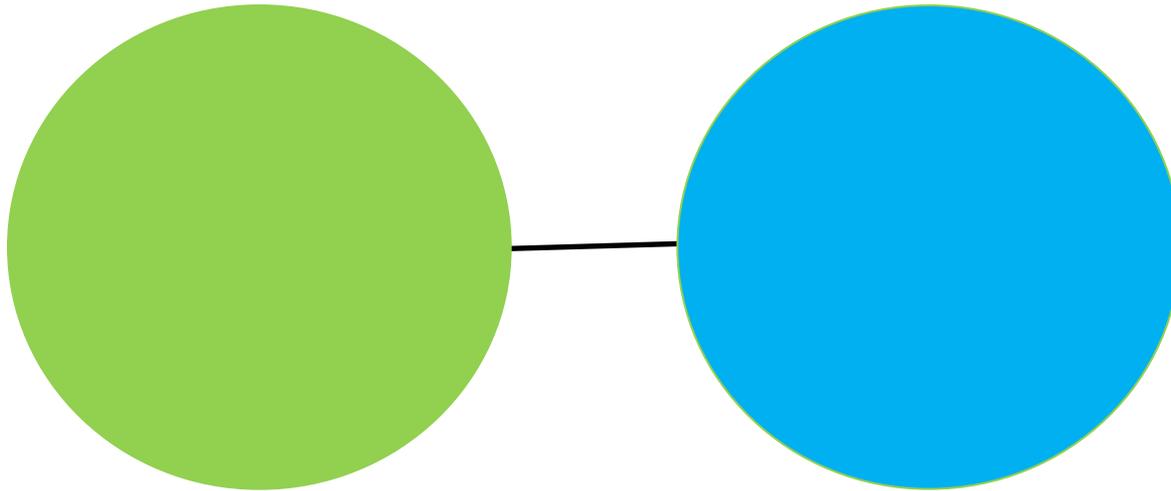
# Ein Vorschlag zur Erarbeitung...



7
7 + 0
6 + 1
5 + 2
4 + 3
3 + 4
2 + 5
1 + 6
0 + 7



# Ein Vorschlag zur Erarbeitung...



**„Auf der einen Seite immer um 1 weniger,  
auf der anderen Seite immer um 1 mehr“**

7
7 + 0
6 + 1
5 + 2
4 + 3
3 + 4
2 + 5
1 + 6
0 + 7



# „Entdeckendes Üben, übendes Entdecken“ (Winter 1985): "Schöne Päckchen" I...

8	
1	+
2	+
3	+
4	+

Kannst du weitermachen?

Was fällt dir auf?

Kein Übungsblatt ist für sich schon wertvoll!

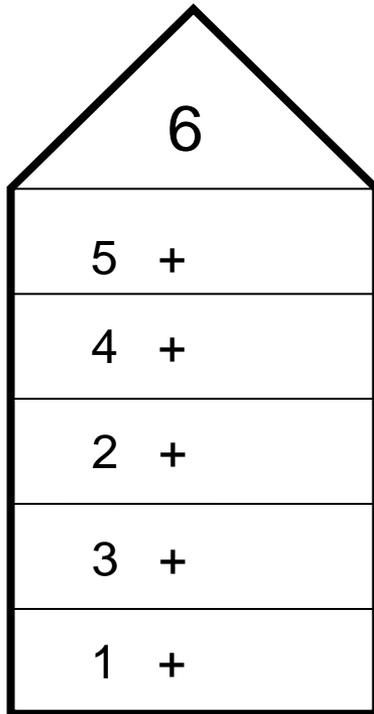
Der Wert entsteht durchs Reden darüber:

"Strategiekonferenzen" in der Klasse

"Lehr-Lern-Dialog" in der Einzelförderung



# Unerlässliche Ergänzung: "Schöne Päckchen?"



Was passt nicht ins Muster?



# Förderung prozess- und inhaltsbezogener Kompetenzen: Nicht zu trennen!

$$\begin{array}{r} 2 + 8 = \underline{10} \\ 3 + 7 = \underline{10} \\ 4 + 6 = \underline{10} \\ 5 + 5 = \underline{10} \\ 6 + 4 = \underline{10} \\ \hline 7 + 3 = \underline{10} \end{array}$$

Was fällt dir auf?

immer 10

**Paul**



**PIK-AS Haus 1 / Entdeckerpäckchen**



# Förderung prozess- und inhaltsbezogener Kompetenzen: Nicht zu trennen!

$$\begin{array}{r} 2 + 8 = 10 \\ 3 + 7 = 10 \\ 4 + 6 = 10 \\ 5 + 5 = 10 \\ 6 + 4 = 10 \\ 7 + 3 = 10 \end{array}$$

Was fällt dir auf?

Erste Pluszahl  
die ersten Pluszahlen  
entwickeln sich  
immer eine Zahl höher

Zweite Pluszahl  
die zweite Plus  
zahl entwickelt  
sich immer eine Zahl höher

Ergebniszahl  
die Ergebniszahl ist immer  
gleich wie die erste Plus  
zahl immer höher wird und  
die zweite Pluszahl wird  
immer tiefer,  
tiefer

Hanna



# Förderung prozess- und inhaltsbezogener Kompetenzen: Nicht zu trennen!

Handwritten math problems on lined paper:

$$\begin{array}{r} 2 + 8 = 10 \\ 3 + 7 = 10 \\ 4 + 6 = 10 \\ 5 + 5 = 10 \\ 6 + 4 = 10 \\ 7 + 4 = 10 \end{array}$$

The first two columns of numbers are circled in yellow and purple respectively. The entire set of equations is enclosed in a hand-drawn oval.

Was fällt dir auf?

- es ergibt immer Weile sozusagen  
mit zwei passende Puzelteile.
- immer +1
- immer -1

**Antonia**

Quelle: [www.pikas.uni-dortmund.de/](http://www.pikas.uni-dortmund.de/)

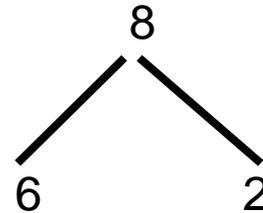
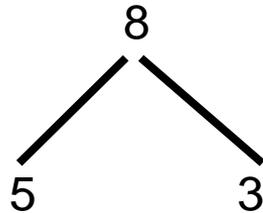


# Und wieder gilt: Zerlegungen *anwenden* = festigen

Zerlegung  
"wie mit den Händen"



Nachbarzerlegung  
("eine Kugel verschieben")



Daraus leicht  
abzuleiten:

$$5 + 3 = 8$$

$$3 + 5 = 8$$

$$8 - 5 = 3$$

$$8 - 3 = 5$$

Daraus leicht  
abzuleiten:

$$6 + 2 = 8$$

$$2 + 6 = 8$$

$$8 - 2 = 6$$

$$8 - 6 = 2$$



# Für mehr als eine Übungseinheit gut:

---

Zerlege die Zahl 8 (5, 7, 9 ...) in zwei Portionen!

Wie viele verschiedene Zerlegungen findest du für 8 (5, ...) ?

Bist du sicher, dass du alle gefunden hast?

Wie kannst du überprüfen, ob du alle gefunden hast?

Finde zu jeder Zerlegung Plus- und Minusaufgaben,  
bei denen diese Zerlegung hilft!

Such' dir irgendeine Zahl aus.

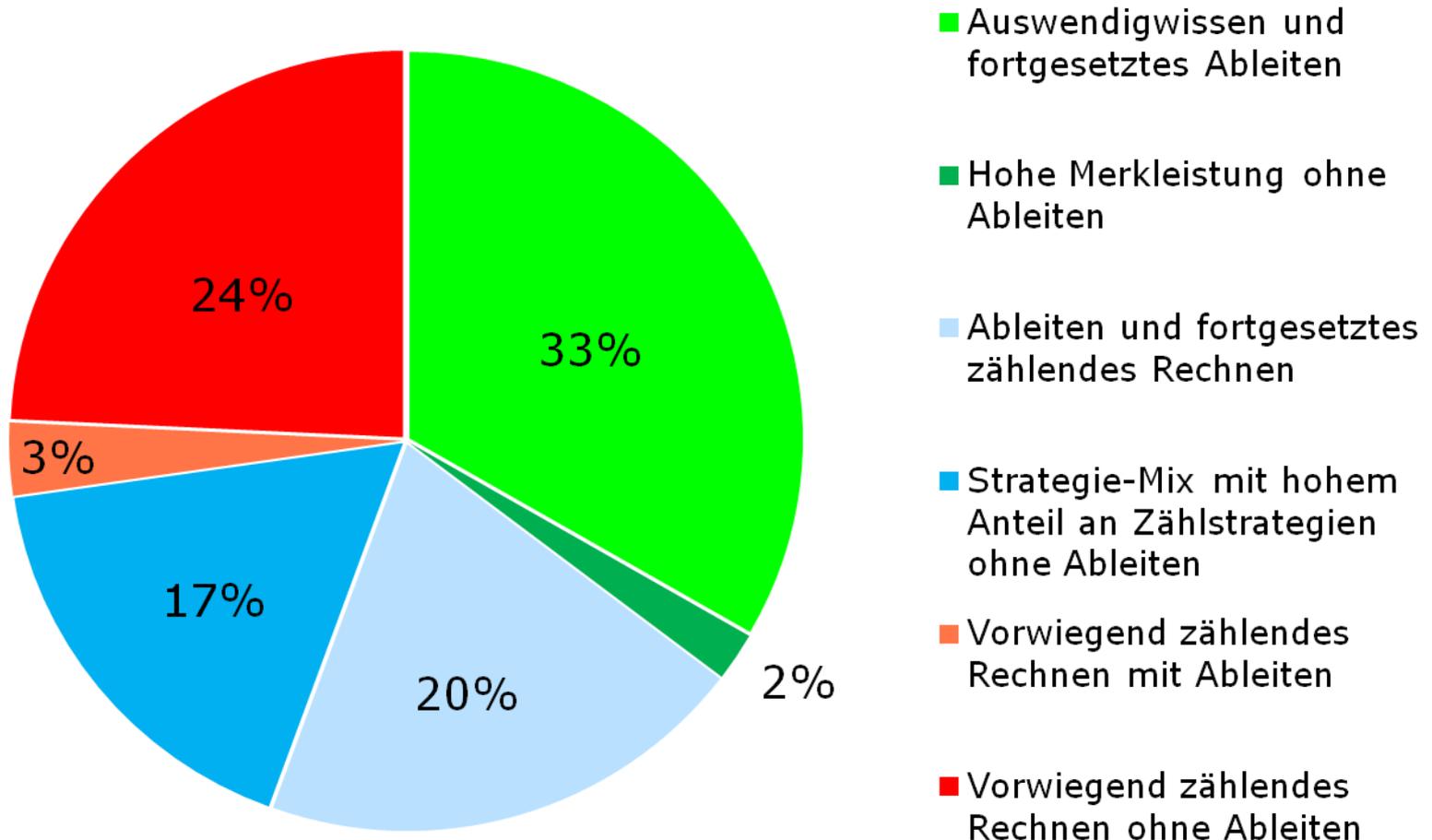
Finde möglichst viele Zerlegungen!

Schreibe Plus- und Minusaufgaben,  
bei denen diese Zerlegungen helfen!



