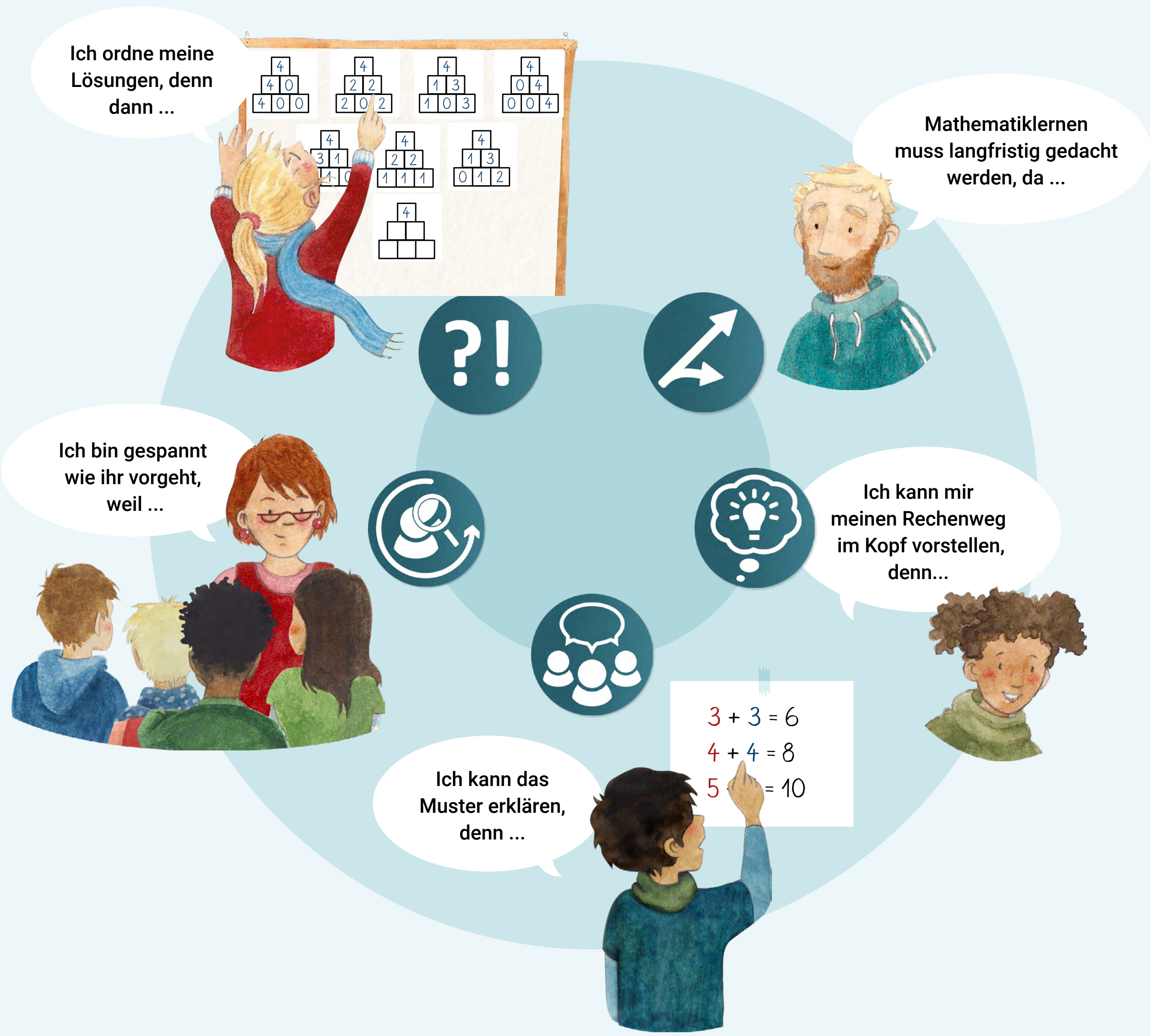
QuaMath
Unterrichts- und Fortbildungs-Qualität in Mathematik entwickeln

mit Beispielen aus
PIKAS
Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik



Fünf Prinzipien guten Mathematikunterrichts

Fünf Prinzipien guten Mathematikunterrichts

Herr Jähme hat in diesem Schuljahr mit seiner Klasse das kleine Einmaleins behandelt und überlegt:
‚In diesem Jahr habe ich es mal mit Ableiten versucht, also zum Beispiel $6 \cdot 4$ herleiten lassen aus $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4$. Das war etwas aufwändiger als sonst, und soooo viel besser beherrschen meine Kinder das Einmaleins auch nicht. Aber das bloße Auswendiglernen stößt irgendwann ja auch an seine Grenzen.'
Spätestens beim Multiplizieren jenseits des Einmaleins in Klasse 3 benötigen die Lernenden das Ableiten z. B. für die Aufgabe $5 \cdot 12$, die zerlegt wird in $5 \cdot 10 + 5 \cdot 2$. Das zugrundeliegende Distributivgesetz brauchen sie zudem im weiterführenden Mathematikunterricht, wenn es beim Rechnen mit Brüchen, mit Dezimalzahlen oder mit Variablen um das Ausklammern (z. B. $5a + 3a = (5 + 3) \cdot a$) oder das Ausmultiplizieren (z. B. $5 \cdot (3x + 2y) = 15x + 10y$) geht.
Nun könnte man denken, es sei doch früh genug, wenn die Lernenden den Umgang mit dem Distributivgesetz zum Zeitpunkt der Behandlung der Dezimalzahlen oder der Variablen in der Sekundarstufe lernen. Darum müsse sich die Grundschule doch nicht kümmern. Natürlich lernen die Kinder in der Sekundarstufe neue und weiterführende mathematische Lerninhalte. Aber viele dieser Lerninhalte fußen auf den Inhalten des Grundschulmathematikunterrichts. Es ist daher wichtig, dass die Lernenden bereits in der Grundschule über Verstehensgrundlagen verfügen, sodass sie flexibel auf unterschiedliche Anforderungen eingehen können, die im weiteren Mathematikunterricht kommen werden. Und diese Verstehensgrundlagen sollten die Lernenden möglichst früh erwerben können, nämlich dann, wenn die Zahlenwerte von überschaubarer Größe sind und z. B. durch Punktefelder gut repräsentiert werden können. Wird also nur auf die auswendige Verfügbarkeit der Aufgaben des kleinen Einmaleins fokussiert, ist der langfristige Lernprozess der Kinder nicht ausreichend im Blick.
Herr Jähme entscheidet sich dazu, nicht nur lokal zu agieren. Ihm ist es nicht allein wichtig, dass die Lernenden die Zahlensätze des kleinen Einmaleins beherrschen. Er möchte, dass die Lernenden ein tragfähiges Operationsverständnis erwerben, um so für das Weiterlernen notwendige Verstehensgrundlagen zu schaffen. Dabei orientiert er sich an den Prinzipien der *Durchgängigkeit* und der *Verstehensorientierung* – an zwei der fünf Prinzipien guten Mathematikunterrichts.
Fünf Prinzipien guten Mathematikunterrichts?
Was macht denn guten Mathematikunterricht aus? Es gibt viele Listen von Qualitätsmerkmalen und von didaktischen Prinzipien (z. B. Scherer & Weigand 2017). Manche sind umfassend, aber nicht fachspezifisch (z. B. Meyer 2004), andere zu abstrakt oder zu umfangreich, um sie unmittelbar in der alltäglichen Unterrichtspraxis umsetzen zu können.
Im Projekt QuaMath (Unterrichts- und Fortbildungsqualität in Mathematik entwickeln) wurde daher die mathematikdidaktische und die bildungswissenschaftliche Forschungsliteratur ausführlich gesichtet, verschiedene Modelle wurden übereinandergelegt und immer wieder mit erfahrenen Lehrkräften oder Personen aus der Aus- und Fortbildung von Lehrkräften diskutiert.

Ausgewählt wurden schlussendlich fünf Prinzipien, die wichtige Qualitätsmerkmale enthalten und mit denen man in vielen unterrichtlichen Anforderungssituationen fachdidaktisch fundierte Entscheidungen treffen kann (Prediger u. a. 2022). Diese werden wir in den folgenden Abschnitten zunächst formulieren, in der gebotenen Kürze erläutern und dann für die Primarstufe anhand von Beispielen (aus dem Projekt PIKAS und seinen Partnerprojekten) konkretisieren. Analoge Ausführungen für die Sekundarstufen finden sich in Holzäpfel u. a. (2024).

Strukturierendes Element der einzelnen Abschnitte sind die sogenannten QuaMath-Kernbotschaften. Darunter verstehen wir diejenigen zentralen Aussagen, die aus unserer Sicht für die Primarstufe mit dem jeweiligen Prinzip verbunden sind. Bewusst wurden diese in der Ich-Form formuliert, um die unmittelbare Anbindbarkeit an den eigenen Mathematikunterricht zu unterstützen.

Lernenden-Orientierung und Adaptivität:

LERNSTÄNDE AUFGREIFEN

Das Prinzip der Lernenden-Orientierung und Adaptivität besagt, dass Lernprozesse gelingen, wenn (typische) Lernstände und Vorerfahrungen systematisch berücksichtigt und aufgegriffen werden. Zudem sollen Lernende eigene Lernwege beschreiten können, denn gerade der Verständnisaufbau sollte bei deren (typischen) Vorerfahrungen starten und diese anhand von Problemen in reichhaltigen (Kontext-)Situationen zu mathematischen Konzepten ausformen. Hierzu sollten nicht nur typische Lernstände der ganzen Klasse, sondern die heterogenen individuellen Lernstände der Einzelnen in den Blick genommen werden, z. B. durch Differenzierung nach Lernzielen (Was ist das nächste Lernziel für dieses Kind?) und nach Anforderungsstufen (Wie lassen sich die Lernaufgaben unterschiedlich unterstützen?).

Dieses Prinzip wird im Weiteren durch die Formulierung von sechs Kernbotschaften konkretisiert, die jeweils beispielgebunden illustriert werden.

Ich nehme die Denk- und Vorgehensweisen der Kinder stärkenorientiert wahr.

Als stärkenorientierten Blick bezeichnen wir eine Orientierung vorrangig an den Fähigkeiten und den Sichtweisen der Lernenden statt primär an den Fehlern und den Defiziten. Die unterschiedlichen Reaktionen in der Abbildung verdeutlichen das Gegensatzpaar ‚Defizitorientierter Blick – Stärkenorientierter Blick'.

Die fünfjährige Sarah kann schon recht gut zählen, stolz sagt sie die Zahlwörter bis 95 auf und fährt fort:

Stärkenorientierung meint nun nicht, Kinder per se als kleine Genies zu betrachten und ihnen nur positive Rückmeldungen zu ihren Äußerungen zu geben. Es geht keineswegs um das Beschönigen oder um überdosiertes Lob. Das kann dazu führen, dass die Lernenden sich nicht mehr an ihren eigenen Leistungen orientieren, sondern nur noch an Einschätzungen von anderen. Und dieser Umstand wiederum kann sich auf das Empfinden von Selbstwirksamkeit und auf die Motivation negativ auswirken.

Stärkenorientierung heißt vor allem, auf das individuelle Denken der Kinder neugierig zu sein (vgl. Götze, Selter & Zannetin, 2019), die Denk- und Vorgehensweisen der Kinder aus ihrer Sicht als prinzipiell sinnvoll wahr und damit auch ernst zu nehmen. Die Kinder wählen sehr häufig für sie logische (Rechen-)Schritte, auch wenn diese aus unserer Perspektive nicht immer sinnvoll erscheinen (erst die Einer sprechen, dann den Rest). Auf dieser Grundlage gilt es, einerseits vorhandene Ressourcen und andererseits noch existierende Schwierigkeiten zu identifizieren und rückzumelden – also z. B. durch Nachfragen in den Austausch zu treten, statt direkt zu belehren.

Ich diagnostiziere die Lernstände der Kinder fachdidaktisch fundiert, tiefenscharf und förderorientiert.

