



## Sachinfo Modul 3.2: „Mathe in den Kopf?!“ – Wie geht das eigentlich?

Ziel des heutigen Mathematikunterrichts in der Grundschule ist, dass jedes Kind sicher Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren lernt. Dabei muss jeder Schüler die Zeit und die Möglichkeit erhalten, eine tragfähige Zahl- und Operationsvorstellung aufzubauen. Beide bilden die Grundlage, um später flexibel rechnen zu können.

**Zahlvorstellung** entwickeln heißt:

- Beziehungen zwischen Zahlen kennen: Positionen von Zahlen richtig bestimmen können, Vorgänger, Nachfolger, Nachbarzehner kennen.
- Bedeutung von Zahlen kennen: Zahlen richtig lesen können, wissen, dass sich z.B. die Zahl 12 aus einem Zehner und zwei Einern zusammensetzt.

**Operationsvorstellung** z.B. für die Addition entwickeln heißt:

- Wissen, was das „Plus“ in unterschiedlichen Kontexten bedeuten kann: *dazutun, dazukommen, auftauchen, hinzukaufen, einfüllen, anzünden, aufkleben, herzaubern, dazulegen, geschenkt bekommen,...*
- Sowohl eine Vorstellung des Hinzufügens als auch eine Vorstellung des Zusammenfügens entwickeln.

Mathematik ist darüber hinaus viel mehr als nur Rechnen. Mathematik ist genauso Entdecken, Begründen und Beschreiben. Das Kind soll z.B. Aufgaben des kleinen  $1+1$  nicht bloß auswendig lernen, sondern auch verstehen und begründen können, warum es so rechnet. Das kann in einem Unterricht erreicht werden, der den individuellen Entwicklungsprozess des Kindes berücksichtigt.

### Mathematik in den Kopf?! – Versuch einer Prozessbeschreibung

Handeln	„Geschicht“ Handeln und innere Bilder von mathematischen Strukturen im Kopf aufbauen	Ablösen vom Material und flexibel im Kopf rechnen
<p>Im Unterricht wird an das angeknüpft, was das Kind schon kann.</p> <p>Einige Kinder handeln anfangs noch mit den Fingern oder anderen Objekten. Andere haben bereits Einblicke in mathematische Strukturen und rechnen kleine Aufgaben teilweise im Kopf.</p>	<p>Das Kind lernt Handlungen zunehmend „geschickt“ auszuführen.</p> <p>Durch Beobachtung, Handlung und Reflektion lernt das Kind z.B. Mengen mithilfe von Bündeln und Abzählen in 2-er, 5er, 10er Schritten „schlau“ zu ermitteln. Es lernt auch einen Term auf didaktisches Material (z.B. Rechenrahmen) zu übertragen und so innere Bilder von Strukturen und Mustern aufzubauen. Dabei wird es angehalten über seine Handlungen zu sprechen.</p>	<p>Das Kind ist in der Lage flexibel im Kopf zu rechnen.</p> <p>Es greift dabei nicht mehr auf didaktische Materialien zurück.</p> <p>Es hat mittlerweile innere Vorstellungsbilder von Zahlen und Operationen aufgebaut. Sie helfen ihm ohne Abzählen einzelner Mengen ein Ergebnis zu berechnen.</p> <p>Es kann im Nachhinein erklären, wie es gerechnet hat.</p>

Der Prozess von der Aneignung innerer Bilder bis zum flexiblen Rechnen im Kopf, geschieht selten linear, wie das Modell oben zu suggerieren scheint. Kinder machen Fortschritte und auch mal wieder Rückschritte und bilden Vorstellungsbilder in sehr unterschiedlichen Zeitfenstern aus.



Werden Kinder zu früh aufgefordert, sich von Darstellungsmitteln zu lösen und im Kopf zu rechnen, wird ihnen die Chance genommen, mathematische „wenn-dann-Beziehungen“ und Operationen zu erforschen. Sie rechnen dann weiterhin „zählend“ und haben oft keine Vorstellung davon, was sie beim Rechnen eigentlich tun.