# Weiter zum Aufbau nicht-zählender Rechenstrategien: Empirische Forschung...

## "Strategietypen im ZR bis 10" Ende 1. Schuljahr (Gaidoschik 2010)

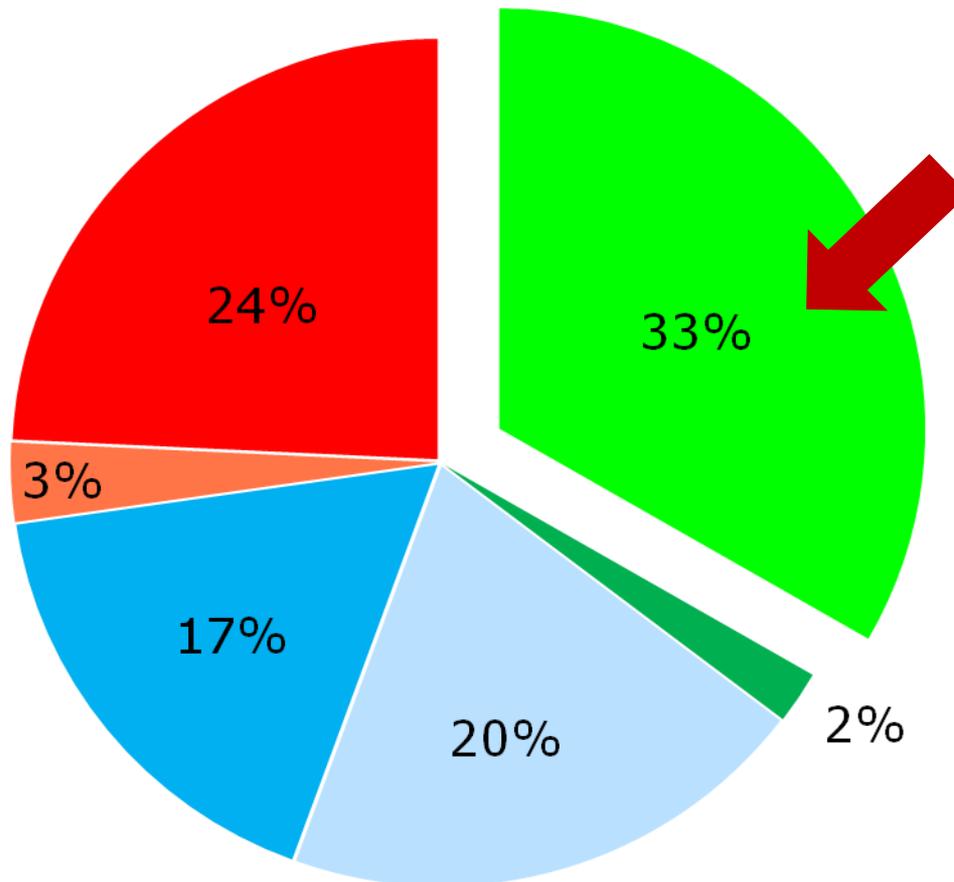


N = 139, Zufallsauswahl, Niederösterreich



# Weiter zum Aufbau nicht-zählender Rechenstrategien: Empirische Forschung...

"Strategietypen im ZR bis 10" Ende 1. Schuljahr (Gaidoschik 2010)

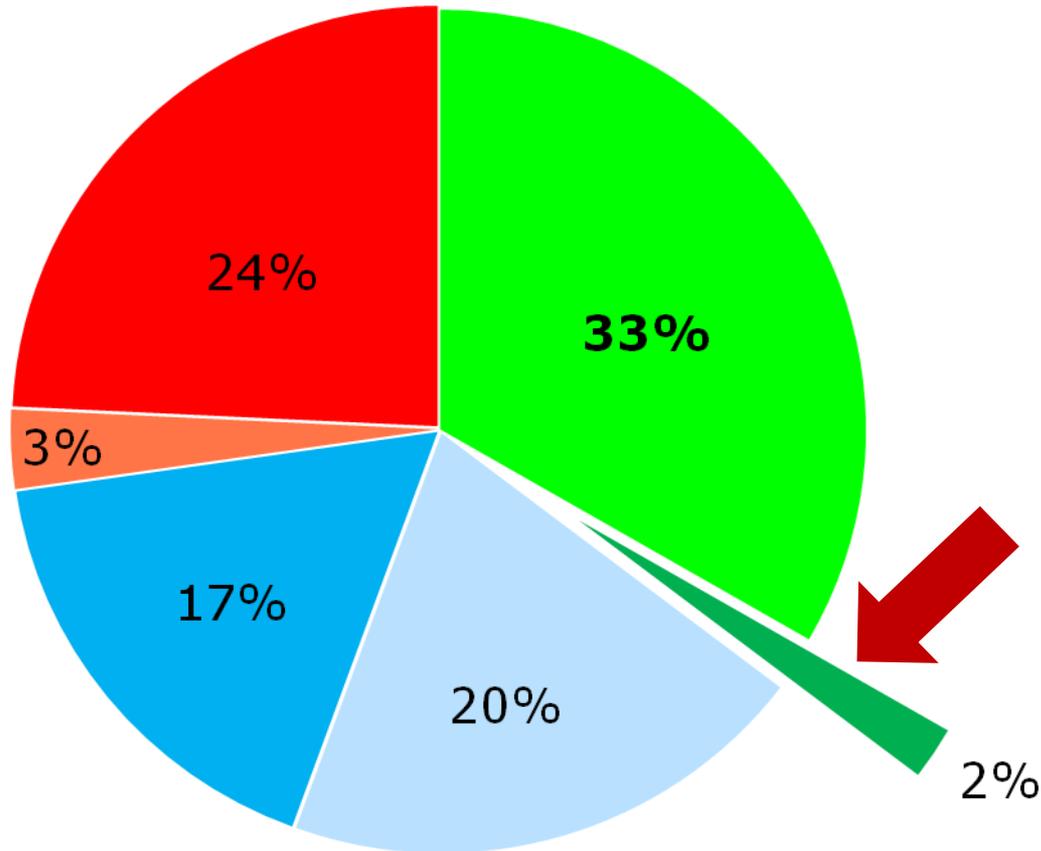


☞ Hoher Grad von **Auswendigwissen** im ZR 10 fast immer **in Kombination mit Ableitungen!**



# Weiter zum Aufbau nicht-zählender Rechenstrategien: Empirische Forschung...

"Strategietypen im ZR bis 10" Ende 1. Schuljahr (Gaidoschik 2010)

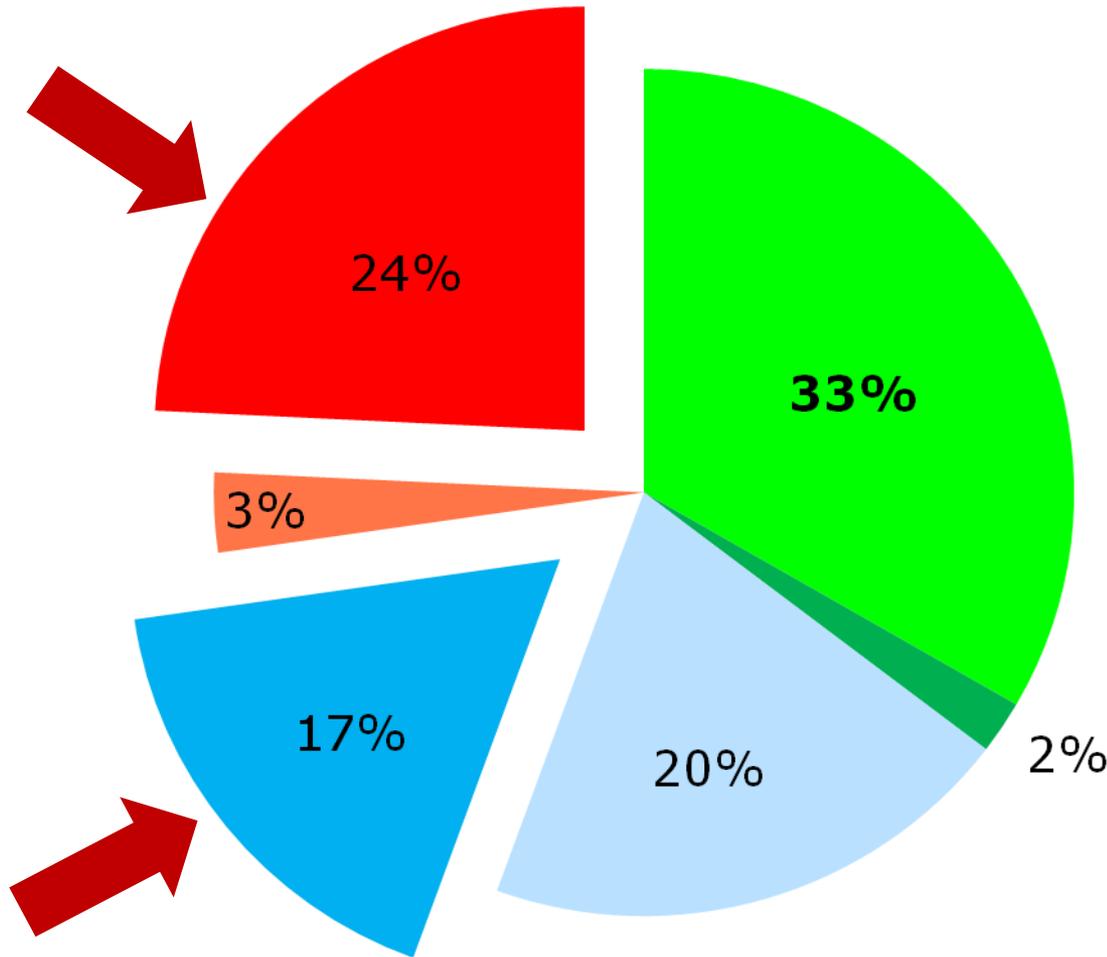


☞ „Reines Auswendigwissen“  
dagegen sehr selten!



# Weiter zum Aufbau nicht-zählender Rechenstrategien: Empirische Forschung...

## "Strategietypen im ZR bis 10" Ende 1. Schuljahr (Gaidoschik 2010)



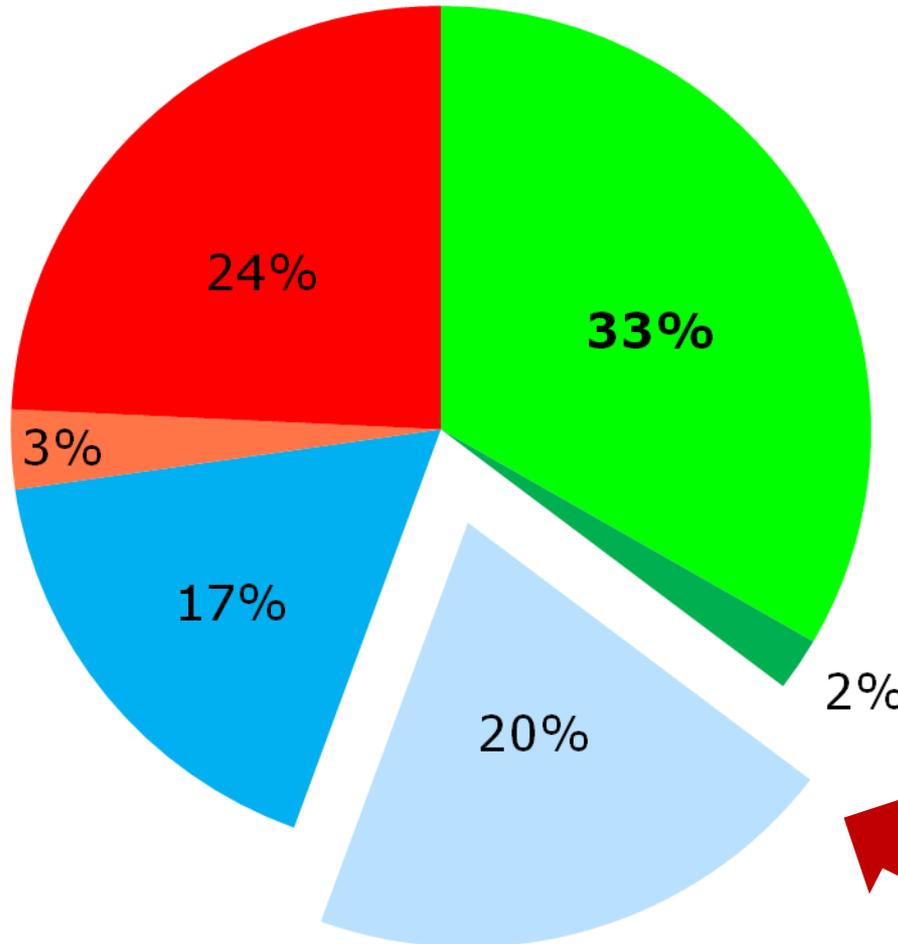
☞ Kinder mit **hohem Anteil an Zählstrategien** nutzen **keine Ableitungen**

☞ Bei diesen Kindern **kaum Zuwachs an Faktenwissen** zwischen Mitte und Ende 1. Schuljahr