Wie können die Lernstände der Lernenden nun erhoben werden? Hier kann man unterscheiden zwischen zwei Ansätzen, einem eher *produktorientierten* und einem eher *prozessorientierten* Ansatz.
Klassenarbeiten, (standardisierte) Tests, Hausaufgabenkontrollen und Ähnliches fokussieren auf die Lernergebnisse. Sie erheben in der Regel, ob ein Kind das kann, was es gelernt haben sollte bzw. können müsste. Hauptkriterien sind hier ‚richtig' oder ‚falsch'. Diese Instrumente kommen häufig am Ende eines Lernabschnitts zum Einsatz. Insofern handelt es sich dann um eine *produktorientierte* Bewertung des Lernens: *Assessment OF learning* – Lernstandsfeststellung als Grundlage von Bewertung. Eine Zusammenstellung von sogenannten Standortbestimmungen findet sich beispielsweise auf *pikas.dzlm.de/node/1660.*

Assessment **of** *learning*

Klassenarbeiten
Standardisierte Test
Hausaufgabenkontrollen

Es wird genau hingeschaut, mit anderen Worten: diagnostisch tiefenscharf. ‚Was kann das Kind? Was kann es noch nicht?' und auf dieser Grundlage wir geplant: ‚Wie könnte der nächste Lernschritt aussehen?' Insofern handelt es sich dann um eine prozessorientierte Sicht auf das Lernen: *assessment FOR learning* – Lernstandsfeststellung als Grundlage für das Weiterlernen. Diese tiefenscharfen und auf die Förderung abzielenden Formen der Diagnose bedürfen fachdidaktischen Hintergrundwissens über notwendige Verstehensgrundlagen, typische Vorgehensweisen und häufiger auftretende Fehlvorstellungen. Bei aller Individualität des Denkens der Lernenden: Das Wissen um typische Lernstände ist die Hintergrundfolie, vor der die Spezifität der individuellen Lernwege erkannt werden kann.

Assessment **for** *learning*

Diagnosegespräche
Standortbestimmungen
Beobachtungsbögen
Lerntagebücher
Spontane Beobachtung
Mathebriefkästen

Nun ist es nicht das Instrument als solches, das den Ansatz bestimmt, sondern dessen Einsatzort. Beispielsweise können Aufgaben einer Klassenarbeit auch für eine geeignete Lernstandsfeststellung verwendet werden.

Ich fördere diagnosegeleitet und adaptiv mithilfe guter Förderaufgaben.

An eine tiefenscharfe Diagnose sollte sich eine adaptive Förderung anschließen. Adaptiv meint hier die Anpassung der Förderanregungen an die Erkenntnisse, die aus der Diagnose gewonnen werden konnten. So kann auf der Grundlage einer förderorientierten Diagnose eine diagnosegeleitete Förderung durchgeführt werden. Beispiele hierfür bieten auch die FÖDIMA-Materialien für die Jahrgangsstufen 1 und 2 *(pikas.dzlm.de/node/2556).*
Die FÖDIMA-Materialien gliedern sich in die FÖDIMA-Standortbestimmungen und die FÖDIMA-Kartei. Die FÖDIMA-Standortbestimmungen bestehen aus informativen, meist schriftlichen Aufgaben. Sie lassen sich mit größeren Gruppen durchführen und bei der Analyse kann, im Unterschied zu mündlichen Äußerungen, auf dauerhaft vorliegende Lernenden-Dokumente zurückgegriffen werden.
Die FÖDIMA-Kartei ergänzt die Aufgaben auf den Vorderseiten von insgesamt 58 Karteikarten um Anregungen zur Planung diagnostischer Gespräche mit einzelnen Kindern, Kindergruppen oder mit allen Lernenden im Plenum.
Jede Karteikarte besteht aus einer diagnostischen Basisaufgabe, konkreten Beobachtungsaspekten und Impulsen, um individuelle Lernstände detailliert und flexibel zu erfassen. Diese FÖDIMA-Materialien können unabhängig voneinander zum Einsatz kommen. Die Kombination aus schriftlicher und mündlicher Diagnose bietet die beste Unter-

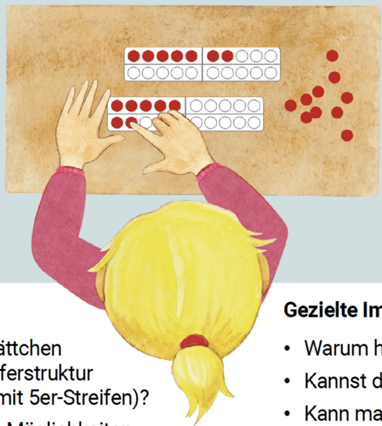
Anzahlen zeichnen oder legen

ZR bis 20 | Zahlverständnis | 4

Diagnostische Basisaufgabe

Lege 7 Plättchen in das 20er-Feld. Finde verschiedene Möglichkeiten.

Kannst du direkt sehen, dass es 7 sind? Warum?



Kompetenzen

Das Kind kann ...

- eine Anzahl (unterschiedlich) im 20er-Feld darstellen.
- Anzahlen im 20er-Feld erfassen.
- Gemeinsamkeiten und Unterschiede verschiedener Darstellungen benennen.

Beobachtungen

- Wie strukturiert das Kind die Plättchen im 20er-Feld (z. B. beliebig, Fünferstruktur nebeneinander/untereinander, mit 5er-Streifen)?
- Kann das Kind unterschiedliche Möglichkeiten finden, 7 im 20er-Feld sinnvoll darzustellen (Fünferstruktur nebeneinander/untereinander)?
- Nennt das Kind eine andere Zahl, wenn 7 Plättchen anders im 20er-Feld angeordnet werden?

Gezielte Impulse

- Warum hast du die Plättchen so gelegt?
- Kannst du das noch anders legen?
- Kann man die Plättchen auch so legen? (Die Lehrkraft legt die Plättchen anders ins 20er-Feld.) Sind das auch 7? Begründe.

Vorderseite: Diagnostische Basisaufgabe

stützung im Sinne der diagnostischen Tiefenschärfe, vor allem bei den Kindern, die keine oder keine eindeutig interpretierbaren Bearbeitungen bei den schriftlichen Standortbestimmungen abgegeben haben.

Die FÖDIMA-Karteikarten enthalten jeweils auf der Rückseite Förderanregungen, die zu den Standortbestimmungen und den diagnostischen Basisaufgaben passen. So kann die Lehrkraft auf der Grundlage ihrer aus der Diagnose gewonnenen Erkenntnisse adaptiv fördern.

Die ersten drei Kernbotschaften des Prinzips der

Anzahlen zeichnen oder legen

ZR bis 20 | Zahlverständnis | 4

FÖRDERANREGUNGEN

Strukturen des 20er-Feldes thematisieren

Es werden verschiedene (auch unstrukturierte) Darstellungen einer Zahl im 20er-Feld gesammelt. Anschließend werden die unterschiedlichen Darstellungen danach sortiert, ob die Zahl mittels der Struktur schnell gesehen oder nur zählend ermittelt werden kann. Strukturen, die eine schnelle Anzahlerfassung ermöglichen, werden von den Kindern beschrieben und erläutert.

- Woran erkennst du direkt, dass es 6 sind?
- Warum zeigen beide Darstellungen 6?

Sortieraufgabe

Variante 1: Die Kinder arbeiten zu zweit und bekommen Zahlenkarten von 1 bis 10 als Darstellung im 20er-Feld. Zwei Karten werden offen auf den Tisch gelegt und der Größe nach geordnet. Ein Kind beginnt und zieht eine Karte. Es sagt, welche Zahl dargestellt ist und ordnet die Zahl der Größe nach in die offenliegenden Karten ein. Dabei begründet es die Zuordnung (z. B. Ich habe 7 Plättchen im 20er-Feld. Das sind mehr als 4 Plättchen und weniger als 8. Deswegen lege ich die Karte zwischen 4 und 8.). Danach zieht das andere Kind eine neue Karte.

Variante 2: Die Kinder arbeiten zu zweit und bekommen Zahlenkarten von 1 bis 20 als Darstellung im 20er-Feld. Ein Kind schließt die Augen. Das andere Kind legt eine Reihe aus 5 Karten der Größe nach geordnet. Dabei baut es einen Fehler ein. Das Kind öffnet wieder die Augen und muss die falsch angeordnete Darstellung begründet auswählen und die Reihe richtig ordnen. Danach wechseln die Kinder.

Spiel: 20er-Feld finden

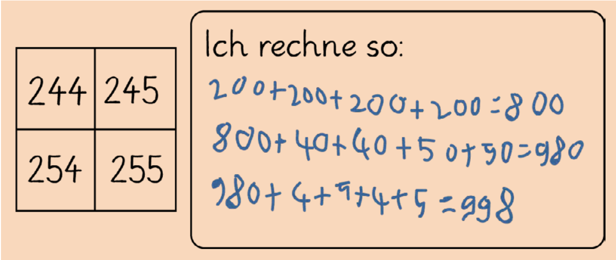
In der Mitte liegt ein Stapel mit symbolischen Zahlenkarten. Die erste Karte ist aufgedeckt. Die Kinder haben jeweils einen Stapel mit Zahldarstellungen im 20er-Feld. Sie decken nacheinander je eine Karte auf. Sobald ein 20er-Feld davon zu der Zahl in der Mitte passt, darf das Kind alle bereits aufgedeckten 20er-Felder behalten. Die Karte in der Mitte wird unter den Stapel gelegt, sodass eine andere symbolische Zahlenkarte zu sehen ist. Wenn ein Kind keine Karten mehr hat, endet das Spiel.

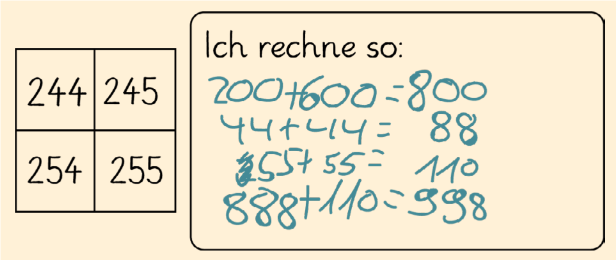
Rückseite: Förderanregungen

Lernendenorientierung & Adaptivität fokussieren auf die Diagnose und auf die Förderung von Verstehensgrundlagen. Die folgenden drei Kernbotschaften sind breiter angelegt und befassen sich mit der Gestaltung eines differenziert angelegten Mathematikunterrichts.

Ich setze, wann immer möglich, natürlich differenzierende Aufgaben ein.

Im Unterricht gilt es, ein ausgewogenes Verhältnis von gemeinsamen sowie individuellen Lernsituationen herzustellen. Individuelles Lernen ermöglicht jedem Kind, auf seinem Niveau und mit seinen aktuellen Möglichkeiten, erfolgreich (weiter) zu lernen. Gemeinsames Lernen bedeutet, dass die verschiedenen Lernpfade, wann immer möglich, zusammengeführt werden. Gelingen kann dies mit Aufgabenstellungen, die das Potenzial zur sogenannten natürlichen Differenzierung aufweisen, indem sie auf unterschiedlichen Wegen und Lernstufen bearbeitet werden können. Natürliche Differenzierung ermöglicht den Kindern die Arbeit an einem gemeinsamen Lerngegenstand. Dabei können die Kinder unterschiedliche Hilfsmittel und Darstellungsformen wählen und die Aufgabe unterschiedlich tiefgehend bearbeiten.
Der gemeinsame Lerngegenstand gewährleistet aber, dass die Kinder sich immer noch über Entdeckungen austauschen können. So stellt beispielsweise die Aufgabe, möglichst geschickt die Summe eines sog. Vierer-Zahlenfeldes (Anordnung in Analogie zur Hundertertafel in einem größeren Zahlenraum) zu berechnen, eine solche natürlich differenzierende Aufgabenstellung dar.
Die beiden Kinderbearbeitungen zeigen unterschiedliche Vorgehensweisen, die einen guten Ausgangspunkt für gemeinsame Besprechungen bilden, um andere Herangehensweisen kennenzulernen und mit der eigenen Vorgehensweise zu vergleichen.