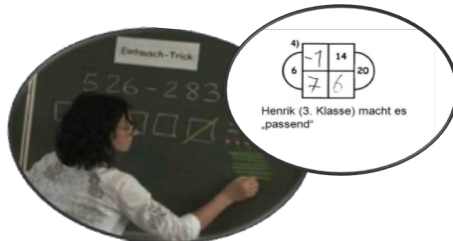

Sie greifen dann gezwungenermaßen auf Darstellungsmittel zurück, die ihnen natürlich gegeben sind. Zum Beispiel auf ihre Finger oder andere Objekte, die sie bei sich haben wie z.B. Stifte in ihrem Mäppchen. Dabei spricht erst einmal nichts gegen das Fingerrechnen, denn ein geschickter Einsatz von Fingern kann Kindern helfen, sicher und schlau zu rechnen. Unreflektiert verführen die Finger oft zum zählenden Rechnen, was häufig auch sehr fehleranfällig ist.

„Langfristig nämlich werden sich Erfolge nur einstellen, wenn Arbeitsmittel und Veranschaulichungen bewusst ausgewählt und eingesetzt werden und sie den Kindern so lange wie nötig zur Verfügung stehen.“ (Scherer 1999, 23).

## Darstellungsformen und Darstellungsmittel

Mathematik kann mithilfe von verschiedenen **Darstellungsformen** (Handlungen, Bilder, Symbole und Sprache) und **Darstellungsmitteln** (didaktische Materialien, Alltagsmaterialien, Zeichnungen, Erklärungen und Begründungen) im Unterricht „begreifbar“ werden. Kinder nutzen Darstellungsmittel so lange, bis sie in der Lage sind, geschickt im Kopf zu rechnen. Einige Beispiele:

Darstellungs- Formen	Darstellungsmittel	Beispiele aus dem Unterricht
<p><b>Handlung</b> (Handeln in Situationen und mit Material)</p>	<p>Handlungen werden z.B. ausgeführt zu Termen oder Gleichungen und zu Rechengeschichten.</p> <p>Häufig werden dazu didaktische Materialien benutzt (20er Feld und Plättchen, Rechenrahmen, ...). Handlungen können aber auch spielerisch dargestellt werden (Rollenspiel).</p> <p>Hier geht es nicht nur darum, selbst aktiv zu sein und das eigene Handeln zu beobachten und zu reflektieren. Es geht auch darum, passiv zu handeln. D.h., die Handlung anderer zu beobachten und nachzuvollziehen.</p>	
<p><b>Bild</b> (Bilder malen und deuten)</p>	<p>Bilder werden selbst gemalt oder skizziert um</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- einen den Sachverhalt einer Rechengeschichte darzustellen (z.B. Kinderzeichnung),</li> <li>- Mengen, Terme und Gleichungen zu verdeutlichen (z.B. Strichliste, Oehl'sche Darstellung, ...).</li> </ul>	

	Außerdem werden Bilder gedeutet und Terme daraus abgelesen.	
<b>Symbole</b> („Mathesprache“ benutzen)	Mathematische Symbole (also Zahlen, Terme, Gleichungen, ...) werden genutzt, um Rechengeschichten, Bildern und Handlungen auszudrücken.	
<b>Sprache</b> (Sprechen, Zuhören, Nachfragen, Erklären, Begründen)	<p>Mithilfe von Sprache können z.B.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Rechengeschichten erzählt/ aufgeschrieben werden,</li> <li>- Sachverhalte und Rechenwege mündlich und/oder schriftlich erklärt werden</li> <li>- Begründungen und Beweise mündlich und/oder schriftlich beschrieben werden</li> </ul> <p>Die Sprache bildet in unserem Schaubild das Zentrum, da sie für uns ein zentrales Medium ist, um in den Kopf des Kindes hinein blicken zu können. Sprache bezieht sich für uns auf Kommunikation miteinander sowie auf Erklärungen oder Rückfragen, die ich innerhalb meines individuellen Lernprozess entwickle. Mit der richtigen Sprache kann auf verschiedenen Ebenen die „Sache geklärt“ und der „Mensch gestärkt“ werden (vgl. Hentig 1985).</p>	

Dabei ist es von zentraler Bedeutung, *Darstellungswechsel* zu forcieren, d.h. die Schülerinnen und Schüler aufzufordern, zwischen verschiedenen Darstellungsformen und –mitteln zu „übersetzen“, damit ein mathematisches Muster z. B. einen lebensweltlichen Bezug und somit einen „Sinn“ für die Kinder bekommt.