# Weiter zum Aufbau nicht-zählender Rechenstrategien: Empirische Forschung...

## "Strategietypen im ZR bis 10" Ende 1. Schuljahr (Gaidoschik 2010)



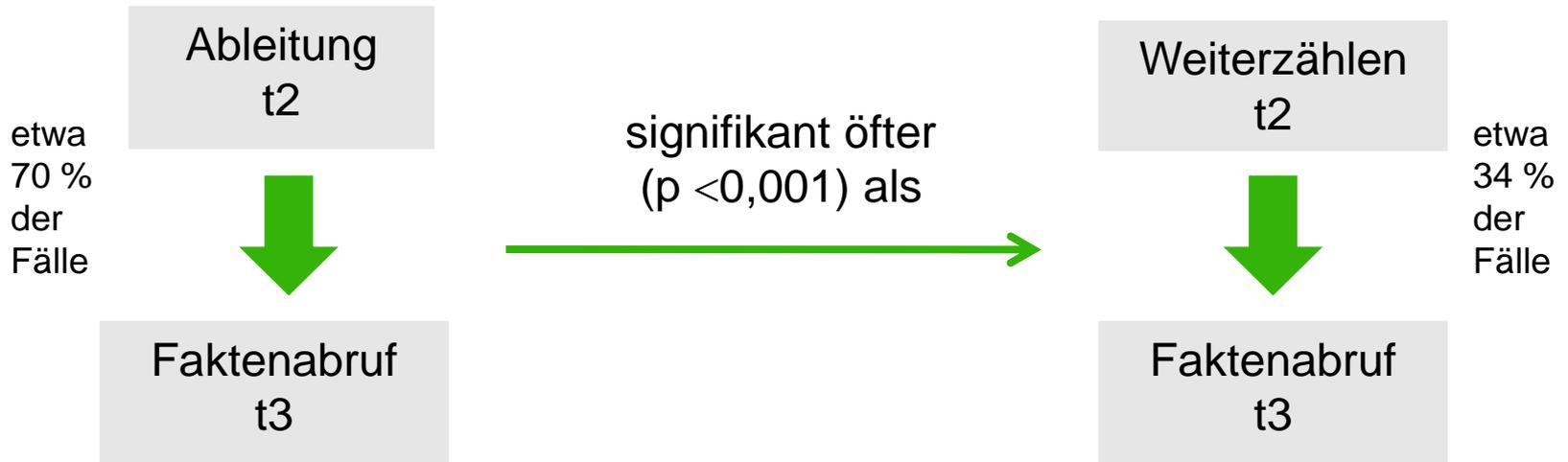
☞ „Misch-Typus“:  
Ableiten, daneben viel  
zählendes Rechnen

☞ Typisch: Ableiten  
dort, „wo es lohnt“

☞ **Wenig Zuwachs  
an Faktenwissen bei  
gezählten Aufgaben**



# Dazu ein weiteres Ergebnis der Studie:





# Fazit aus den angeführten Befunden:

---

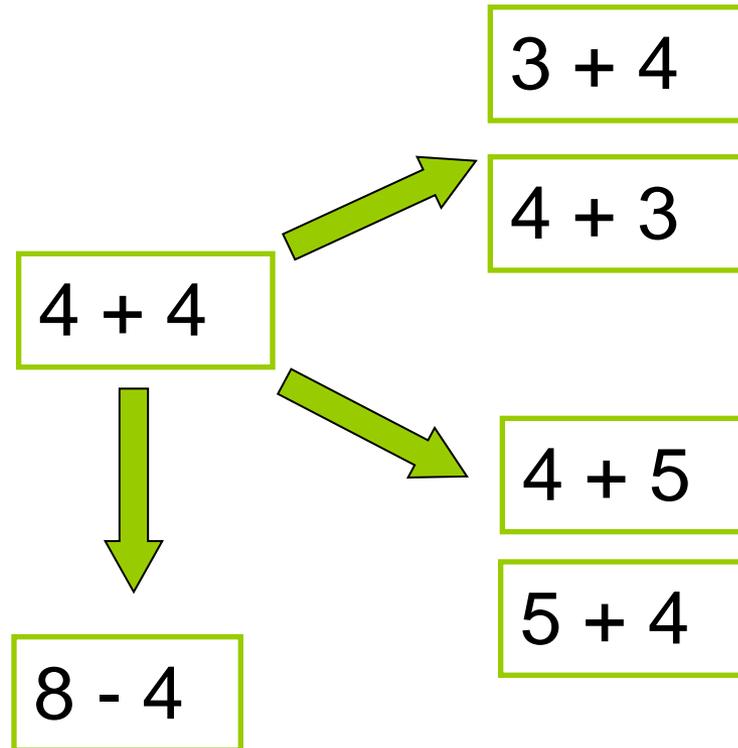
**Starke empirische Hinweise dafür, dass...**

- **Ableiten auch das Automatisieren fördert**

(ähnlich schon Thornton 1978, 1992; Steinberg 1985)



# Auch deshalb: Rechnen von Anfang an gezielt in „operativen Zusammenhängen“!





# Voraussetzung für erfolgreiches Erarbeiten von Ableitungsstrategien:

---

## **Frühes, gezieltes Automatisieren einiger (weniger) Kern-Strukturen und Kern-Aufgaben!**

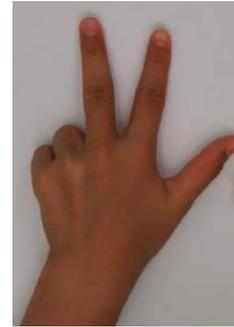
Als Kernaufgaben ausreichend:

- 1 dazu / 1 weg
- „Kraft der Fünf“
- Verdoppelungen

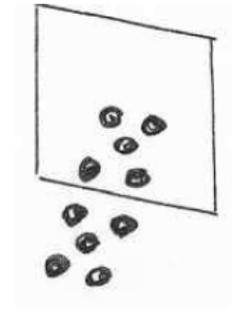


# Früher Schwerpunkt aufs "Verdoppeln"

Verdoppeln mit den Händen  
"Zweite Zeigeweise" trainieren



Verdoppeln mit dem Spiegel  
Vereinbarung: Plättchen auf einen Blick erkennbar



Merkhilfen: Katze, Fliege, Spinne...

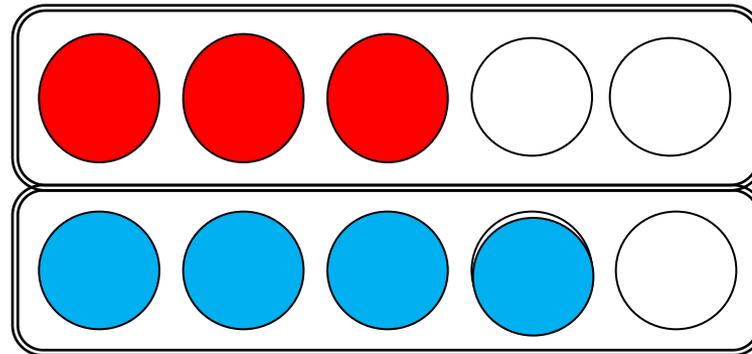


Verdoppelungen bis mind.  $5 + 5$  automatisieren  
Wo nötig: Einsatz der Lernkartei (Details folgen!)



# Zusammenhänge gezielt erarbeiten: Beispiel "Verdoppeln plus 1"

Zum Beispiel mit Rechenschiffchen:



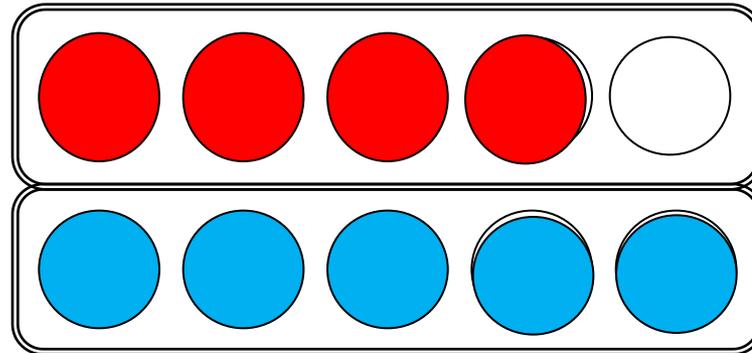
Aus  $3 + 3$  ... mache  $3 + 4$ !

Was verändert sich?



# Zusammenhänge gezielt erarbeiten: Beispiel "Verdoppeln plus 1"

Als Prinzip an allen Anwendungsfällen durchspielen:



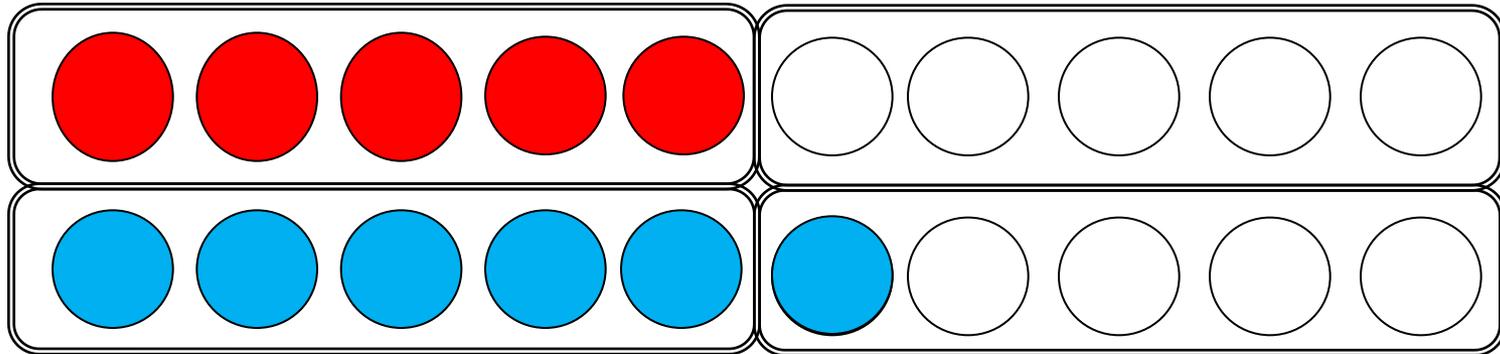
Aus  $4 + 4 \dots$

mache  $4 + 5!$



# Zusammenhänge gezielt erarbeiten: Beispiel "Verdoppeln plus 1"

Als Prinzip an allen Anwendungsfällen durchspielen:



Aus  $5 + 5 \dots$

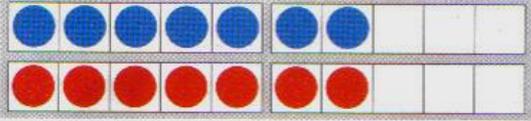
mache  $5 + 6!$

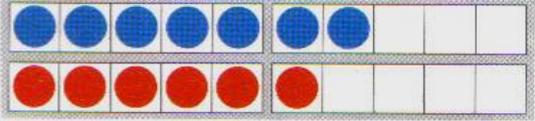


# Einschub: Material & Anschauung – aber wie?

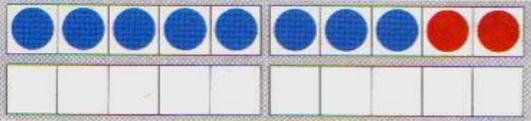
## ..... Von einfachen zu schweren Aufgaben