Weitere Beispiele für solche Aufgabenstellungen, die natürliche Differenzierung ermöglichen, finden sich auf *pikas.dzlm.de/node/1535.*

Ich erweitere bzw. reduziere gute Aufgaben so, dass diese Adaptionen durch ein gemeinsames Lernziel verbunden sind.

In einem natürlich differenzierenden Unterricht werden gute Aufgaben für alle Kinder so aufgefächert, dass auch erweiterte oder reduzierte Anforderungen gesetzt werden können. Diese sind

Erweiterung

Gute Aufgabe natürlich differenzierend

Reduktion

Möglichkeiten der Erweiterung (Komplexität erhöhen)
- Zahlwerte erweitern bzw. anpassen
- Eigenproduktionen ermöglichen
- Vorgabe komplexer/unkonventioneller Lösungen, Zahlenwerte, Darstellungen...

Erweitern des Aufgabenumfangs durch Hinzunahme eines Aspekts/mehrerer Aspekte:
- (Zu)ordnen, Überprüfen, Vergleichen, Beschreiben, Begründen, Verallgemeinern ...
- weitere Zahlwerte, Lösungen, Darstellungsformen, Operationen, Rechenschritte, Aufgaben...

Möglichkeiten der Reduktion (Komplexität vermindern)
- Zahlwerte verringern bzw. anpassen
- Eigenproduktionen ermöglichen
- Vorgabe einzelner Lösungen, Zahlenwerte, Darstellungen...

Eingrenzen des Aufgabenumfangs durch Fokussierung auf einen/wenige Aspekt(e):
- (Zu)ordnen, Überprüfen, Vergleichen, Beschreiben, Begründen, Verallgemeinern ...
- bestimmte Zahlwerte, Lösungen, Darstellungs formen, Operationen, Rechenschritte, Aufgaben...

einerseits inhaltlich an ein gemeinsames Thema gebunden, andererseits werden so themenfokussiert unterschiedliche Lern- und Entwicklungsverläufe ermöglicht. Die Abbildung zeigt, wie durch Erweiterung bzw. Reduktion die Komplexität einer Aufgabe erhöht oder vermindert werden kann. Konkret: Im oben erwähnten Beispiel zu den Vierersummen könnte man als **Erweiterung** beispielsweise …

- den Zahlenraum vergrößern,
- die Aufgabe stellen, eine bestimmte Summe (z. B. 990) zu erreichen,
- andere Konstellationen von Vierersummen als die quadratische wählen (z. B. vier nebeneinander liegende),
- die Lernenden ihren Rechenweg beschreiben lassen,
- die Lernenden das Ergebnis von 4 · 244 mit der erzielten Summe vergleichen lassen oder
- analoge Zahlensummen mit entsprechenden Produkten zu vergleichen (z. B. 4 · 243 mit 243 + 244 + 253 + 254).

Möglichkeiten der **Reduktion** wären etwa …

- die Verkleinerung des Zahlenraums (z. B. 44 + 45 + 54 + 55),
- die Verringerung der Anzahl der zu addierenden Felder zur Erzielung einer Summe (z. B. auf zwei nebeneinander liegende),
- Tippkarten (z. B.: ‚Addiere jeweils zwei übereinanderstehende Zahlen', ‚Vergleiche … mit …') oder
- Vorübungen zur Orientierung im Zahlenfeld (z. B. Komplettieren von Viererfeldern bei vorgegebener Zahl links oben bzw. rechts unten unter Ausnutzung von Strukturen, wie +1, +10 oder +11) zur Anbahnung geschickten Rechnens.

Zahlreiche Beispiele zur Konkretisierung finden sich auch auf *pikas-mi.dzlm.de/node/32.*

Ich initiiere in Abhängigkeit vom Lerngegenstand individuelle und gemeinsame Phasen des Lernens.

Adaptivität ist nicht dasselbe wie ‚Individualisierung'. Ein Unterricht, der die Lernenden vorwiegend ‚selbstorganisiert' an Lernpaketen arbeiten lässt, unzusammenhängende Arbeitsblätter anbietet oder verstärkt auf Lernstationen bzw. Lernbüros setzt, kann dazu führen, dass das Lernen von- und miteinander mehr und mehr verloren geht. Durch den fehlenden Austausch mit den Mitlernenden oder der Lehrkraft kann zudem der verstehensorientierte Erwerb von Kompetenzen erschwert werden.
Denn Aufgaben für vollkommen selbstorganisierte Lernphasen werden im Regelfall kleinschrittig dargeboten, damit die organisatorische Einbettung funktioniert und alle Schülerinnen und Schüler irgendwie beschäftigt sind. Stattdessen sollte die o. a. Aufgabenadaption dazu führen, dass die Kinder zum individuellen Weiterlernen herausgefordert werden, wozu es auch des Austausches in der Lerngruppe bedarf.
Insofern wird dafür plädiert, so oft wie möglich in-

dividuelles und gemeinsames Lernen miteinander zu verschränken. Durch gemeinsame Interaktion und Reflexion über den Lerngegenstand kann Verständnis vertieft und gefördert werden. Unterricht sollte demnach selbstverständlich möglichst oft individuelle Arbeitsphasen aufweisen, die aber durch Phasen des gemeinsamen Einstiegs und der gemeinsamen, sachbezogenen Reflexion gerahmt werden (vgl. Abschnitt „Kommunikationsförderung"). Eine ausführliche Videodokumentation einer solchen Unterrichtsstunde ist beispielsweise unter *pikas.dzlm.de/node/792* einsehbar.

Verstehensorientierung:

KONZEPTE, STRATEGIEN UND VERFAHREN GRUNDLEGEN

Um rein oberflächliches Lernen zu vermeiden, müssen die mathematischen Konzepte, Strategien und Verfahren aufeinander bezogen und stets durch Verständnis fundiert werden. Während eine Zeit lang kontrovers diskutiert wurde, ob entweder das Verständnis von Konzepten oder die Fertigkeiten im Umgang mit Verfahren (inkl. Operationen, Formeln, Algorithmen, …) wichtiger seien, herrscht inzwischen Einigkeit darüber, dass beides gleichermaßen entwickelt werden muss und dass das Verständnis für Strategien und Verfahren dabei ein wichtiges Bindeglied bildet. Die Verstehensorientierung ist damit ein zentrales Prinzip für die Gewichtung und Verknüpfung der fachlichen Lernziele zueinander.

Aus einer unterrichtlichen Perspektive muss für jeden Lerninhalt durchdacht werden, was genau Verstehensorientierung für diesen Lerninhalt bedeutet bzw. welches Verständnis bei den Kindern wie aufgebaut werden soll. Schauen wir uns das an einem Beispiel zur Addition an:
Die Zweitklässlerin Lisa sollte Aufgaben zur Addition im Hunderterraum lösen. Mit defizitorientiertem Blick würde man festhalten, dass sie die Addition im Hunderterraum noch nicht beherrscht und daher z. B. weitere Aufgaben der gleichen Art rechnen sollte, um die Addition im Zahlenraum bis 100 zu üben.

Name: Lisa

43 + 12 = 46

32 + 63 = 41

18 + 72 = 27

58 + 21 =

Ein stärkenorientierter Blick lässt allerdings begründet vermuten, dass Lisas Rechnung eine eigene Systematik zugrunde liegt: Lisa interpretiert wahrscheinlich die beiden Ziffern der zweiten Zahl als Einer, sodass sie zur 43 nicht 12, sondern 1 und 2 addiert. Ihr fehlen somit zentrale Verstehensgrundlagen für die Bedeutung der Ziffern in einer zweistelligen Zahl. Damit liegt das Problem nicht im Rechnen allein, sondern in dem, was dem Rechnen mit zweistelligen Zahlen zugrundeliegt, dem Stellenwertverständnis der Zahlen im Hunderterraum. Ein verständiges Addieren kann nur gelingen, wenn sie die Zahlen 12, 63 und 72 in ihre Zehner und Einer zerlegen kann. Verständiges Addieren braucht also nicht nur Grundvorstellungen wie z. B. die des Hinzufügens, sondern auch die Verstehensgrundlagen des Stellewertverständnisses.

Ich verdeutliche mir für jeden Inhalt die wesentlichen Verstehensgrundlagen und Zusammenhänge.

Die Herausforderung für Lehrkräfte bei der Verdeutlichung von Verstehensgrundlagen besteht darin, dass deren Beziehungen und Sequenzierungen in Lernpfaden für jeden Lerninhalt gut durchdacht sein müssen. Ebenso müssen die Zusammenhänge zu anderen mathematischen Inhaltsbereichen bedacht werden: Welche Verstehensgrundlagen wurden bereits in den vorangehenden Schuljahren angelegt? Inwiefern kann auf diesen gezielt aufgebaut werden? Welche Verstehensgrundlagen sind grundlegend für die Weiterarbeit in den kommenden Schuljahren?
Für die zentralen Verstehensgrundlagen im Bereich der Arithmetik der Schuleingangsphase beispielsweise wurde im Rahmen des Projekts PIKAS der sog. ‚Orientierungsrahmen arithmetische Basiskompetenzen' entwickelt *(pikas.dzlm.de/node/2410;* Götze & Selter, 2024). Er gibt einen guten Überblick über die zu erwerbenden arithmetischen Verstehensgrundlagen der ersten beiden

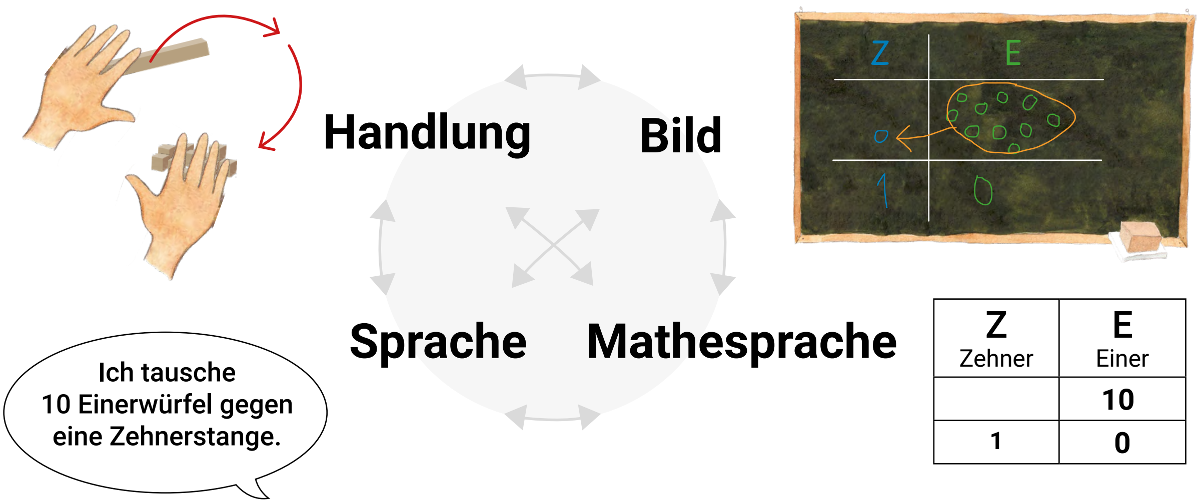
Schuljahre mit Ausblick auf die Klassenstufen 3 und 4. In Bezug auf das Stellenwertverständnis ist dort z. B. nachzulesen, dass für viele Kinder das Prinzip der Bündelung eine besondere Verstehenshürde ist. Die Kinder müssen verstehen, dass jeweils zehn Objekte zu einem Bündel höherer Ordnung zusammengefasst (gebündelt) werden können und dass diese Operation auch rückgängig gemacht werden kann (entbündeln). Zur Notation der gebündelten Zahlen nutzen sie das *Prinzip des Zahlenwerts* (**zwei** Zehner) und das *Prinzip des Stellenwerts* (zwei **Zehner**). Zum Verständnis dieser Konventionen ist die Einsicht in die Zerlegbarkeit von Zahlen *(Teil-Ganzes-Beziehung)* wichtig.

Ich vernetze verschiedene Darstellungen kontinuierlich und begleite die Vernetzung sprachlich.