Anhand der Fotos sieht man, dass solche „Übersetzungen“ beim gemeinsamen Lernen oft ganz automatisch passieren. In einer Partnerarbeit z.B. vermischen sich fast alle Darstellungsformen miteinander, da Kinder sich austauschen (Sprache), ihre Lösungen notieren (Symbol und Bild) und evt. didaktisches Material zur Vorstellung oder zum Überprüfen der Lösung benutzen (Handlung am Material).

## Darstellungsmittel - *nicht nur im Förderunterricht einsetzen!!!*

Wir plädieren deutlich für den Einsatz von Darstellungsmitteln für ALLE Kinder. Denn Darstellungsmittel sind mehr als nur Hilfsmittel zum Rechnen! Ihr Einsatz im Unterricht wird

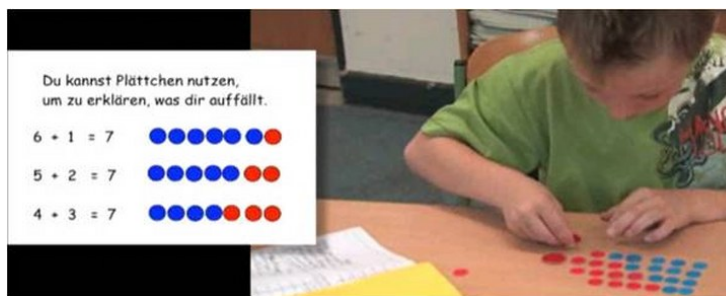
leider oft als **Zeichen von Lernschwäche** interpretiert („Die Plättchen können dir helfen!“). Und sie führt zuweilen zur **Abwertung** von erbrachten Leistungen („Du hast den Zahlenstrahl als Hilfe verwendet!“).

Mithilfe von Darstellungsmitteln können die Kinder aber eigene Rechenwege entwickeln und andere Rechenwege nachvollziehen. Mit Darstellungsmitteln lassen sich z.B. die schriftlichen Verfahren (s. Abb. zur Einführung der schriftl. Subtraktion) so einführen, dass sie für alle Kinder auf unterschiedlichen Ebenen erfahrbar werden und die einzelnen Schritte nicht nur auswendig gelernt werden.



Darüber hinaus dienen Darstellungsmittel zur Veranschaulichung mathematischer Strukturen. Sie können somit ein „**Instrument des Erkennens**“ sein.

Im heutigen Mathematikunterricht geht es nicht nur darum richtig zu rechnen, sondern darüber hinaus, mathematische Zusammenhänge zu entdecken, zu beschreiben und zu begründen. Auch hier kommen Darstellungsmittel zum Einsatz. Ein Beispiel:



Mithilfe von Plättchen können Muster sichtbar gemacht werden. Die Plättchen helfen dem Kind zu erkennen, was in der Aufgabe genau passiert. Seine Beobachtung kann es dann auch vielleicht mit eigenen Worten

beschreiben.

Darstellungsmittel können auch als „**Instrument des Kommunizierens**“ fungieren.