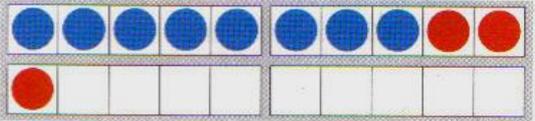
1

Aus   
 $7 + 7 = \dots\dots\dots$

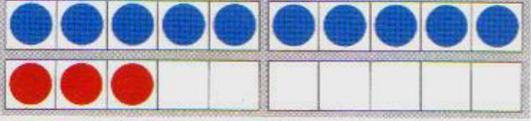
mache   
 $7 + 6 = \dots\dots\dots$

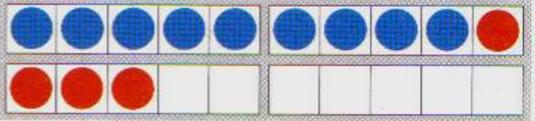
2

Aus   
 $8 + 2 = \dots\dots\dots$

mache   
 $8 + 3 = \dots\dots\dots$

3

Aus   
 $10 + 3 = \dots\dots\dots$

mache   
 $9 + 4 = \dots\dots\dots$

Aus: Wittmann/Müller 2004 Zahlenbuch 1



# Material & Anschauung – aber wie?

- "Begreifen kommt vom Greifen!" – Tut es das? Einfach so?
- Entscheidend: **Qualität** der Handlungen  
– und das, was das Kind dabei **denkt**
- **Zählende Handlungen fördern zählendes Denken!**
- "**Rechnungen legen**" (oder zeichnen!) ist für sich genommen nichts als **zählendes Rechnen!**
- Wesentlich sind die **Reflexion**, das Vergleichen, das Reden über Zusammenhänge, das Ordnen...
- Dauerhaftes "Rechnen mit Materialhilfe" *ohne diese Reflexion* führt zu **Materialabhängigkeit**



# „Gerade die, die es brauchen, wollen das Material nicht nehmen!“

---

## Was tun?

- ☞ *Material für alle* – gerade auch für die „guten“ Rechner!  
Weg vom „Stigma“!
- ☞ Eben nicht als „Ersatz fürs Rechnen“
- ☞ Sondern um  
Operationsverständnis zu entwickeln/festigen/dokumentieren  
nicht-zählende Rechenstrategien zu entwickeln  
anderen zu erläutern, wie man gedacht/gerechnet hat
- ☞ Nicht:  
Erst handeln, dann zeichnen, dann endlich „richtig rechnen“
- ☞ Sondern:  
Ständiges Hin- und Her zwischen diesen „Ebenen“



# Auch deshalb wichtig: Strukturiertes Üben auch OHNE Material...

... zumindest ohne, dass das Material von Anfang an zur Verfügung steht!

$$2 + 2 =$$

$$2 + 3 =$$

$$3 + 3 =$$

$$3 + 4 =$$

$$4 + 4 =$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} =$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} =$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} =$$

Was fällt dir auf?  
Kannst du so weitermachen?

Wenn manche schon früh  
über 10 hinaus  
wollen und können:  
Wunderbar!



# Noch ein wenig mehr zu „schönen Päckchen“

(vgl. Hirt & Wälti 2008)...

Aufgaben nummerieren:

1)  $3 + 3 =$

2)  $4 + 5 =$

3)  $5 + 7 =$

Wie geht es weiter?

Was fällt dir auf? Beschreibe!

Warum ist das so?

Für Überflieger:

Was ist die 10. Aufgabe?

Was ist die 20. Aufgabe?



# Produktives Üben: Kinder produzieren „Schöne Päckchen“...

---

**Erfinde selbst ein schönes Päckchen!**

Schreibe die ersten drei Aufgaben,  
dein/e Nachbar/in setzt fort!



Produktives Üben:  
Kinder produzieren „Schöne Päckchen“...

---

## **Erfinde ein schönes Päckchen!**

Bei der 5. Rechnung soll genau 10 rauskommen!



Produktives Üben:  
Kinder produzieren „Schöne Päckchen“...

---

## **Erfinde ein schönes Minus-Päckchen!**

Die ersten beiden Zahlen sollen sich  
von Zeile zu Zeile immer ändern,

das Ergebnis soll immer gleichbleiben!



## Operativen Zusammenhang deutlich *als Strategie* herausarbeiten

---

### **Fragen stellen wie etwa:**

Wenn ein Kind gerade  $3 + 3$  gerechnet hat:

- Hilft ihm das für  $3 + 4$ ?
- Oder muss es  $3 + 4$  ganz neu überlegen?



# Zusammenhang als Strategie herausarbeiten

---

**Dann etwa auch so:**

Welche leichte Rechnung hilft für **5 + 6** ?



# Zusammenhang als Strategie herausarbeiten

---

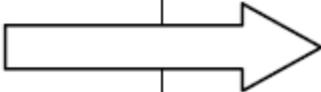
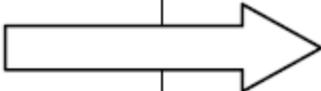
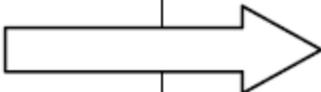
**Dann etwa auch so:**

Welche leichte Rechnung hilft für **3 + 4** ?



# Zusammenhang als Strategie herausarbeiten

## Beispiel für ein Arbeitsblatt:

Leicht für mich:	Hilft mir bei dieser Rechnung:
$5 + 5 = \underline{\quad}$	
	
	



## Übungsformat: Aufgabenkärtchen sortieren

Leicht für mich:

Hilft mir für:

$$6 + 6$$



$$6 + 7$$

$$7 + 6$$

$$4 + 4$$



$$3 + 4$$

$$8 - 4$$

$$3 + 3$$



$$6 - 3$$



# Strategie-Training...

## Übungsformat: Aufgabekärtchen sortieren

Schwer für mich:

$$6 + 7$$

Die hier hilft mir:

$$6 + 6$$



$$8 - 4$$

$$4 + 4$$





# Strategien gezielt erarbeiten: Um diese Aufgaben geht es...

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9



# Nichtzählende Strategien im ZR 20 im Überblick (Details: Gaidoschik 2007):

Plus	Minus
1 mehr mit Tauschaufgabe	1 weniger
2 mehr mit Tauschaufgabe	2 weniger
"Kraft der Fünf" ("Fingerbild")	"Kraft der Fünf" ("Eine Hand weg") (Nachbar von "Eine Hand weg")
Verdoppeln	Halbieren
Verdoppeln plus 1 (plus 2)	(Nachbar von Halbieren)
	Unterschied 1
	Unterschied 2
"Zusammen 10" ("Zahlenfreunde")	Passende Zerlegung finden
Nachbarn der "Zahlenfreunde"	
"Kraft der Zehn"	"Kraft der Zehn"
"Zehnerstopp"	"Zehnerstopp"



# Viele Aufgaben – oder *eine* Strategie: "1 mehr" (inkl. "Tauschaufgabe")

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9



# Tauschaufgaben: Eine Frage der Sichtweise...

... die man mit Kindern gezielt erarbeiten sollte:  
Man sieht nur, was man weiß!

Welche Plus-Aufgaben kann man im Zehnerstreifen sehen?  
Schreibe auf!

The diagram illustrates two ten-frames (Zehnerstreifen) used for visualizing addition problems. Each ten-frame consists of a vertical column of ten squares. The first ten-frame on the left has six blue circles in the top six squares and one white circle in the seventh square. An arrow points from a box containing the text 'Von hier aus angeschaut: 6 + 1' to this ten-frame. To the right of the first ten-frame is a box containing 'Von hier aus angeschaut: \_\_\_ + \_\_\_'. A vertical line separates this from the second ten-frame on the right, which has five blue circles in the top five squares and one white circle in the sixth square. An arrow points from a box containing 'Von hier aus angeschaut: \_\_\_ + \_\_\_' to this ten-frame. To the right of the second ten-frame is another box containing 'Von hier aus angeschaut: \_\_\_ + \_\_\_'.



# Tauschaufgaben: Eine Frage der Sichtweise...

... die man mit Kindern gezielt erarbeiten sollte!

Immer zwei Aufgaben gehören zusammen!

$$\begin{array}{l} 4 + 1 = \underline{\quad} \\ \downarrow \\ 1 + 4 = \underline{\quad} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8 + 1 = \underline{\quad} \\ \downarrow \\ 1 + 8 = \underline{\quad} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6 + 1 = \underline{\quad} \\ \downarrow \\ 1 + 6 = \underline{\quad} \end{array}$$

**Versuche, den Satz richtig fertig zu schreiben:**

Wenn man bei einer Plus-Aufgabe die beiden Zahlen vertauscht, dann

\_\_\_\_\_ .

Finde zu jeder Aufgabe die Plusaufgabe mit vertauschten Zahlen!

$$\begin{array}{l} 1 + 7 = \underline{\quad} \\ \downarrow \\ \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 + 9 = \underline{\quad} \\ \downarrow \\ \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 + 5 = \underline{\quad} \\ \downarrow \\ \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} \end{array}$$



# Strategie "2 mehr" (inkl. "Tauschaufgabe")

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9



# Schon behandelt: Strategie "Handpakete" ("Kraft der Fünf")

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9



# Im ZR 10 schon behandelt: Strategie "Verdoppeln" (ZR 20 folgt)

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9



# Schon behandelt: "Verdoppeln plus 1" (ZR 20 folgt)

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9



# Strategie "Zehnerpärchen", "Zahlenfreunde"

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9



# Strategie "Nachbaraufgaben der Zehnerpärchen"

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9



# Strategie "+10-1"

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9



# Was dann noch bleibt...

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9



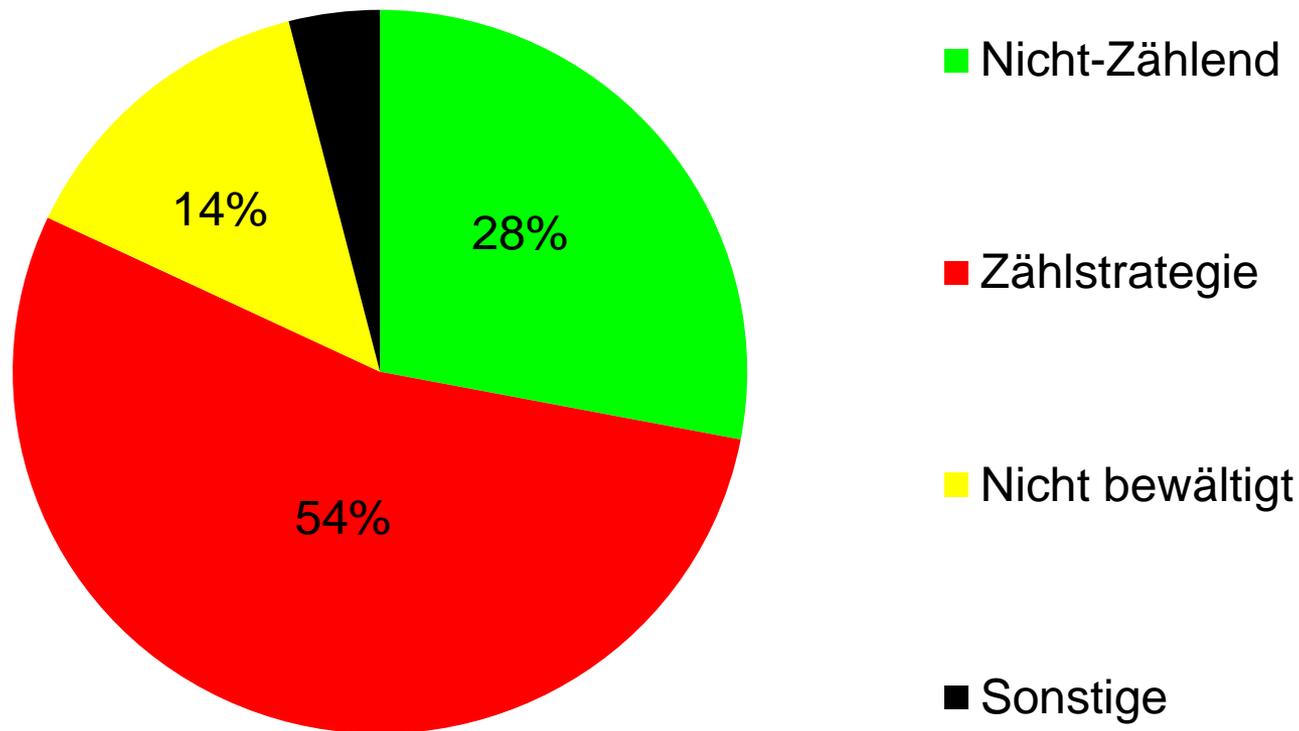
# Rechnen über oder unter den Zehner: Nichts, was prinzipiell anders wäre!