Für einen verstehensorientierten Mathematikunterricht ist es zudem grundlegend, dass die Kinder immer wieder die Gelegenheiten bekommen, konkrete Vorstellungsbilder zu den verschiedenen mathematischen Inhaltsbereichen auf- bzw. auszubauen. Dabei spielen Darstellungen (Handlung, Bild, Sprache, Mathesprache) eine zentrale Rolle, denn sie ermöglichen die Ausbildung konkreter Vorstellungsbilder, wenn die Kinder diese kontinuierlich miteinander vernetzen, indem sie diese einander zuordnen und den Prozess sprachlich begleiten.
Die verschiedenen Darstellungen sind nicht in streng linearer Abfolge (erst handelnd, dann bildlich, dann symbolisch) zu durchlaufen. Vielmehr gilt es, die Darstellungen immer wieder zu vernetzen. Die Kompetenz, mit symbolischen Darstellungen umzugehen, sollte dabei nicht als alleiniges Ziel festgelegt werden. Stets sollen auch die anschaulichen, konkreten Vorstellungsbilder aktiv gehalten werden – und das von allen Lernenden. Natürlich sollen die Lernenden im Verlauf ihres Lernprozesses immer souveräner im Umgang mit den symbolischen Darstellungen (Mathesprache) werden. Aber sie sollten den Bezug zu den nicht-symbolischen Darstellungen nicht verlieren. Auch innerhalb einer Darstellungsform sollten Vernetzungen hergestellt werden.
Aber sie sollten den Bezug zu den nicht-symbolischen Darstellungen nicht verlieren. Auch innerhalb einer Darstellungsform sollten Vernetzungen hergestellt werden.
Lisa z. B. bräuchte daher genügend Gelegenheiten, um am konkreten Anschauungsmaterial das Bündelungsprinzip (bündeln und entbündeln) handelnd zu erarbeiten, z. B. durch Strukturierung einer unübersichtlichen Menge: im Hunderterraum beispielsweise durch das Eintauschen von zehn Einerwürfeln gegen eine Zehnerstange oder von zehn Plättchen in einen Zehnerstreifen. Solches Handeln allein reicht jedoch nicht aus. Wichtig ist, dass darüber gemeinsam nachgedacht und gesprochen wird.

Ich sichere kontinuierlich inhaltliches Verständnis vor der Automatisierung (von Rechenfertigkeiten).

Aufgabenstellungen zur Vernetzung von verschiedenen Darstellungen helfen, das inhaltliche Verständnis für einen mathematischen Unterrichtsinhalt zu sichern. Erst wenn diese Verstehensgrundlagen mit den Kindern erarbeitet wurden, sollte die ‚Phase‘ der Automatisierung bzw. der Sicherung der Geläufigkeit einsetzen. Wohl-

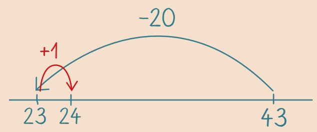


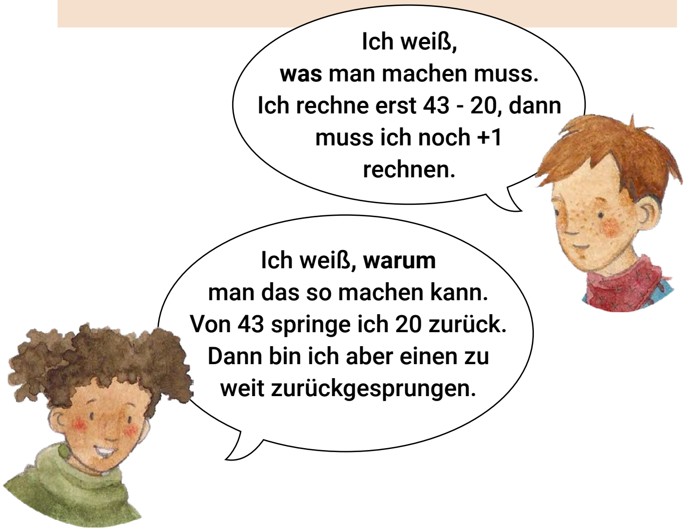
gemeinte Rezepte zur gedächtnismäßigen Einprägung, wie z. B. Lieder zu Zahlen und andere Formen künstlicher Verpackung, helfen den Kindern wenig, da sie nicht an konkreten Vorstellungsbildern ausgerichtet sind. Aber was bedeutet es nun, etwas zu verstehen?

$43 - 19 = 24$

$43 - 20 = 23$

$23 + 1 = 24$





Im obigen Beispiel weiß Tim, was er machen muss. Wenn er beispielsweise 19 subtrahieren muss, rechnet er zunächst minus 20 und addiert dann 1, er verwendet also die Rechenstrategie *Hilfsaufgabe.* Ob er verstanden hat, warum der Rechenweg funktioniert, ist nicht ersichtlich. Nesrin hingegen kann erklären, warum dieser Rechenweg so ausgeführt werden kann: „Von 43 springe ich 20 zurück. Dann bin ich aber einen zu weit zurückgesprungen." Dieses Beispiel verdeutlicht den Unterschied zwischen: ‚Ich weiß, was ich machen muss.' und ‚Ich weiß, warum ich das machen kann.' Verstehen eines Rechenwegs bedeutet also, eine Antwort auf ‚Erkläre, warum …' geben zu können.
Rund um die Aufgabe 5 + 4 können solche Aufforderungen zum Beispiel wie folgt formuliert werden: **Erkläre, warum …**

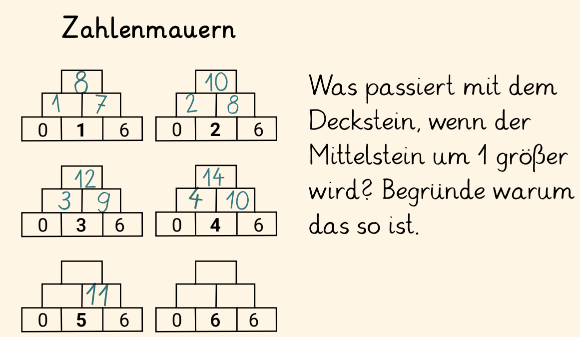
- das Ergebnis von 5 + 4 um eins kleiner ist als das von 5 + 5.
- die Aufgaben 5 + 4 und 4 + 5 das gleiche Ergebnis haben'.
- die Aufgabe 5 + 4 dir bei der Aufgabe 15 + 4 helfen kann'.
- die Aufgabe 5 + 4 = 9 zu deinem Bild passt.

Kognitive Aktivierung:

AKTIVE LERNPROZESSE ANREGEN

Das Anregen von tiefgehenden, aktiven Denkprozessen gilt in der Unterrichtsforschung als zentrales Qualitätsmerkmal, das beeinflusst, wie intensiv sich Lernende Mathematik erarbeiten. Anspruchsvolle Denkprozesse lassen sich nicht allein durch geeignete Aufgaben herstellen, sondern müssen auch in der Moderation durch die Lehrkraft immer wieder angeregt, unterstützt und aufrechterhalten werden. In der Fachdidaktik wurden Ansätze der kognitiven Aktivierung (weit vor Etablierung dieses Namens) für unterschiedliche Phasen des Unterrichts ausdifferenziert – vom entdeckenden Lernen über das eigenaktive Ordnen hin zum produktiven Üben.

Zahlenmauern sind ein bekanntes Übungsformat. Im folgenden Beispiel geht es zum einen darum, die Addition im Zahlenraum bis 20 zu üben. Zum anderen sind die Zahlenwerte so gewählt, dass die Lernenden Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Mauern erkennen können. Sie lernen die Auswirkungen des um jeweils 1 erhöhten Mittelsteins auf die Steine in der mittleren Reihe und auf den Deckstein zu beschreiben und zu begründen.



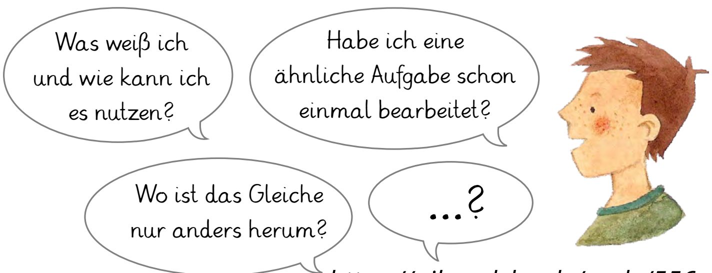
Kognitiv aktivierende Aufgaben wie diese bieten also das Potenzial, sowohl die inhaltsbezogenen als auch die prozessbezogenen Kompetenzen anzusprechen und zu fördern (KMK 2022).
Gleichwohl finden sich immer wieder Lernende wie Lukas, die Aufgaben zwar ausrechnen, denen aber nichts auffällt. Hier kann zu Recht gefragt werden, warum Lukas keine Muster erkannt hat. Deutlich wird hier, dass sich die Fähigkeiten zu entdecken, zu beschreiben und zu begründen in der Regel nicht von selbst und auch nicht kurzfristig entwickeln. Doch wie kann diese Entwicklung gezielt angeregt, unterstützt und damit langfristig aufgebaut werden?

Ich rege Lernende dazu an, bei individuell herausfordernden Aufgaben geeignete Fragen, Strategien und Mittel zum Forschen zu nutzen.

Die Entwicklung der prozessbezogenen Kompetenzen gilt es daher von der Lehrperson durch unterrichtliche Anregungen sowie durch entsprechende Aufgabenstellungen und Hilfen aktiv zu unterstützen – ähnlich wie der Prozess des Erwerbs der Aufgaben des Einmaleins. Dabei handelt es sich für die Lernenden um einen langfristigen Lernprozess. Es sollte also nicht zu schnell zu viel von den Lernenden erwartet werden. Lehrkräfte können Lernende beim Erwerb der prozessbezogenen Kompetenzen beispielsweise dadurch unterstützen, dass Fragen zum Forschen, Strategien zum Forschen und Mittel zum Forschen im Unterricht einbezogen werden.

- **Fragen zum Forschen** – wie ‚Was ist gleich? Was ist verschieden?' – sind Fragen, die als Hilfen zum Weiterdenken fungieren sollen. Sie fokussieren auf Zusammenhänge in bzw. zwischen Aufgaben. Durch diese sollen die Kinder sich die Aufgabe in ihren Zusammenhängen erschließen, sie auf Teilprobleme reduzieren oder aber gewisse (operative) Veränderungen zunächst selbst untersuchen

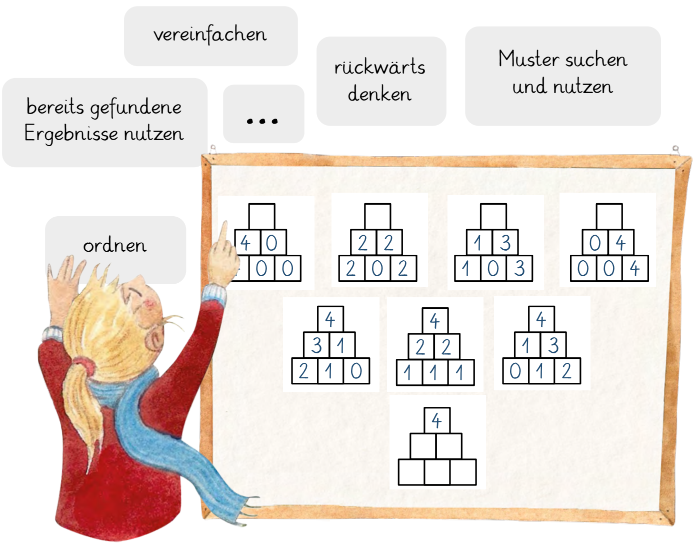
Fragen zum Forschen



https://pikas.dzlm.de/node/556

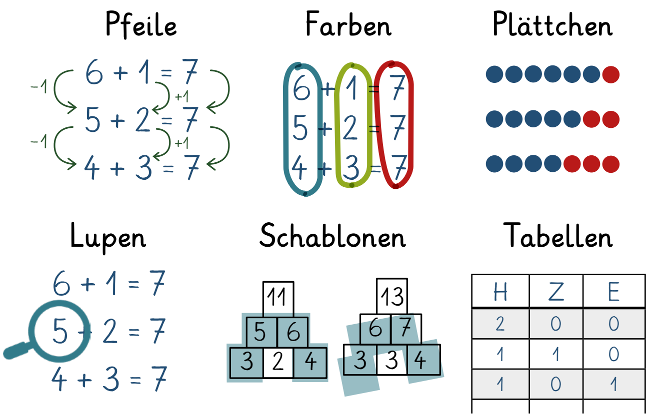
- **Strategien zum Forschen** sind Vorgehensweisen, die den Lernenden helfen können, Aufgaben strukturiert anzugehen. Sie sollten den Lernenden im Problemlöseprozess immer wieder angeboten werden, wie z. B. ‚Ordne mal alle Zahlenmauern' oder ‚Was fällt dir auf, wenn du dir die mittlere Reihe anschaust?' (Muster suchen und nutzen). Ihr Gebrauch sollte in gemeinsamen Reflexionsphasen besprochen werden, sodass zunehmend mehr Lernende sie kennen und für sich selbst und im Austausch mit anderen nutzen können.