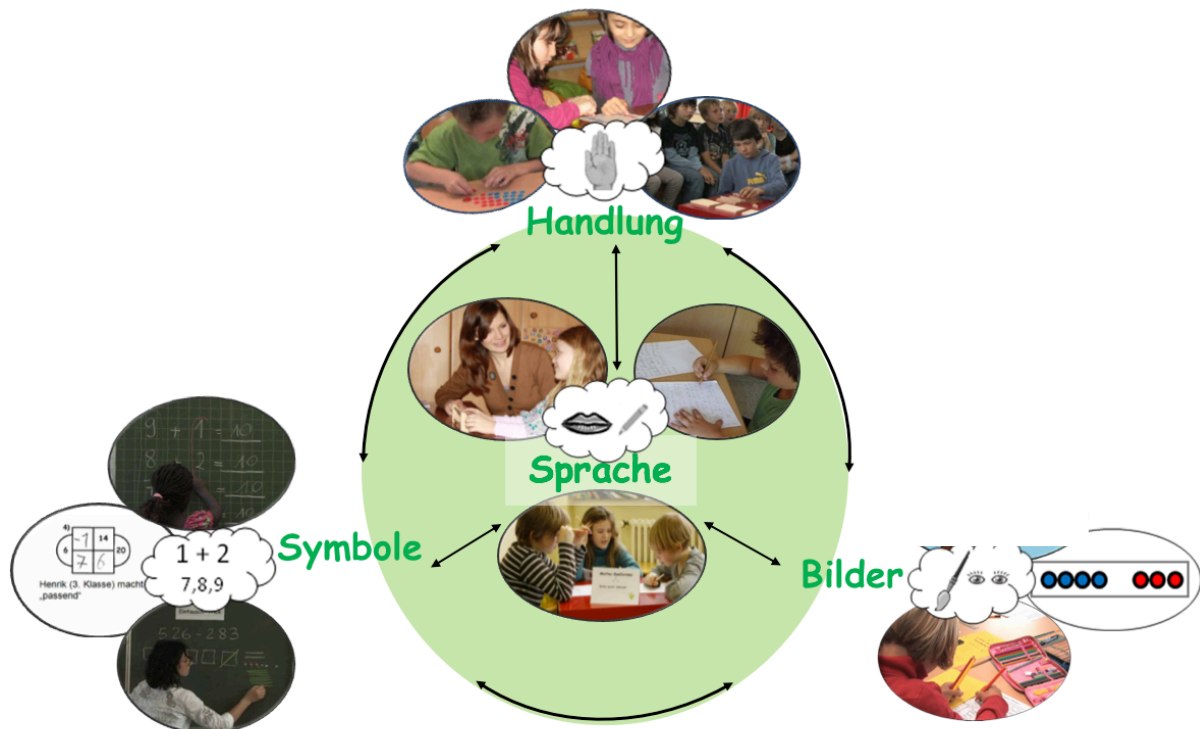
Überall da wo Worte fehlen, wo Kinder Schwierigkeiten haben, sich anderen mitzuteilen, können sie die Gedanken der Kinder, die entdeckten Strukturen und Muster sichtbar machen und die Kinder dabei unterstützen, anderen ihre Entdeckungen und Erkenntnisse nachvollziehbar zu beschreiben.

**Aber:** Der Umgang mit ihnen muss gelernt werden!  
(Vgl. Sachinfo „Einführung von Darstellungsmitteln – aber wie?“)

## „Mathe in den Kopf?!“ – Ein Merkplakat

Das zum Thema „Mathe in den Kopf?!“ entwickelte Plakat, versucht die recht abstrakten Begriffe und komplexen Zusammenhänge zu vereinfachen und mithilfe von Fotos aus dem Unterrichtsalltag zu konkretisieren.

Dabei stellen wir die Sprache in den Mittelpunkt des Lernprozesses. Die Sprache nimmt nicht nur im Hinblick auf die Vermittlung von fachlichen Inhalten eine wesentliche Rolle im Unterricht ein. Sie kann darüber hinaus ein Instrument sein, mit dem wir näher an die Köpfe der Kinder kommen



## „Mathe in den Kopf?!“

### „Mathe in den Kopf?!“ - bei Kindern mit Rechenschwierigkeiten

Der Lernprozess vom Beobachten, zum Handeln und Übersetzen mathematischer Sachverhalte in Bilder, Sprache und Symbole bis hin zum Verinnerlichen ist sehr individuell. Warum einige Kinder diesen Prozess schnell durchlaufen und schon in sehr jungem Alter mathematische Vorstellungsbilder entwickelt haben, während andere Kinder große Schwierigkeiten haben, sich die Mathematik vorzustellen, kann nicht ganz beantwortet werden.