Plus	Minus
1 mehr mit Tauschaufgabe	1 weniger
<b>2 mehr mit Tauschaufgabe</b>	<b>2 weniger</b>
"Kraft der Fünf" ("Fingerbild")	"Kraft der Fünf" ("Eine Hand weg") (Nachbar von "Eine Hand weg")
<b>Verdoppeln</b>	<b>Halbieren</b>
<b>Verdoppeln plus 1 (plus 2)</b>	<b>(Nachbar von Halbieren)</b>
	Unterschied 1
	<b>Unterschied 2</b>
"Zusammen 10/Zahlenfreunde"	Passende Zerlegung finden
<b>Nachbarn der "Zahlenfreunde"</b>	
"Kraft der Zehn"	"Kraft der Zehn"
<b>"Zehnerstopp"</b>	<b>"Zehnerstopp"</b>



# Zehnerübergang nach Rezept: Die Folgen (Regelschule!) (vgl. Gaidoschik 2010)

Strategien bei Aufgaben mit Zehnerübergang am Ende des 1. Schuljahres (im Unterricht behandelt wurde ausschließlich das Verfahren „bis 10 anfüllen, dann weiter“):



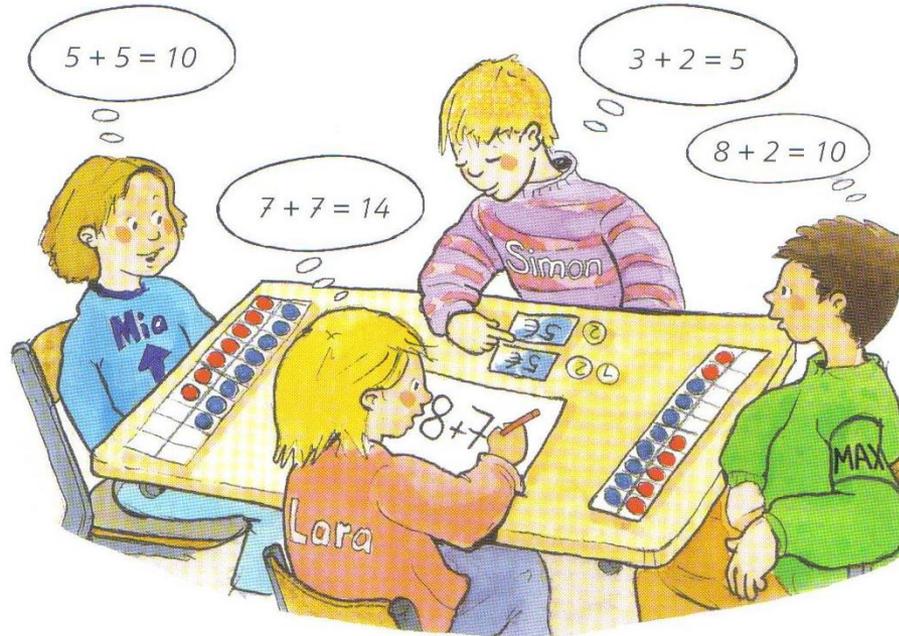
Basis: 139 Kinder, 7 Aufgaben mit ZÜ, 6+6 als Sonderfall ausgenommen



# Viele Wege führen über den Zehner!

1

8 + 7 = .....

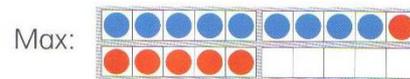
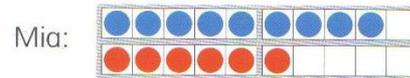


Wie rechnen die Kinder?  
Welche einfachen Aufgaben benutzen sie?



2

Wie rechnen die Kinder?  $9 + 6 = \dots\dots$



Lara rechnet:  $10 + 5 = \dots\dots$

Zahlenbuch 1  
(Wittmann/Müller,  
Klett - ÖBV)

3

Wie rechnest du?

$9 + 7 = \dots\dots$

$6 + 9 = \dots\dots$

$8 + 5 = \dots\dots$

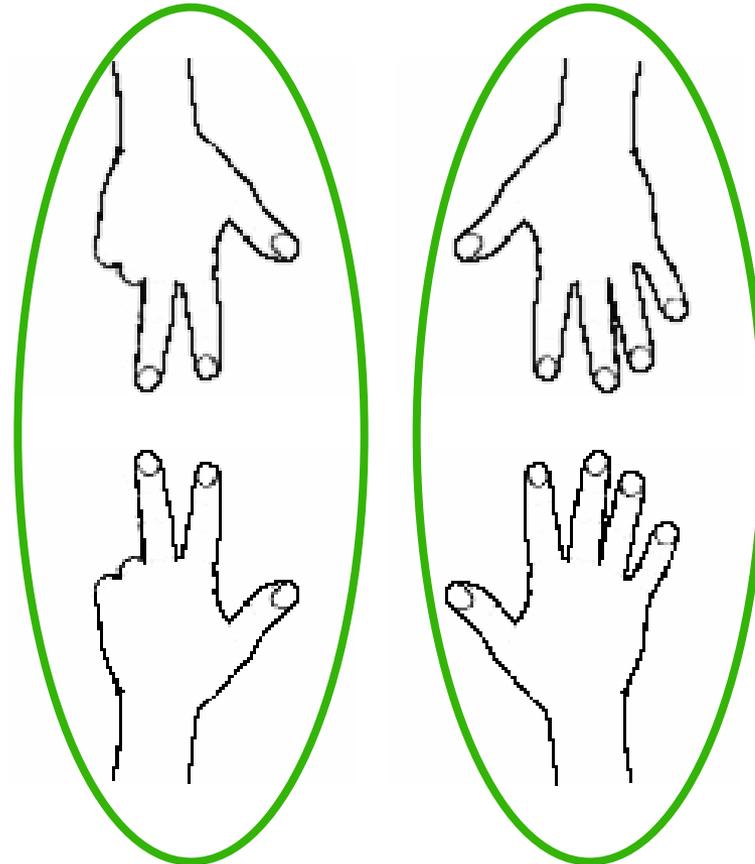
$8 + 6 = \dots\dots$

enbuch 1



# Zehnerübergang mit der „Kraft der Fünf“:

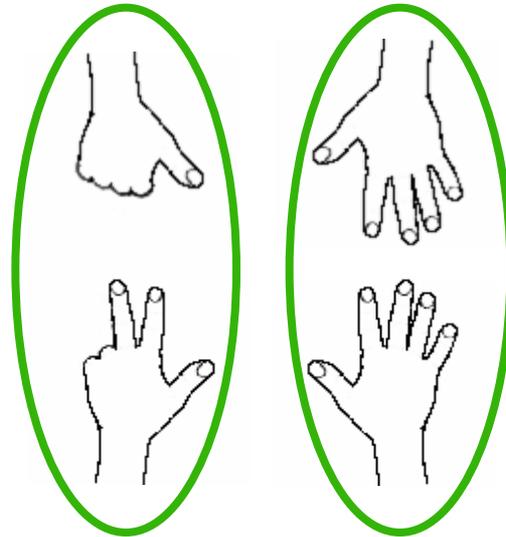
## Am Beispiel $8 + 8$





# Zehnerübergang mit der „Kraft der Fünf“:

**Nicht nur beim Verdoppeln möglich und sinnvoll!**



$$\begin{array}{r} 6 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 5 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{r} 8 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 5 \quad 3 \end{array} = 14$$



# Viele Wege führen "über den Zehner"!

## Nutzen von Zusammenhängen:

$$7 + 7 = 14$$

„1 mehr“

$$7 + 8 = 15$$



$$7 + 10 = 17$$

„1 weniger“

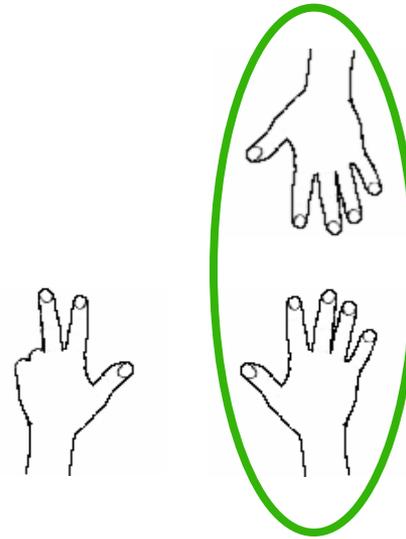
$$7 + 9 = 16$$



# Viele Wege führen "über den Zehner"!

Aber natürlich *auch*  
„klassisch“ mit „Auffüllen  
bis 10“ („Zehnerstopp“...)

... aber nicht „nach Rezept“,  
sondern aus Einsicht  
in den Vorteil!



$$\begin{array}{r} 5 + 8 = 13 \\ \quad \swarrow \searrow \\ \quad 5 \quad 3 \end{array}$$

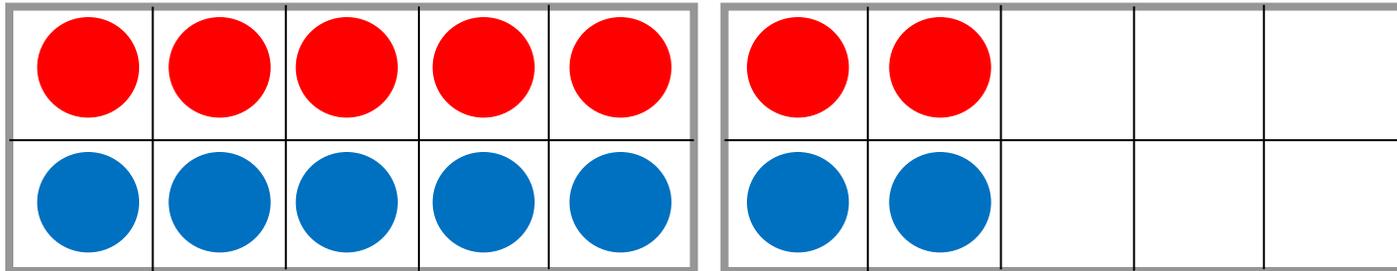




# Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz von Rechenschiffchen & Co.

Lege  $7 + 7$  mit zwei Farben!

Lege so, dass man **auf einen Blick** sehen kann, wie viel das ist!

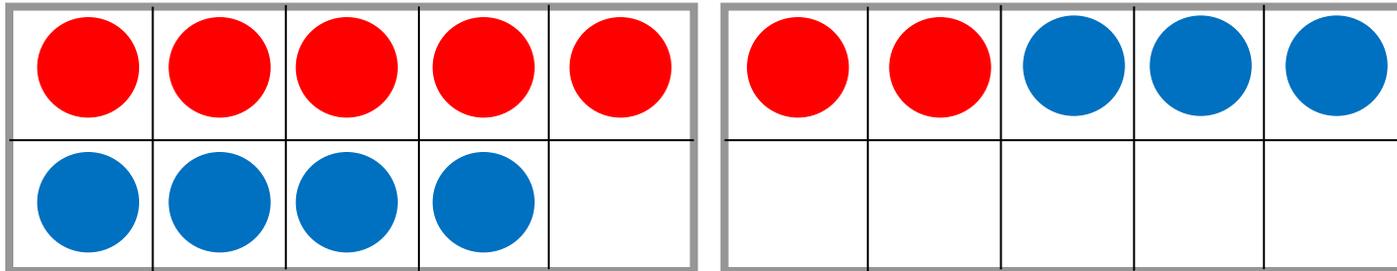




# Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz von Rechenschiffchen & Co.

Lege  $7 + 7$  mit zwei Farben!

Lege so, dass man **auf einen Blick** sehen kann, wie viel das ist!

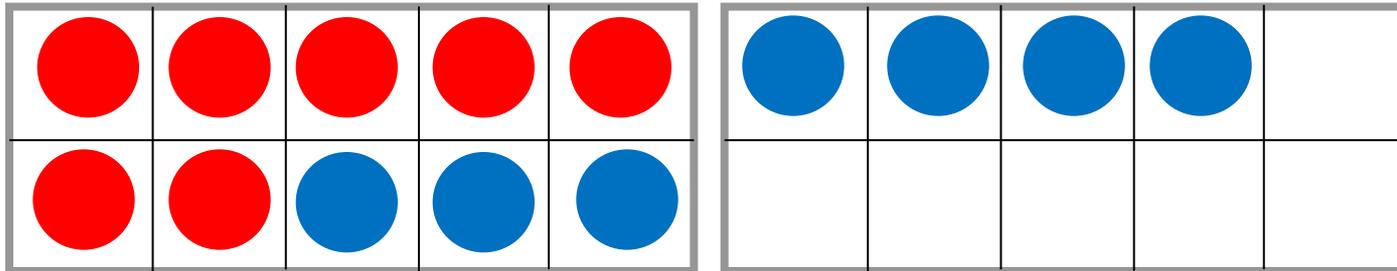




# Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz von Rechenschiffchen & Co.