Strategien zum Forschen



- Mit **Mitteln zum Forschen** sind non-verbale Darstellungsmittel wie Pfeile, der Gebrauch von Farben, Plättchen, Lupen, Schablonen, Tabellen, Ziffernkarten oder Diagrammen gemeint. Sie dienen zum einen als Strukturierungshilfe im Prozess des Bearbeitens der Aufgaben (markieren, um zu entdecken) und zum anderen auch zur Dokumentation des Lösungsprozesses (markieren, um anderen erklären zu können).

Mittel zum Forschen



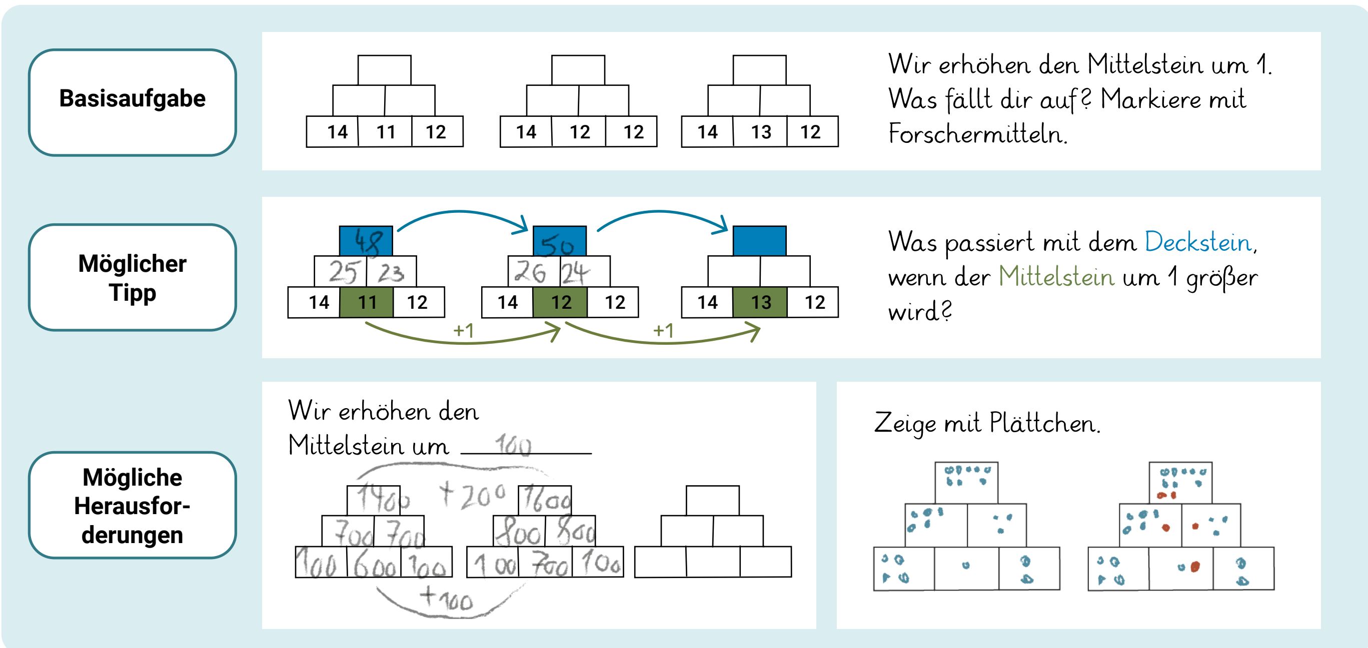
Fragen, Strategien und Mittel zum Forschen stellen für Kinder einerseits eine Lernhilfe dar, sind andererseits aber immer auch Lernstoff. Insofern ist es wichtig, im Unterricht immer wieder ihren Gebrauch anzuregen, zu unterstützen sie zielführend einzusetzen und über ihre Verwendung mit den Kindern zu sprechen.

Ich fördere durchgängig (auch) die prozessbezogenen Kompetenzen.

Die KMK-Bildungsstandards umschreiben den Stellenwert und die Entwicklung der prozessbezogenen Kompetenzen für den Mathematikunterricht wie folgt: „Die prozessbezogenen Kompetenzen verdeutlichen, dass die Art und Weise der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragen ein wesentlicher Teil der Entwicklung mathematischer Grundbildung ist. Deren Entwicklung hängt nicht nur davon ab, welche Inhalte unterrichtet werden, sondern in mindestens gleichem Maße davon, wie sie unterrichtet werden (...)" (KMK 2022, S. 7). Die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen berücksichtigt vom ersten Schuljahr an nicht nur das *Was*, sondern auch das *Wie* beim Mathematiklernen und trägt zur mathematischen Grundbildung bei. Außerdem ermöglicht sie, vorhandene Kenntnisse und Wissensbestände zu aktivieren, neu zu kombinieren sowie zu festigen, und sichert somit inhaltsbezogene Kompetenzen. Dazu bedarf es des Einsatzes kognitiv aktivierender Aufgaben.
Den Kindern sollte bewusst gemacht werden, dass es im Mathematikunterricht nicht nur um das Rechnen geht, sondern neben weiteren Inhalten wie zum Beispiel Geometrie, Kombinatorik, Umgang mit Daten und Sachsituationen auch prozessbezogene Kompetenzen in den Blick genommen werden. Hierfür kann der Kinderlehrplan als Gesprächsgrundlage dienen (*pikas.dzlm.de/node/555*, s.S.13). Obwohl er nicht alle Bereiche der Mathematiklehrpläne vollständig abbildet, bietet er einen Überblick zur Einordnung der aktuellen Themen des Unterrichts.
Zudem sollten Lehrkräfte nicht nur mit Blick auf die inhaltsbezogenen, sondern auch auf die prozessbezogenen Kompetenzen mit der Heterogenität der Lernenden ‚rechnen'. Daher ist es notwendig, die Lernstände der Kinder zu berücksichtigen und die Aufgaben auch individuell zu adaptieren, um den Lernenden die Möglichkeit zu geben, verschiedene Vorgehensweisen auf unterschiedlichen Niveaus entwickeln zu können.

Ich mache kognitiv aktivierende Lerngelegenheiten durch Aufgabenadaptionen allen Lernenden zugänglich.

Wo immer es möglich ist, sollten Lehrpersonen daher die Bedingungen dafür schaffen, dass alle Schülerinnen und Schüler mit ihren jeweiligen Lernmöglichkeiten einen Zugang zur Aufgabenstellung erhalten können. Das kann z. B. durch Adaptionen erleichtert werden, wie sie auf *pikas-mi.dzlm.de/node/49* zu finden sind. Hierbei handelt es um den Einsatz der Mittel zum Forschen, aber auch um ...



Das machen wir in Mathe

So lernen wir

Probleme lösen

- herausfordernde Aufgaben mit Hilfe von Forscherstrategien und Forscherfragen lösen
- Forschermittel nutzen
- verschiedene Lösungen und Lösungswege vergleichen

Sachaufgaben bearbeiten

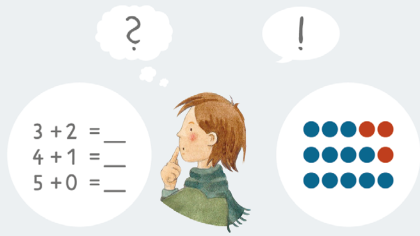
- Sachaufgaben verstehen
- Sachaufgaben mit Hilfe einer Skizze, Tabelle oder Rechnung lösen
- eigene Sachaufgaben erfinden

sich austauschen

- in der Mathesprache Ideen erklären und zeigen
- gemeinsam an Lösungen arbeiten und sich dabei an Absprachen halten

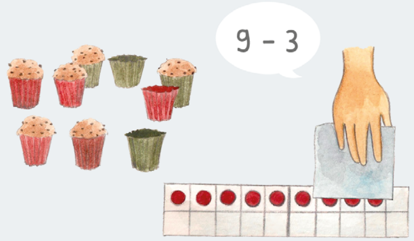
begründen

- Vermutungen aufstellen
- erklären, warum eine Vermutung stimmt



darstellen

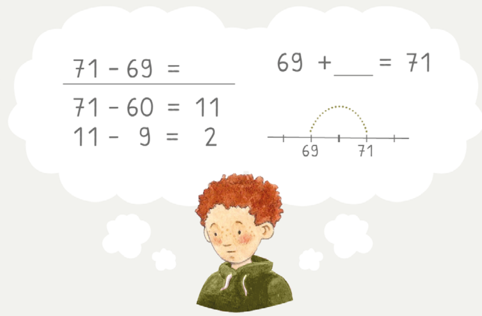
- Aufgaben und Lösungswege mit Materialien, Zeichnungen, Zahlen oder Texten unterschiedlich darstellen
- über Darstellungen nachdenken



Das lernen wir

Zahlen und Operationen

- Vorstellungen von Zahlen und Aufgaben haben
- verschiedene Rechenwege verstehen und nutzen
- Aufgaben geschickt rechnen
- Aufgaben sicher lösen



Raum und Form

- Formen und Körper kennen und mit ihnen handeln
- Formen und Körper zeichnen und untersuchen
- Formen und Körper im Kopf bewegen
- Wege im Kopf gehen

Größen und Messen

- sich zu Größen etwas vorstellen
- Messgeräte kennen und nutzen
- Einheiten kennen und mit Größen rechnen
- Sachaufgaben und Rechengeschichten lösen und erfinden

Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten

- Daten sammeln und darstellen
- Daten in Darstellungen lesen und verstehen
- Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen beschreiben und erklären
- verschiedene Kombinationsmöglichkeiten finden

- den Einsatz offener Aufgaben: Die Aufgabenauswahl wird innerhalb eines durch die Aufgabenstellung aufgespannten Rahmens, der vielfältige Wahlmöglichkeiten eröffnet, durch die Schülerinnen und Schüler selbst realisiert. Komplexität und Anspruchsniveau können sie demnach, ausgehend von ihren Lernmöglichkeiten, selbst bestimmen.
- die Nutzung unterschiedlicher Darstellungsformen: Die Bearbeitung der Aufgabe wird durch die Nutzung und Vernetzung verschiedener Darstellungsformen (Handlungen am Material, Nutzung bildlicher Darstellungen, ...) erleichtert.
- das Bereithalten von Tipps und Herausforderungen: Die Bearbeitung der Aufgabenstellung wird durch unterschiedliche Formen der individuell angepassten Lernunterstützung (Wortspeicher, Tipps, Hilfsaufgaben, Sternchenaufgaben, Transferaufgaben, ...) erleichtert (s. S. 14).