Das, was im Kopf des Kindes tatsächlich passiert, kann ein Außenstehender besser einschätzen, wenn er das Kind danach fragt, was es „im Kopf“ hat. Doch nicht selten ist das Beschreiben dessen, was da im Kopf ist schwierig genug in Worte zu fassen.

Selbst wenn eine Lehrperson ein didaktisches Material (z.B. das 20er Feld) sehr intensiv eingeführt hat, heißt es nicht, dass alle Schülerinnen und Schüler gleichermaßen geschickt damit umgehen können, bzw. es als hilfreich für den eigenen Erkenntnisprozess empfinden.

Auch wenn ein Kind genau beschreibt was es meint, umfasst diese Beschreibung unter Umständen nicht das, was es tatsächlich an Wissen in seinem Kopf abgespeichert, verinnerlicht hat.

Für viele Lehrer scheint es ein Dilemma zu sein, nicht wirklich in den Kopf eines Kindes hineinschauen zu können, um genaue Information darüber zu erhalten, „wo das Kind gerade steht“ und „was“ es genau braucht.

An dieser Stelle wird deutlich, dass Lernen offensichtlich nicht nur sehr individuelle Wege nimmt, sondern aufmerksam und sensibel zu begleiten ist. Versucht man als Lehrperson vorbeugend mithilfe von Darstellungsmitteln stark an dem Aufbau von inneren Bildern zur Zahl- und Operationsvorstellung zu arbeiten, kann man Rechenschwierigkeiten jedoch positiv entgegen wirken.



## (Mathematik-) Lernen und Emotionen

Erinnert man sich an die Grundidee von Pestalozzi und seiner Forderung nach einem Lernprozess in dem der Kopf, das Herz und die Hand gleichermaßen beteiligt sind, so scheint es neben der Hand und dem Kopf eine weitere ‚Ebene‘ zu geben, die vielleicht deshalb weniger Beachtung findet, weil sie so schwer greifbar ist.

Das Herz ist an dieser Stelle sicher eher bildlich zu betrachten und könnte umschrieben werden mit Begriffen wie „Emotion“, „Motivation“, „Lernfreude“ o. ä.

Die Hirnforschung zeigt in neueren Untersuchungen, wie maßgeblich die Emotionen zum Erfolg oder Misserfolg beim Lernen beitragen. Wer z. B. unter von Angst erzeugtem Stress lernt, hat langfristig Probleme damit, neu Gelerntes zu behalten und zu verinnerlichen (Spitzer: „Lernen“, S. 171f).

Kurzzeitiger Stress kann zwar punktuell zu verbessertem Lernen führen, langfristiger Stress verursacht jedoch aus neuropsychologischer Sicht, dass die Energiezufuhr von Neuronen im Hippokampus (aktivste Struktur im Zentralen Nervensystem) abnimmt. Das hat eine Leistungsminderung zu Folge, woraus sich zahlreiche Stresskrankheiten entwickeln können. Auf den Mathematikunterricht bezogen kann sich daraus folgende Situation entwickeln:

„Wer sich wenig zutraut, vertraut eher auf Mechanismen als auf eigenes Denken, und wird so immer abhängiger vom Denken anderer. Die mathematische Hilflosigkeit wächst und wächst. Das Zutrauen in die eigenen Lernmöglichkeiten wird dadurch immer geringer. Ein *Teufelskreis Versagen in Mathematik - Angst vor Mathematik* kann so entstehen.“

(Spiegel/ Selter 2007, S. 64)

Eine Sachinfo, die sich intensiver mit dem Thema „Förderung von Kindern mit Rechenschwierigkeiten“ beschäftigt, finden Sie in Modul 3.3 (Haus 3 – UM – Modul 3.3: Diagnose und Förderung).

Informationen für Eltern zum Thema „Mathe in den Kopf?!“ befinden sich im Informationsmaterial in Haus 3. Hier werden auch Hinweise gegeben, wie Eltern ihr Kind zu Hause sinnvoll – unter Einsatz von Darstellungsmitteln - beim Rechnen lernen unterstützen können.