Lege 7 + 7 mit zwei Farben!

Lege so, dass man **auf einen Blick** sehen kann, wie viel das ist!





# Das Wichtigste am Materialeinsatz: Vorstellungs-Hilfe, nicht *Ersatz*!



Schipper 2005, Karte 11



# Das Wichtigste am Materialeinsatz: Vorstellungs-Hilfe, nicht *Ersatz*!

**Rechne die Aufgaben mit verbundenen Augen!**

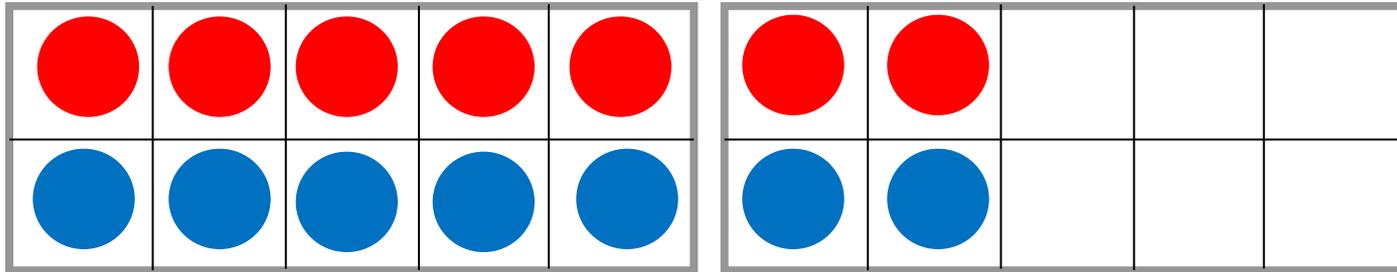


Schipper 2005



# Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz von Rechenschiffchen & Co.

**Lege  $7 + 7$  mit zwei Farben!**

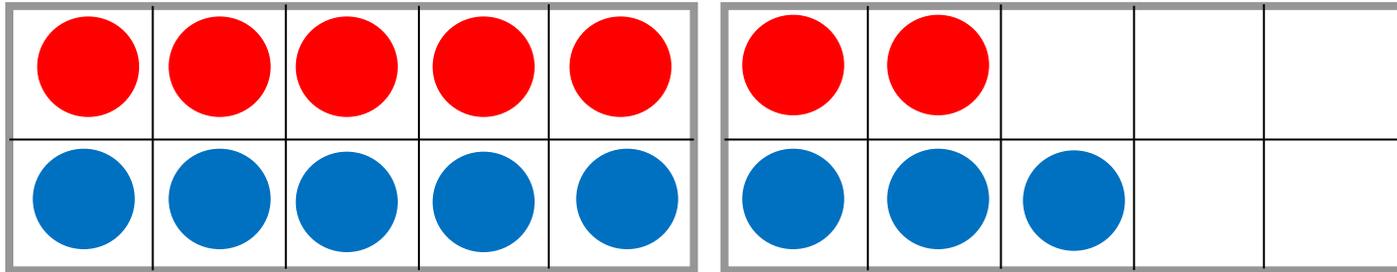


Kannst du daraus  $7+8$  machen?



# Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz von Rechenschiffchen & Co.

**Lege  $7 + 7$  mit zwei Farben!**



Was hat sich geändert?

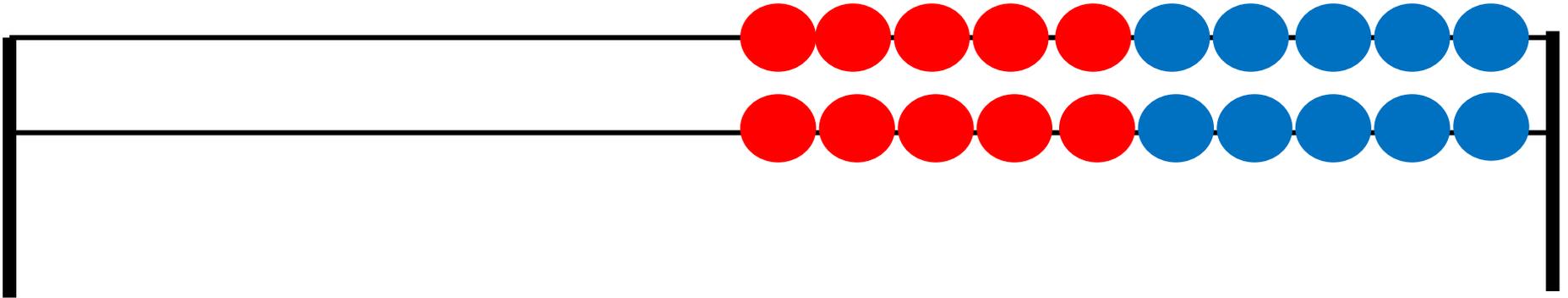
Was hat  $7+7$  und  $7+8$  miteinander zu tun? ...



# Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz des Rechenrahmens

**Zeige  $7 + 10$ !**

Versuche es, ohne Kugeln einzeln abzuzählen!

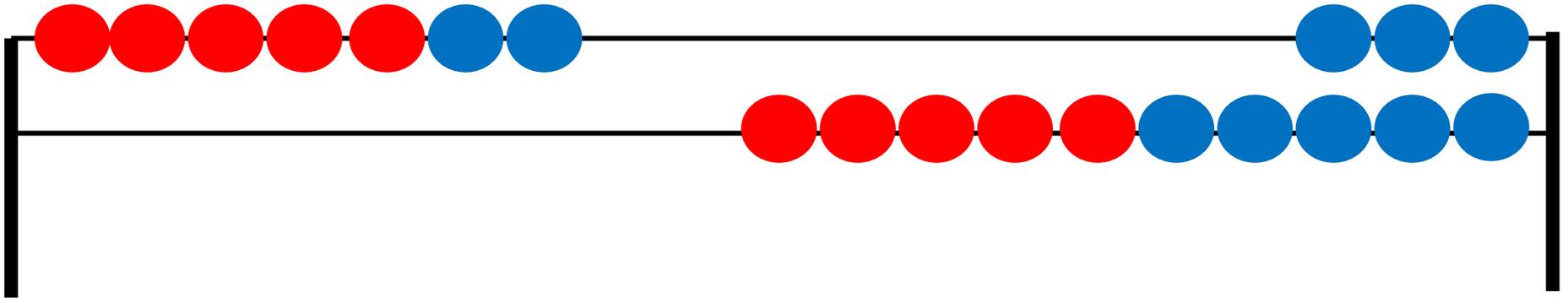




# Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz des Rechenrahmens

**Zeige  $7 + 10$ !**

Versuche es, ohne Kugeln einzeln abzuzählen!

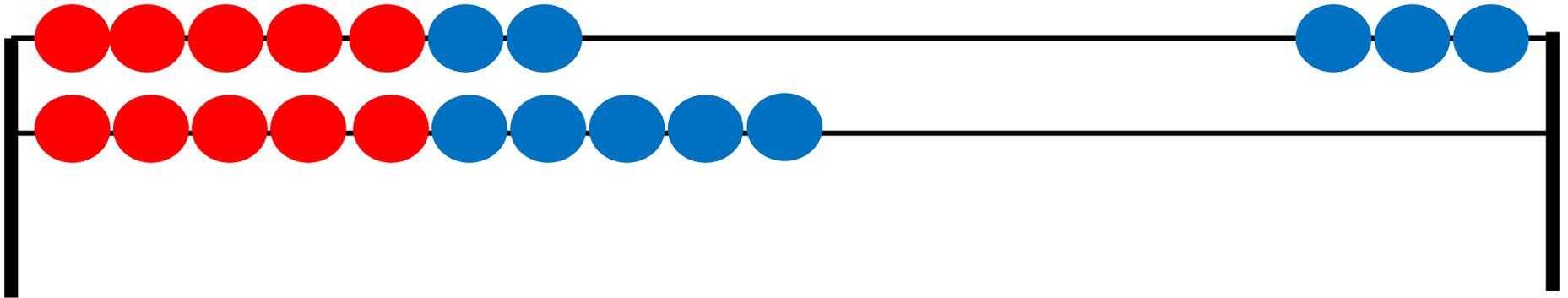




# Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz des Rechenrahmens

**Zeige  $7 + 10$ !**

Versuche es, ohne Kugeln einzeln abzuzählen!

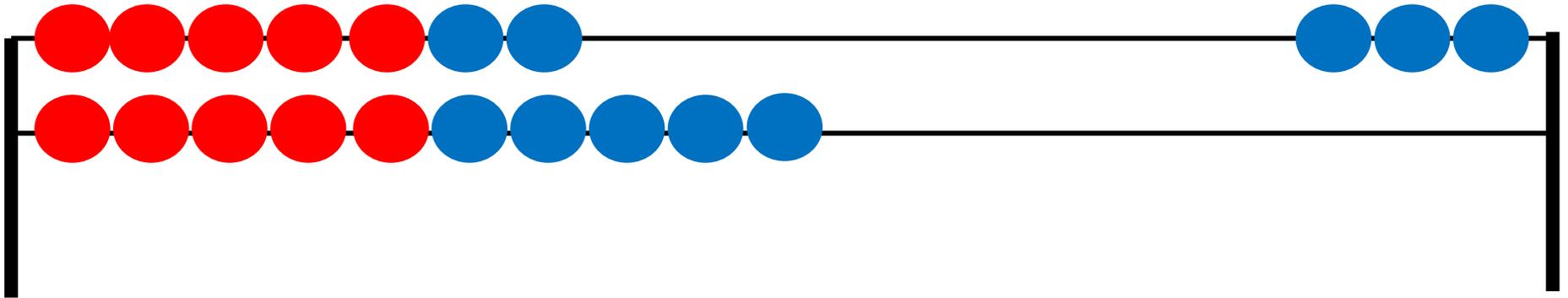




# Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz des Rechenrahmens

**Zeige  $7 + 10$ !**

Wie kannst du daraus  $7 + 9$  machen?

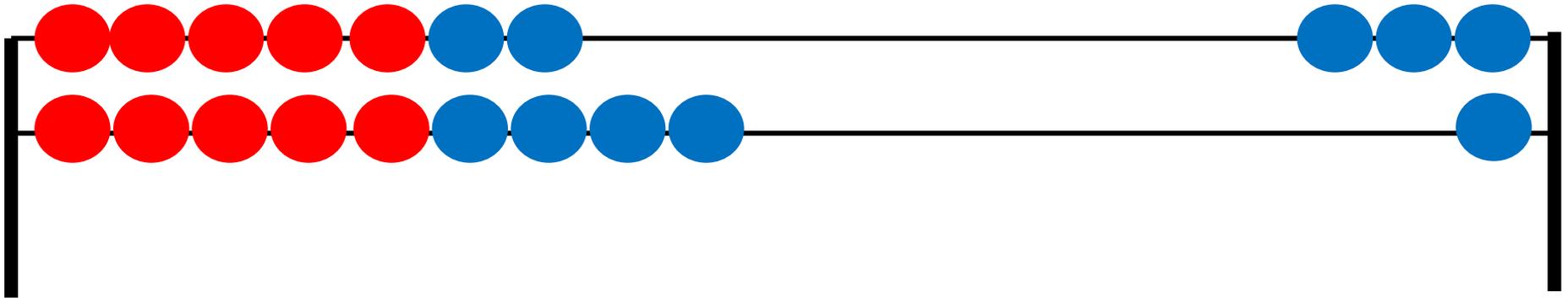




# Material für Zehnerüberschreitung: Einsatz des Rechenrahmens

**Zeige  $7 + 10$ !**

Wie kannst du daraus  $7 + 9$  machen?



Was ändert sich von  $7 + 10$  auf  $7 + 9$ ?