Diese und weitere Möglichkeiten der Aufgabenadaption sind im Unterricht in der Regel nicht unabhängig voneinander zu sehen. Die Basisaufgabe stellt eine Variation der o. g. Zahlenmauer insofern dar, als dass höhere Zahlenwerte verwendet wurden. Die Tipps und die Herausforderungen bieten Möglichkeiten, dass sowohl Lernende, die noch Unterstützung benötigen, als auch solche, die durch weiterführende Aufgaben herausgefordert werden, angesprochen werden können (vgl. auch die allgemeineren Ausführungen dazu auf S. 10). Dabei fließen die Ideen, den Einsatz von Mitteln zum Forschen anzuregen, ebenso ein, wie der Einsatz offener Aufgaben oder die Nutzung unterschiedlicher Darstellungsformen *(pikas-mi.dzlm.de/node/71).*

Durchgängigkeit:

LANGFRISTIGES LERNEN ERMÖGLICHEN

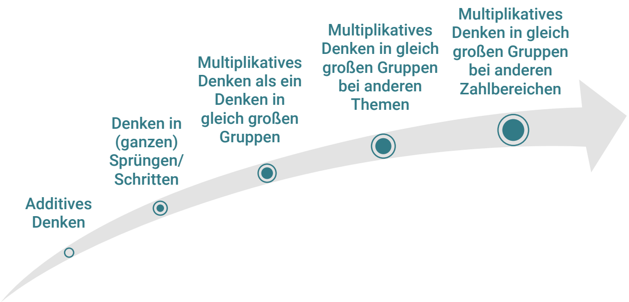
Das Prinzip der Durchgängigkeit ist eine Variante des Spiralprinzips, das die langfristigen Lernpfade über Unterrichtseinheiten hinweg und den Unterricht über Schuljahre miteinander verknüp-fend in den Blick nimmt: Wenn Lernende nachhaltig lernen sollen, ist es wichtig, bei den Lernzielen diejenigen Kompetenzaspekte zu fokussieren, die langfristig relevant und für spätere Lernstufen fortsetzbar sind. Die langfristigen Zusammenhänge entlang der Curriculumspirale sollten zudem explizit immer wieder durch Anknüpfung an Vorangehendes hergestellt werden, denn mit Verknüpfung verankert sich das Gelernte besser im Gedächtnis.

Viele mathematische Themen und Inhalte bauen hierarchisch aufeinander auf. Werden spezifische Verstehensgrundlagen nicht von Beginn an angelegt, so ist das Gelernte langfristig nicht ausbaufähig mit der Konsequenz, dass ein mathematisches Weiterlernen nicht oder nur schwer möglich ist, die Kinder immer wieder neue für sie zusammenhangslose Einzelfakten auswendig lernen müssen und daher oft scheitern. Das große Problem ist, dass dieses aus Einzelfakten bestehende Oberflächenwissen oftmals zunächst auszureichend scheint bzw. ausreicht, um die Anforderungen des Grundschulmathematikunterrichts (zumindest) zu erfüllen. Das Scheitern zeigt sich dann erst bei weiterführenden Lerninhalten, wenn z. B. in der Arithmetik andere Zahlbereiche (z. B. Bruchzahlen, Dezimalzahlen) dazukommen (vgl. Götze & Selter, i. V.).

Grundschulkinder lernen beispielsweise im zweiten Schuljahr das Einmaleins kennen. Bauen die Kinder keine Vorstellung zu dieser Rechenoperation auf (‚Was bedeutet Malrechnen?') und lernen sie alle Aufgaben nur auswendig bzw. lösen Einmaleinsaufgaben vor allem durch fortgesetzte Addition, so können sie damit viele multiplikative Aufgaben des Grundschulmathematikunterrichts lösen: ‚5 · 12 ist 12 + 12 + 12 + 12 + 12' oder ‚4 · 328 rechne ich schriftlich. Da brauche ich nur das Einmaleins'.

Aber langfristig scheitern viele Kinder, wenn das

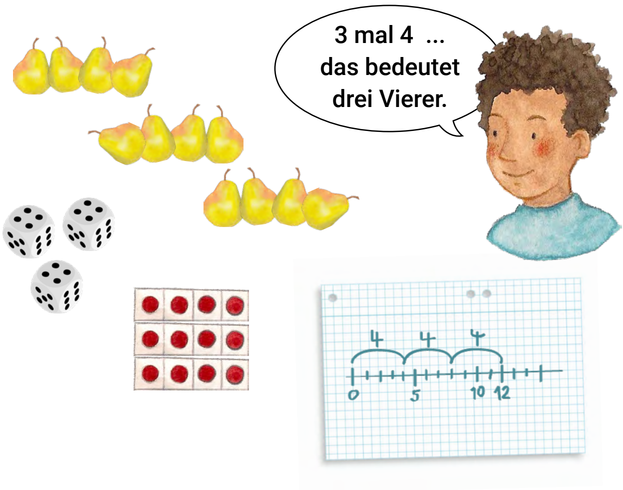
Multiplikationsverständnis auf diesem Niveau verbleibt. In der weiterführenden Schule lernen sie beispielsweise Dezimalzahlen zu multiplizieren. Das additive Wissen über Einmaleinsaufgaben reicht allerdings nicht aus, um Aufgaben wie 0,5 · 0,12 auszurechnen. Das Ergebnis ist nicht – wie viele Schülerinnen und Schüler glauben – 0,60, sondern 0,06. Aber warum? Kinder, die nicht verstanden haben, was 5 · 12 bedeutet, hinterfragen auch für 0,5 · 0,12 keine Bedeutung. Ein Scheitern ist somit vorprogrammiert.



So wundert es nicht, dass die Prozentrechnung und die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu den ‚Angstthemen' im Mathematikunterricht der weiterführenden Schulen gehören. Denn beide Themen fußen auf einem tiefgehenden Verständnis der Multiplikation, das nur einige Kinder tragfähig entwickelt haben. An diesem Beispiel soll im Folgenden das Prinzip der Durchgängigkeit illustriert werden: Es stellt sich also die Frage, welches Verständnis von Multiplikation in der Grundschule angelegt werden sollte, sodass langfristig ein Weiterlernen ermöglicht wird und welche Rolle anschauliche Darstellungsmittel in diesem Prozess spielen.

Ich nutze durchgängig tragfähige Darstellungsmittel und passende sprachliche Begleitungen zum Vorstellungsaufbau.

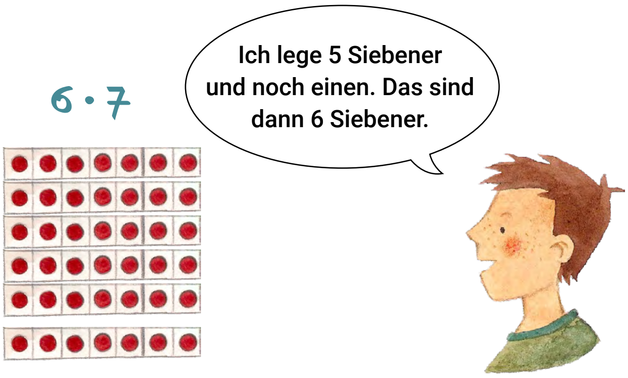
Wie bereits im Abschnitt zur Verstehensorientierung erwähnt, spielt die Darstellungsvernetzung eine bedeutsame Rolle bei der Förderung von Verstehensgrundlagen. Das gilt natürlich gleichermaßen für die Behandlung der Multiplikation im zweiten Schuljahr. Über konkrete Alltagssituationen und auch Punktebilder sollen die Kinder verstehen lernen, was ‚Malrechnen' bedeutet. Auch wenn hierfür ein alltagssprachlich erscheinender Ausdruck genutzt wird (‚mal'), erklärt der Ausdruck allein nicht die zentrale Bedeutung der Multiplikation: Gebildet und gezählt werden gleich große Gruppen, die in den Alltagssituationen und den anschaulichen Punktebildern erkannt werden müssen. Egal, in welcher Handlung oder Darstellung die Kinder z. B. die Einmaleinsaufgabe 3 · 4 erkennen, es gilt immer, die Bedeutung der Malaufgabe als ‚drei Vierer' sprachlich herauszustellen: ‚Wo siehst du die drei Vierer, also 3 mal 4, in den unterschiedlichen Darstellungen?'



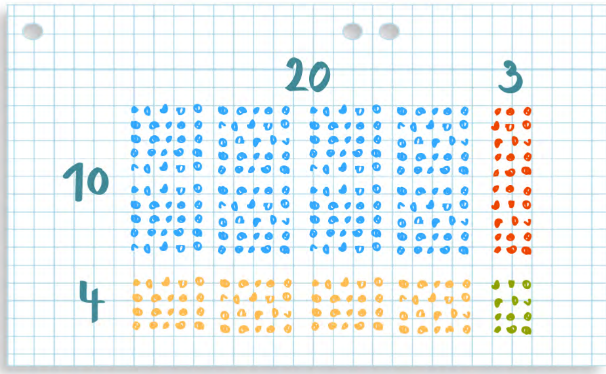
Die Arbeit mit den Mitteln zum Forschen (vgl. Abschnitt ‚Kognitive Aktivierung') oder auch Zeigegesten können die Deutung der drei Vierer in den Bildern unterstützen. Zudem kann dadurch deutlich werden, dass die Zahlen in Einmaleinsaufgaben eine unterschiedliche Bedeutung haben. Während die erste Zahl (der Multiplikator) anzeigt, wie viele Gruppen es sind, zeigt die zweite Zahl (der Multiplikand) die Größe der Gruppen an. Mit diesem grundlegenden Verständnis von Multiplikation als ein Denken und Arbeiten mit gleich großen Gruppen kann langfristig gut weitergearbeitet werden.
Den Darstellungsmitteln kommt für das langfristige Lernen eine zentrale Bedeutung zu, denn sie sollen auch für das Weiterlernen der Multiplikation tragfähig sein, dies sind Punktefelder und Zahlenstrahl mehr als die einzelnen Gruppenbilder. Am Zahlenstrahl lässt sich weiterhin verstehen, dass z.B. 2 · 0,12 zwei Sprünge der Länge 0,12 sind und 0,5 · 0,12 nur noch ein halber Sprung der Länge 0,12 ist. Damit wird deutlich, warum das Resultat 0,06 kleiner ist als die Faktoren. Es wird also weiter in Sprüngen gezählt, aber die Sprünge können nun auch kleiner als 1 sein. Damit die Lernenden diese multiplikativen Strukturen in den anschaulichen Darstellungen erkennen, bedarf es der passenden sprachlichen Begleitung. Aber nicht nur für das Weiterlernen in der Sekundarstufe sind anschauliche Darstellungen und deren sprachliche Begleitung von Bedeutung, wie der folgende Abschnitt zeigt.

Ich nutze die Darstellungsvernetzung fortlaufend, um die Kontinuität mathematischer Strukturen zu verdeutlichen.

Jede Lehrkraft kennt das Problem, dass die Ergebnisse der Einmaleinsaufgaben immer wieder vergessen werden. Es hilft in der Regel aber nur wenig, wenn die Kinder (mühsam und zeitintensiv) alle Aufgaben wiederholt neu lernen müssen. Vielmehr brauchen sie Strategien, die ihnen helfen, sich an vergessene Ergebnisse zu erinnern. Darüber hinaus kann die Automatisierung nur langfristig gelingen, wenn die Kinder keine Einzelfakten abspeichern, sondern die Aufgaben möglichst miteinander vernetzt haben. Um dieses Wissensnetz aus Einmaleinsaufgaben entwickeln zu können, werden die bereits erarbeiteten und damit bekannten mathematischen Strukturen in den Punktebildern genutzt, um die Zusammenhänge zwischen Einmaleinsaufgaben erklären und damit auf dem Weg zur Automatisierung nutzen zu können:

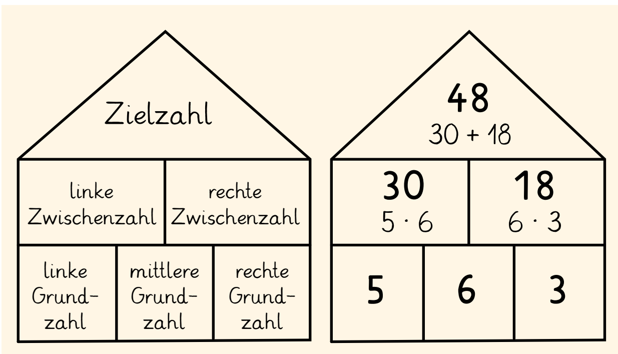


Für 6 · 7 kann die einfache Aufgabe 5 · 7 helfen, denn zu 5 · 7 kommt ein Siebener dazu. Ohne die anschaulichen Darstellungen und ohne die erläuternde Sprache bleibt für viele Kinder ungeklärt, warum von 5 · 7 zu 6 · 7 ein Siebener dazukommt. Schließlich verändert sich die erste Zahl um eins und die zweite verändert sich gar nicht. Das Ergebnis verändert sich aber um die Zahl 7, die sich in den symbolischen Aufgaben gar nicht verändert hat. Die Darstellungsmittel und die sprachliche Begleitung ermöglichen eine vertiefte Auseinandersetzung mit dem betreffenden mathematischen Inhalt und verdeutlichen im Fall der Multiplikation, wie die Einmaleinsaufgaben zusammenhängen.
Aber auch jenseits des kleinen Einmaleins bleiben die Darstellungsmittel bedeutsam und ermöglichen, dass das Verständnis für multiplikative Strukturen weiter vertieft werden kann. So helfen sie einzusehen, warum 14 · 23 nicht 212 als Summe von 10 · 20 und 4 · 3 ergibt, sondern bei einer stellenweisen Zerlegung vier Teilaufgaben in 14 · 23 stecken, nämlich 10 · 20 + 10 · 3 + 4 · 20 + 4 · 3. Auch bei der Multiplikation von Dezimalbrüchen 0,5 · 0,12 kann hieran wieder gut angeschlossen werden.

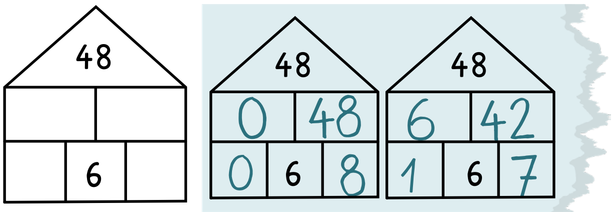


Die Beispiele zeigen, warum wiederkehrende und sich ggf. erweiternde Darstellungsmittel nicht nur zur Einführung eines neuen Themas oder nur für mathematisch leistungsschwächere Kinder genutzt werden sollten. Mit den Darstellungen können einerseits zentrale mathematische Strukturen verdeutlicht werden, andererseits bieten sie Potenzial für tiefgehende Begründungen (vgl. Götze & Selter, 2024), wie das folgende Beispiel zeigt.

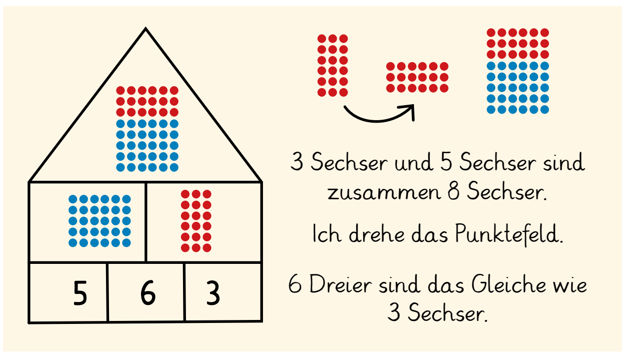
Ich nutze durchgängig tragfähige Darstellungen als Kommunikations- und Argumentationsmittel.



Bei dem Aufgabenformat des Mal-Plus-Hauses werden benachbarte Grundzahlen multipliziert. Die Ergebnisse werden als Zwischenzahlen eingetragen. Die Zwischenzahlen werden wiederum addiert und bilden so die Zielzahl. Dieses Aufgabenformat ermöglicht viele kognitiv aktivierende Aufgabenstellungen, beispielsweise wenn nur die mittlere Grundzahl sowie die Zielzahl vorgegeben werden.



Die Kinder sind dann nicht nur gefordert, verschiedene Lösungen für dieses unvollständige Mal-Plus-Haus zu finden und dabei die Mittel und Strategien zum Forschen zu benutzen. Sie sollen auch entdecken, dass die linke und rechte Grundzahl addiert immer 8 ergeben. Ferner sind sie gefordert, diesen Zusammenhang zu erklären. Dafür brauchen sie das passende Darstellungsmittel des Punktefeldes und die Sprache der gleich großen Gruppen. Überlegen Sie an dieser Stelle doch selbst, wie Sie diesen Zusammenhang erklären würden. Das folgende Bild kann Ihnen hierbei sicherlich helfen. Können Sie erkennen, wie und warum sich 5 · 6 und 6 · 3 zu 8 · 6 ergänzen?



Kommunikationsförderung:

ÜBER MATHEMATIK SPRECHEN

Der Austausch untereinander und mit der Lehrkraft ist aus zwei Gründen entscheidend: Lernende erwerben anspruchsvolle Lernziele nur im (angeleiteten) Gespräch, weil sie dann angeregt werden, genauer über die Dinge nachzudenken und evtl. auch zu begründen oder zu widerlegen. Dadurch wird eine tiefere Verarbeitung des Wissens angeregt. Das Kommunizieren über Mathematik wird allerdings erst gelernt und sollte für viele Schülerinnen und Schüler auch unterstützt werden. Hierfür müssen systematisch und kontinuierlich Lerngelegenheiten geschaffen werden.

Das vermeintlich sprachfreie Unterrichtsfach Mathematik ist gar nicht so sprachfrei, wie häufig angenommen wird. Das verdeutlichen bereits die in den Bildungsstandards aufgeführten Kompetenzerwartungen, in denen es heißt, dass die Kinder *Rechenwege, Muster und Strukturen* sowie *mathematische Zusammenhänge beschreiben und begründen* und dabei *zunehmend Fachausdrücke* benutzen sollen (KMK, 2022). Diese Tätigkeiten sind von zentraler Bedeutung, denn ohne einen Austausch über Mathematik lernen die Kinder keine neuen Denkweisen kennen und können damit die eigenen mathematischen Kompetenzen kaum weiterentwickeln. Ebenso können Fehler bzw. Fehlvorstellungen am besten kommunikativ ausgehandelt werden, da gemeinsam geklärt werden kann, warum ein Rechenweg oder eine Vorgehensweise nicht in dieser Weise funktioniert. In einem qualitätsvollen Mathematikunterricht arbeiten Kinder somit nicht die gesamte Mathematikstunde still und für sich an ihren individuellen Heften. Für die individuelle Weiterentwicklung und zur Klärung der Fragen nach dem ‚Warum?' (vgl. Abschnitt „Verstehensorientierung"), bedarf es auch des gemeinsamen Austausches. Gleichwohl müssen viele Kinder erst sukzessive lernen, mathematische Gespräche zu führen. Nicht selten fehlen ihnen dafür die Erfahrung, was eine gute Erklärung ausmacht und die mathematisch passenden Ausdrücke. Es stellt sich daher die berechtigte Frage, mit welcher Fokussierung der Mathematikunterricht ausgehend von den individuellen Sprachkompetenzen der Kinder sprachbildend gestaltet werden kann.

Ich mache mir die zentrale Bedeutung von Sprache in mathematischen Verstehensprozessen von Kindern bewusst.

Mathematische Verstehenshürden können auch sprachlich bedingt sein. Dies trifft aber nicht in erster Linie für die Vielzahl an spezifischen Fachausdrücken wie beispielsweise ‚Summe', ‚addieren' oder auch ‚Symmetrieachse' zu. Bereits vermeintlich einfach zu verstehende grundschulspezifische Ausdrücke können durch Bedeutungsverschiebungen dazu führen, dass Kinder zentrale Verstehensgrundlagen nicht erwerben. So kennen und nutzen die Kinder den multiplikativen Ausdruck ‚mal' in der Alltagssprache in einer vollkommen anderen Bedeutung als im Mathematikunterricht: „Jetzt bin ich aber mal dran" oder auch „Ich habe mal mit meiner Familie einen Ausflug gemacht." Im Mathematikunterricht muss der Ausdruck ‚mal' aber – wie oben bereits erwähnt – als eine Vervielfachung von gleich großen Gruppen verstanden werden: „3 mal 4, das sind 3 Vierer." Diese multiplikative Vorstellung wird durch das Wort ‚mal' aber nicht deutlich. Nicht selten sind Kinder im Mathematikunterricht kognitiv stark gefordert, die (mathematikspezifische) Sprache zu verstehen, sodass bei manchen Kindern kaum noch kognitive Ressourcen freibleiben, um sich mit den mathematischen Zusammenhängen zu beschäftigen. Das bedeutet im Umkehrschluss aber nicht, dass Sprache im Mathematikunterricht vermieden werden sollte, denn ein sprachbewusster Mathematikunterricht kann sehr zum mathematischen Verständnis beitragen.

Ich unterstütze die Sprache der Kinder durch das gemeinsame Entwickeln konkreter Sprachmittel.

Sprache hat im Mathematikunterricht nicht nur eine kommunikative Funktion, sondern auch eine kognitive.

Kommunikative Funktion von Sprache
*Sprache als **Kommunikationsmittel***

um als Mittel der Verständigung mit anderen Ergebnisse und Vorgehen zu besprechen, auszutauschen und zu reflektieren

Die kommunikative Funktion von Sprache wird insbesondere dann relevant, wenn Kinder ihre individuellen Vorgehensweisen oder Entdeckungen in Worte fassen sollen. Zeitgleich sind die Kinder gefordert, die Verbalisierungen anderer Kinder verstehen zu können. Sprachliche Schwierigkeiten entstehen genau dann, wenn die Kommunikation und damit die kommunikative Funktion von Sprache gestört ist: Das Verbalisieren gelingt nicht oder nur mit sehr individuellen Ausdrucksweisen. Diese individuellen Ausdrucksweisen sind für die zuhörenden Kinder und auch für die Lehrkraft herausfordernd, denn sie bedürfen oft der Interpretation, was mit dem Gesagten gemeint sein könnte. Es bedarf somit der Erarbeitung und Unterstützung von gemeinsamen Sprachmitteln, die die Kinder sowohl beim Formulieren als auch beim Nachvollziehen von mathematischen Aussagen und Texten unterstützen.
Weniger direkt beobachtbar, aber umso bedeutsamer ist Sprache in ihrer kognitiven Funktion als Denkmittel.

Kognitive Funktion von Sprache
*Sprache als **Denkmittel***

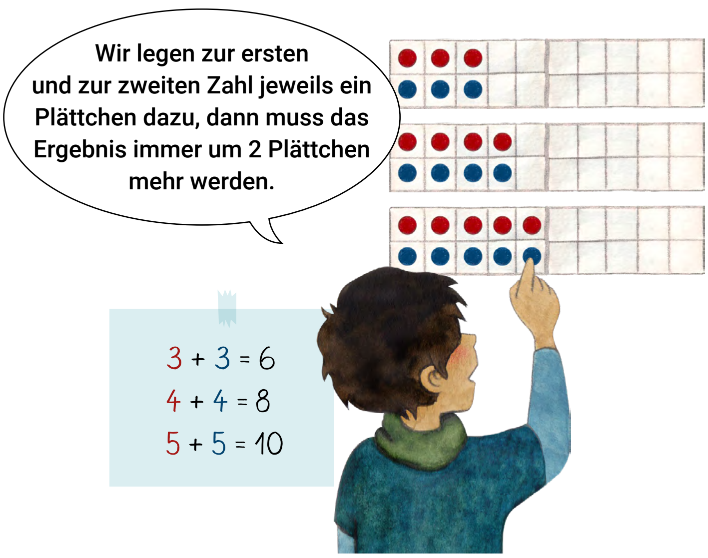
um einen Sachverhalt inhaltlich zu begreifen und um das eigene Wissen zu strukturieren, anzupassen und zu erweitern

Um das eigene Wissen strukturieren, anpassen und erweitern zu können, bedarf es jener Sprachmittel, die dazu beitragen, dass die Kinder den betreffenden mathematischen Inhalt richtig durchdenken können. Für das Verstehen der Multiplikation ist damit gemeint, dass Ausdrücke wie ‚malrechnen' oder ‚multiplizieren' den Verstehens-prozess nicht unterstützen. Aussagen wie „3 mal 4, das sind 3 Vierer.“ unterstützen unmittelbar die Verstehensprozesse und damit die kognitive Funktion von Sprache. In einem sprachbildenden Mathematikunterricht müssen somit immer beide Funktionen von Sprache adressiert werden.