# Der "Zehnerstopp": Eine Erleichterung, wenn ...

---

- Ergänzen bis 10 „im Schlaf“ abläuft
- Zerlegen vollständig automatisiert, sodass „zweite Portion“ immer schon mitgedacht
- Rechnungen wie  $10 + 3$  „babysch“ sind
- Der Ablauf all dieser Rechenschritte problemlos überblickt wird



# Der "Zehnerstopp": Viele Voraussetzungen ...

---

... die viele Kinder Ende der 1. Volksschule (und manche noch viel später) nicht abgesichert haben!

## Die Folge:

- Zählendes Rechnen...
- ... welches bald zur Gewohnheit wird ...
- ... und doch eine Sackgasse darstellt!



# "Zehnerstopp": Erarbeitung früher oder später sicher sinnvoll – aber wie?

## „Warum denn ausgerechnet „zuerst bis 10“?“

Rechnungen zum Sortieren vorlegen:

$10 + 4$        $7 + 9$

$6 + 7$        $10 + 3$

$10 + 5$        $4 + 8$

$30 + 6$        $24 + 9$

$40 + 2$        $58 + 6$

$83 + 9$        $60 + 3$

\*

Leichte Rechnung oder schwere Rechnung ?

\* Erfahrungsgemäß wird der Vorteil des Zehnerstopp-Verfahrens manchen Kindern erst bei Anwendung im ZR bis 99 so richtig klar. Arbeit an Rechenstrategien sollte ohnedies als „work in progress“ betrachtet werden: Eine Strategie, die im ersten Schuljahr vielleicht noch nicht angenommen wurde, besitzt vielleicht im zweiten Schuljahr unter geänderten Voraussetzungen eine erhöhte Attraktivität!



# Wenn "Zehnerstopp" erarbeitet wird: Auf welche Weise?

**Den Zehner als Zwischenstation nutzen:**

Rechenvorteile erkennen und „elegant“ rechnen!

$$7 + 5 + 3 = 15$$

10

$$38 + 6 + 2 = 46$$

40



# Wenn "Zehnerstopp" erarbeitet wird: Auf welche Weise?

## Sinnvoller Einstieg ins „Zehnerstopp“-Verfahren:

Zuerst die  
Handzerlegungen

$$\begin{array}{c} 5 + 8 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 5 \quad 3 \end{array}$$

Ebenso:  $5 + 6$   
 $5 + 7$   
 $5 + 9$

bzw., s.o.:  $35 + 6$   
 $65 + 8 \dots$

Dann vielleicht: Mit  
„vertauschten“ Händen!

$$\begin{array}{c} 7 + 8 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3 \quad 5 \end{array}$$

Ebenso:  $6 + 9$   
 $8 + 7$   
 $9 + 6$

bzw., s.o.:  $34 + 9$   
 $48 + 7 \dots$



# Erarbeitung nichtzählender Strategien im ZR 20: Subtraktionsstrategien

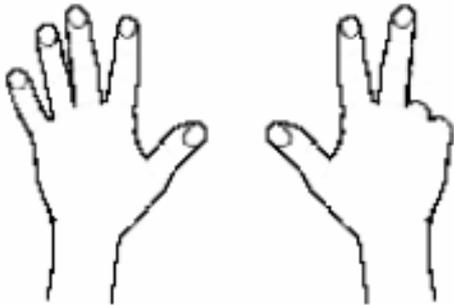
Plus	Minus
1 mehr mit Tauschaufgabe	1 weniger
2 mehr mit Tauschaufgabe	2 weniger
"Kraft der Fünf" ("Fingerbild")	"Kraft der Fünf" ("Eine Hand weg") (Nachbar von "Eine Hand weg")
Verdoppeln	Halbieren
Verdoppeln plus 1 (plus 2)	(Nachbar von Halbieren)
	<b>Unterschied 1</b>
	<b>Unterschied 2</b>
"Zusammen 10" ("Zahlenfreunde")	<b>Passende Zerlegung finden</b>
Nachbarn der "Zahlenfreunde"	
"Kraft der Zehn"	"Kraft der Zehn"
"Zehnerstopp"	"Zehnerstopp"



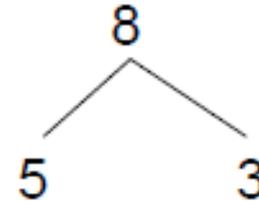
# Passende Zerlegung/Umkehraufgabe: Auch das eine Frage der Sichtweise...

**... die man mit Kindern gezielt erarbeiten sollte!**

So zeige ich 8 Finger:



So kann man das aufschreiben:



So kann man damit rechnen:

$$5 + 3 = \underline{\quad}$$

$$8 - 5 = \underline{\quad}$$

$$3 + 5 = \underline{\quad}$$

$$8 - 3 = \underline{\quad}$$

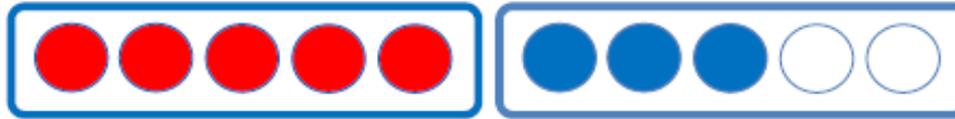
**Probier' dasselbe mit 7 und mit 9!**



# Umkehraufgaben: Auch das eine Frage der Sichtweise...

**... die man mit Kindern gezielt erarbeiten sollte!**

Plättchen in Rechenschiffchen: Kannst du hier „Rechnungen sehen“?



Ich sehe hier:  $5 + 3 = 8$  und auch  $3 + 5 = \underline{\quad}$

Dann sehe ich noch  $8 - 5 = \underline{\quad}$  und auch  $8 - 3 = \underline{\quad}$

**Jetzt du! Schreibe auf, welche Rechnungen du hier siehst:**




---



---

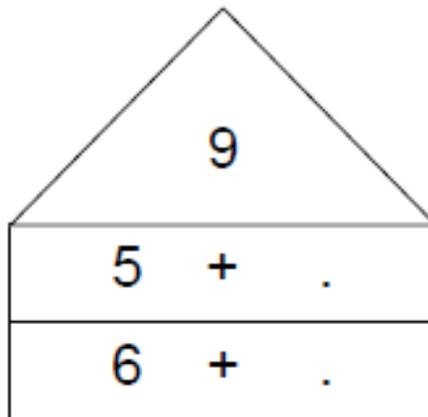


# Umkehraufgaben: Auch das eine Frage der Sichtweise...

... die man mit Kindern gezielt erarbeiten sollte!

Wer zerlegen kann, kann auch plus und minus rechnen!

Zerlegungen



Leichte Rechnungen mit diesen Zerlegungen:

$5 + \underline{\quad} = 9$	$9 - 5 = \underline{\quad}$
$\underline{\quad} + \underline{\quad} = 9$	$9 - \underline{\quad} = \underline{\quad}$

$6 + \underline{\quad} = 9$	$9 - 6 = \underline{\quad}$
$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$	$\underline{\quad} - \underline{\quad} = \underline{\quad}$



# Umkehraufgaben: Auch das eine Frage der Sichtweise...

**Welche Zerlegung passt für diese Minus-Aufgaben?**

$$9 - 8$$



$$7 - 4$$



$$10 - 7$$





# Ein wichtiger, *eigener* Schritt: Strategieauswahl trainieren!

**Sinnvolle Übung (immer wieder einmal):**  
Aufgaben nach Strategien sortieren

*um 1  
mehr*

*um 2  
mehr*

*Finger-  
bild*

*Doppelt  
plus 1*

$4 + 3$

$3 + 5$

$6 + 2$

$2 + 7$

$2 + 3$

$4 + 5$

$1 + 8$

$3 + 4$



# Ein wichtiger, *eigener* Schritt: Strategieauswahl trainieren!

**Sinnvolle Übung (immer wieder einmal):**  
Aufgaben nach Strategien sortieren

*um 1  
mehr*

$$1 + 8$$

*um 2  
mehr*

$$2 + 7$$

$$6 + 2$$

*Finger-  
bild*

$$3 + 5$$

$$4 + 5$$

*Doppelt  
plus 1*

$$4 + 3$$

$$2 + 3$$

$$3 + 4$$



# Automatisieren: Noch einmal zum Ziel...

---

"Am Ende des ersten Schuljahres sollten möglichst alle Kinder alle Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 10 [...] auswendig wissen."

SCHIPPER 2005, S. 7



# Der Weg zu diesem Ziel: *Strategien* automatisieren, nicht Einzelaufgaben!

$$3 + 3 = ?$$

$$3 + 4 = ?$$

$$3 + 3 = 6$$

$$3 + 4 = 7$$





# Strategien automatisieren

$$3 + 4 = ?$$

$$3 + 3 = 6$$

$$3 + 4 = 7$$





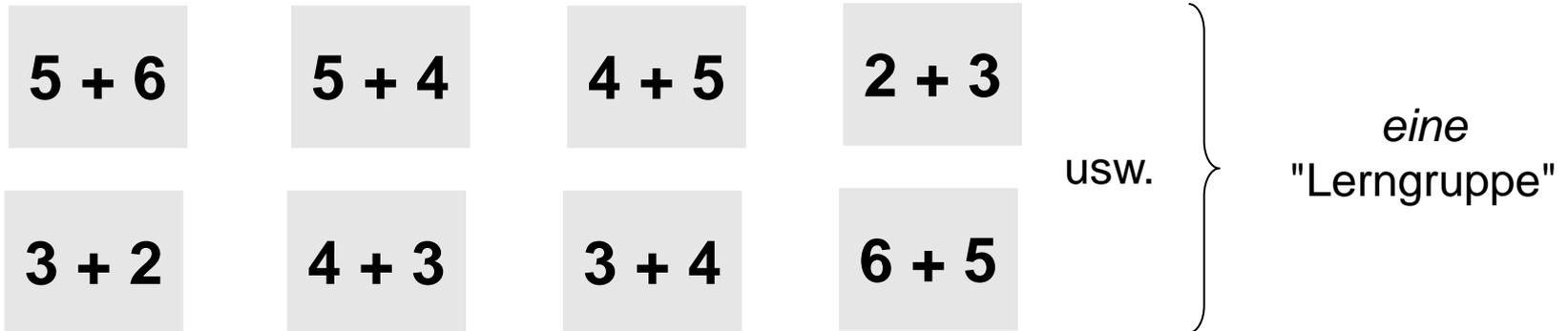
# Arbeiten mit einer Lernkartei im Klassenverband am Beispiel 1x1

---





# Strategien automatisieren

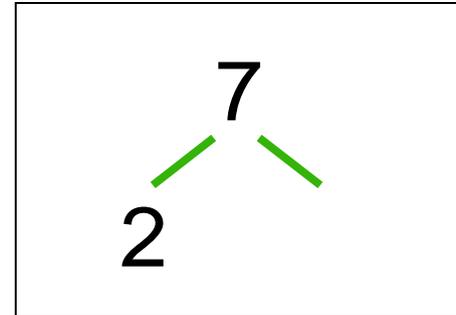
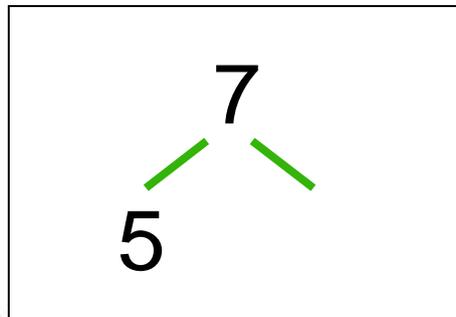
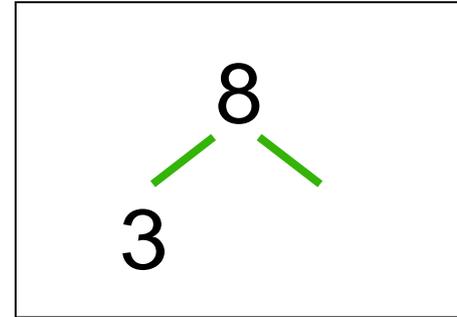
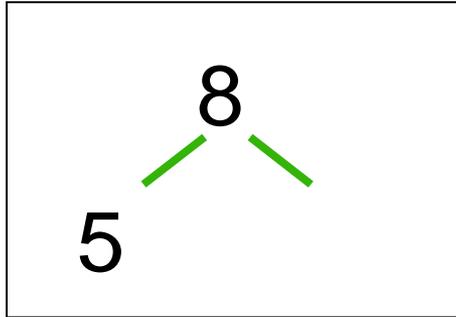


- ☞ Jedes Kind erarbeitet eine Gruppe in seinem Tempo.
- ☞ Erst wenn eine Gruppe (weitgehend) automatisiert, nimmt Kind neue Gruppe dazu.



# Auch beim Zahlenzerlegen: Automatisieren in „Strategiegruppen“

## Gruppe „Handpakete“:



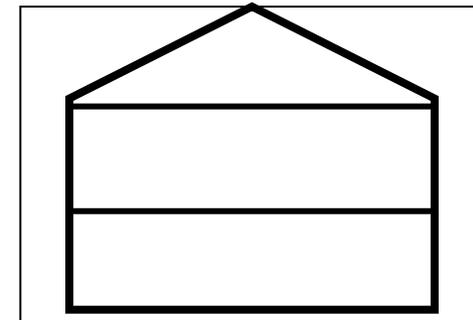
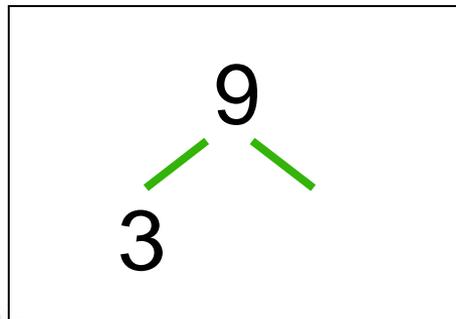
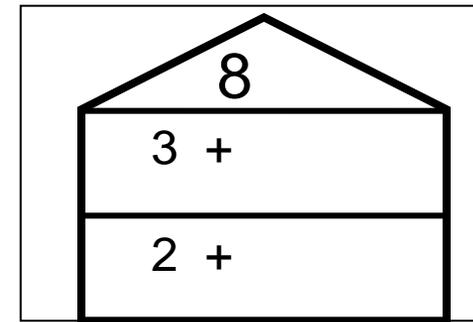
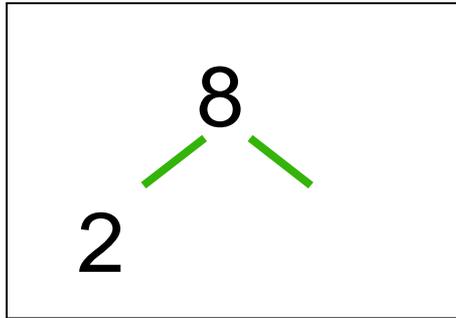
USW.





# Auch beim Zahlenzerlegen: Automatisieren in „Strategiegruppen“

## Gruppe „Nachbarn der Handpakete“:



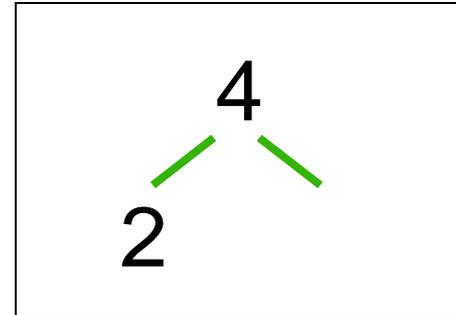
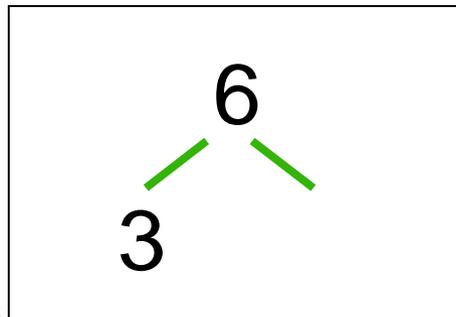
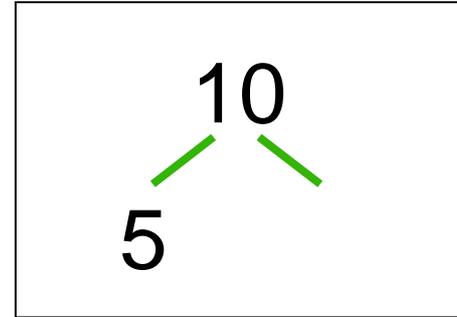
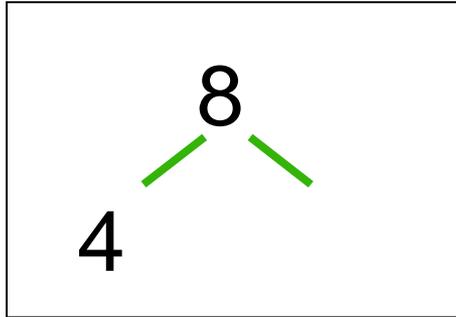
USW.





# Auch beim Zahlenzerlegen: Automatisieren in „Strategiegruppen“

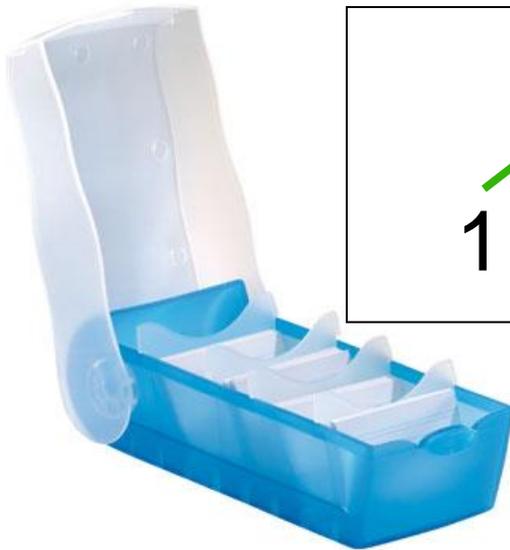
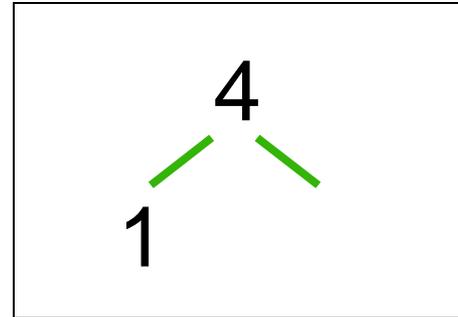
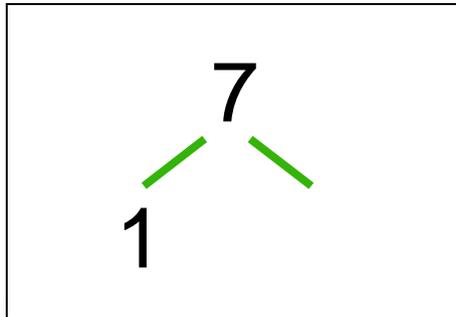
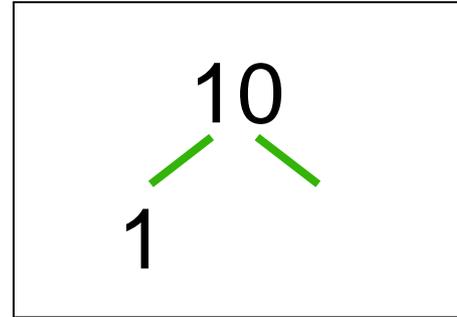
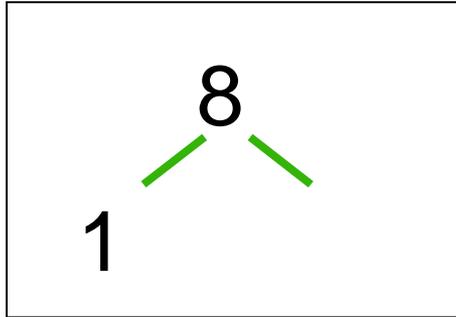
## Gruppe „Hälften“:





# Auch beim Zahlenzerlegen: Automatisieren in „Strategiegruppen“

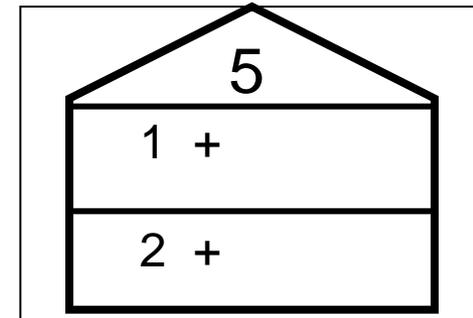
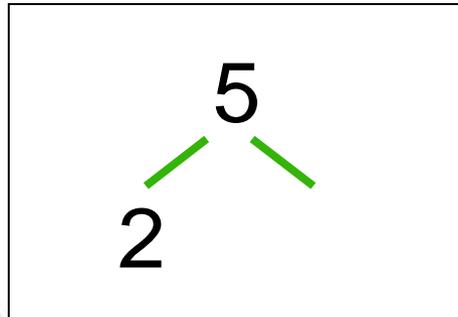
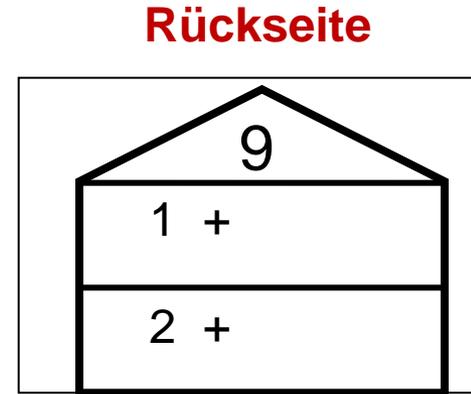
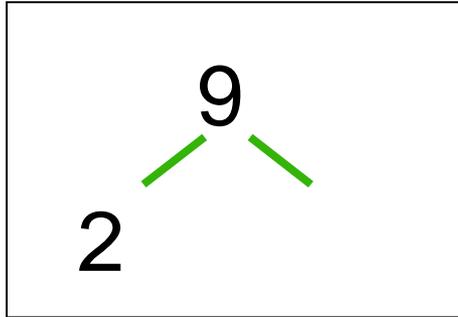
## Gruppe „1 und ?“:





# Auch beim Zahlenzerlegen: Automatisieren in „Strategiegruppen“

Gruppe „2 und ?“:



USW.





# Details zum Erarbeiten von nicht zählenden Strategien im ZR 10 und 20:

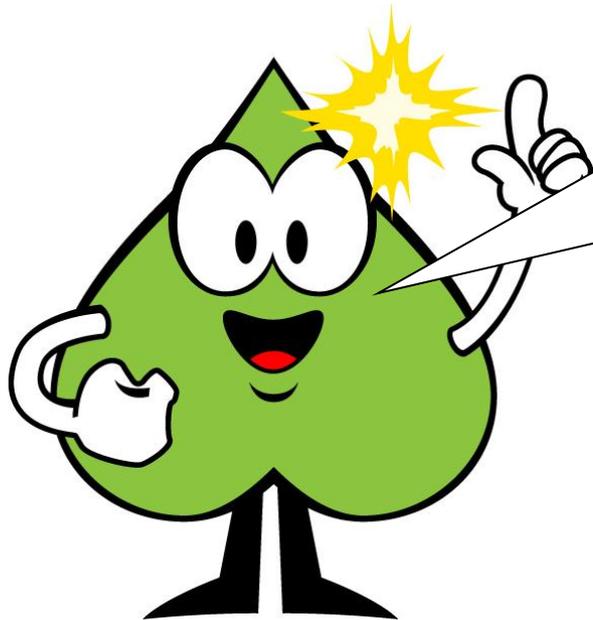
Gaidoschik, Michael (2007):  
Rechenschwäche vorbeugen.  
Erstes Schuljahr:  
vom Zählen zum Rechnen.  
Wien: g&g

**Dasselbe Buch** bei Persen:  
„Rechenschwäche verstehen“

Titel- und Cover-Änderung gegen  
deklarierten Willen des Autors!

Weitere Literaturhinweise auf  
[www.recheninstitut.at](http://www.recheninstitut.at)





Vielen Dank für  
Ihre  
Aufmerksamkeit!