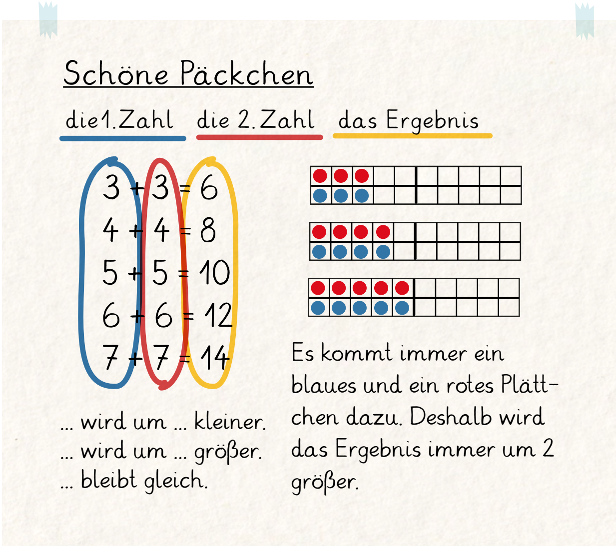
Ich unterstütze die Sprache der Kinder durch das gemeinsame Entwickeln konkreter Sprachmittel.

Mittel zum Forschen (vgl. Abschnitt „Kognitive Aktivierung") können zwar zur Sprachentlastung genutzt werden, sodass durch die Markierungen individuelle Entdeckungen deutlich gemacht werden können. Allerdings adressiert der Gebrauch der Mittel zum Forschen niemals direkt die kognitive Funktion von Sprache. Hierfür sind sogenannte bedeutungsbezogene Sprachmittel wichtig. Damit sind oftmals die Sprachmittel gemeint, die sich auf die konkreten Vorstellungen und damit in der Regel auf die anschaulichen Darstellungen beziehen. Zur Beschreibung des folgenden schönen Päckchens unterstützen Sprachmittel wie ‚die erste Zahl‘, ‚die zweite Zahl‘, ‚das Ergebnis‘, ‚wird immer um ... größer‘ die kommunikative Funktion von Sprache.

Die Kinder bekommen so Sprachmittel an die Hand, mit Hilfe derer sie das Muster im Päckchen beschreiben können. Um das Muster allerdings zu erklären, bedarf es der bedeutungsbezogenen Sprache der Darstellungsmittel: „Zu jeder Zahl wird ein Plättchen dazugelegt. Darum kommen insgesamt zwei Plättchen dazu.“ Werden sowohl Kommunikations- als auch Denkmittel gefördert, können die Kinder Entdeckungen nicht nur verbalisieren, sondern auch erklären.



Um sowohl diese Kommunikations- als auch Denkmittel für alle Kinder langfristig zu sichern, bieten sich sogenannte Sprachspeicher an. Darunter sind Plakate zu verstehen, auf denen die zentralen Sprachmittel, aber auch Visualisierungen sowie Mittel zum Forschen für ein betreffendes Unterrichtsthema festgehalten werden. Sprachspeicher werden in der Regel ausgehend von den individuellen Sprachmitteln der Kinder gestaltet, d. h. die aktuellen Sprachmittel der Kinder werden bewusst aufgegriffen und durch neue Sprachmittel erweitert. So können Sprachspeicher über Schuljahre hinweg und damit langfristig zur Sprachentwicklung der Kinder beitragen.



Ich gestalte meinen Unterricht so, dass er die Kinder zu Sprachhandlungen auffordert.

Um die individuellen Sprachmittel der Kinder zu erweitern, bedarf es geeigneter Aufgabenstellungen. Viele Aufgabenstellungen in Lehrwerken erwecken auf den ersten Blick den Eindruck, dass sie die Kinder zu aktiven Sprachhandlungen und zum Argumentieren auffordern. Das Beispiel auf der folgenden Seite zeigt, dass die Aufforderung eines gemeinschaftlichen Vergleichs letztlich diesem Anspruch nicht zwangsläufig gerecht wird.

Die Kinder vergleichen hier lediglich den Fehler im Päckchen und im Zentrum des Austauschs steht oftmals die passende Korrektur, nicht aber das mathematische Muster. Mit solchen Situationen werde Sprachhandlungen wie das Argumentieren nicht angeregt. Werden derartige Arbeitsaufträge aber z. B. mit der Aufforderung versehen, das Muster in dem reparierten Päckchen zu erklären,

können die Kinder zu tiefergehenden Sprachhandlungen aufgefordert werden. Aufgaben und Arbeitsaufträge sollten daher einen produktiven Austausch ermöglichen und zeitgleich ist es als Lehrkraft wichtig, Raum für diesen Austausch zu lassen.

Vernetztheit der Prinzipien

Die Bedeutungsumfelder der fünf Prinzipien gehören zu den Kernbeständen der Mathematikdidaktik der Primarstufe, wenn auch mit unterschiedlichen Namen. So kann man beispielsweise folgende Zuordnungen treffen, die die Prinzipien aus PIKAS wiedergeben (Selter et al., 2017), weitere wären möglich.

Lernendenorientierung und Adaptivität

Lernen auf eigenen Wegen
Natürliche Differenzierung
Prozessorientierte Lernstandserfassung
Diagnosegeleitete Förderung
Ermutigende Leistungsbeurteilung

Verstehensorientierung

Operatives Prinzip
Darstellungsvernetzung
Fortschreitende Mathematisierung

Kognitive Aktivierung

Genetisches Prinzip
Produktives Üben
Aktiv-entdeckendes Lernen

Durchgängigkeit

Spiralprinzip
Prinzip der Fortsetzbarkeit

Kommunikationsförderung

Fachbezogene Sprachbildung
Lernen von- und miteinander

Es sind im Wesentlichen pragmatische Gründe, die uns dazu bewogen haben, eine Beschränkung auf fünf Prinzipien vorzunehmen: Weniger ist mehr.
Jedoch: Unterricht ist viel zu komplex, als dass es Patentrezepte für die Vielzahl der in der Vorbereitung, Durchführung und Auswertung des Unterrichts zu treffenden Entscheidungen geben könnte. Dennoch geben die Prinzipien allgemeine Orientierungen, vor deren Hintergrund Ideen eingebaut, adaptiert und für die eigentlichen Zielsetzungen fruchtbar gemacht werden können, um so – auch im Team an der Schule – an der Qualität von Unterricht zu arbeiten. Dabei liegt gerade im Zusammenspiel der fünf Prinzipien der Schlüssel zur fachdidaktischen Unterrichtsqualität (Holzäpfel et al. 2024):

- Kognitive Aktivierung bedarf der Lernendenorientierung: Denn Vorstellungen und Vorerfahrungen, die Lernende mitbringen, spielen in ihren Denkprozessen eine wichtige Rolle.
- Adaptivität bedarf der Kommunikationsförderung: Nur differenzierte Arbeitsblätter (individuell) bearbeiten zu lassen genügt nicht. Erst das moderierte Gespräch unterstützt verstehensorientierte Lernprozesse.
- Verstehensorientierung bedarf der Durchgängigkeit: Je weiter in der Schullaufbahn vorangeschritten wird, desto schwieriger wird es für einige Kinder, Konzepte, Strategien und Verfahren zu verstehen, weil der Verstehensaufbau eine vorangehende Fundierung voraussetzt. Je konsequenter eine Schule Durchgängigkeit im Blick hat, desto besser lassen sich Lücken in der Bildungsbiografie aufarbeiten – je früher, desto besser.
- usw. usf.

Und da stellen sich Fragen (Holzäpfel et al. 2024, S. 6) wie:

- Mit welchen Aufgaben können Denkweisen und Lernprozesse von Lernenden möglichst informativ sichtbar gemacht werden (eigene Denkwege und Strategien, typische Fehlvorstellungen und Schwierigkeiten; Lernendenorientierung und Adaptivität)?
- Was müssen die Lernenden verstanden haben, um die nächsten Lernschritte erfolgreich zu absolvieren (Verstehensorientierung)?
- Durch welche Erarbeitungsaufgaben, Methoden und Medien kann das Vorwissen der Lernenden mobilisiert und eigene Entdeckungen hin zu den ausgewählten Lernzielen ermöglicht werden (kognitive Aktivierung)?
- Sollte ein Darstellungsmittel im Unterricht eingeführt werden, wenn es oder seine Fortsetzungen im weiteren Unterricht nicht (mehr) benutzt werden (Durchgängigkeit)?
- Wie können Sprachmittel und Sprachhandlungen gefördert werden, damit alle Lernenden am Unterricht teilnehmen können (Kommunikationsförderung)?

Nun werden Lesende vielleicht denken, dass sie das alles schon kennen; das sei doch ‚ein alter Hut'. Das mag sein. Unseres Erachtens kann es im Kontext der Steigerung der Unterrichtsqualität auch nicht vorrangig darum gehen, immer wieder neue Lernumgebungen zu konstruieren, immer wieder neue Materialien zu erfinden oder immer neue Möglichkeiten der Differenzierung einzusetzen – weniger ist mehr!
Wichtiger als Innovation erscheint uns Weiterentwicklung – die Weiterentwicklung des Unterrichts durch ein wachsendes Maß an Berücksichtigung der fachdidaktischen Kriterien für Unterrichtsqualität, so wie sie in diesem Papier beschrieben sind.

Bei der Weiterentwicklung des eigenen Mathematikunterrichts geht es u. E. also weniger um Innovation in dem Sinne, dass alles, was neu ist, automatisch gut ist, und dass alles, was gut ist, automatisch neu sein muss. Nach unserer Auffassung geht es vermehrt darum, die im eigenen Unterricht zu beobachtenden Praktiken und die ihnen zugrunde liegenden Überzeugungen vor dem Hintergrund der fünf Prinzipien zu reflektieren – und sich in diesem Sinne zu fragen, wie und an welchen Stellen in den nächsten Unterrichtsstunden mehr davon gemacht werden kann.

Literatur

Götze, D., Selter, Ch. & Zannetin, E. (2019). *Das Kira-Buch: Kinder rechnen anders.* Seelze: Klett Kallmeyer.

Götze, D. & Selter, Ch. (2024). *Arithmetische Basiskompetenzen. Erläuterungen und Beispiele zum Orientierungsrahmen.* pikas.dzlm.de/node/2285.

Götze, D. & Selter, Ch. (i. V.). *Langfristige Lernprozesse im Blick. Hintergrundinformationen und Beispiele zum Prinzip der Durchgängigkeit.* pikas.dzlm.de/node/2285.

Holzäpfel, L., Prediger, S., Götze, D., Rösken-Winter, B., & Selter, Ch. (2024). Qualitätsvoll Mathematik unterrichten: Fünf Prinzipien. *Mathematik lehren* (242), 2–8. quamath.de/dokumente/praxispublikation/142

KMK (Kultusministerkonferenz; 2022): *Bildungsstandards für den Primarbereich. Mathematik.* https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf (Abruf 23.07.24).

Meyer, H. (2004). *Was ist guter Unterricht?* Berlin: Cornelsen.

PIKAS-Team (2017). *Guter Mathematikunterricht. Materialien zum kompetenzorientierten Mathematikunterricht aus dem Projekt PIKAS.* Berlin: Cornelsen.

Prediger, S., Götze, D., Holzäpfel, L., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2022): Five principles for high-quality mathematics teaching. *Frontiers in Education,* 7(969212), 1–15. https://doi.org/10.3389/feduc.2022.969212

Scherer, P. & Weigand, H.-G. (2017). Mathematikdidaktische Prinzipien. In M. Abshagen, B. Barzel, J. Kramer, T. Riecke-Baulecke, B. Rösken-Winter, B., & C. Selter C. (Hg.), *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten* (S. 28–42). Seelze: Klett Kallmeyer.

In dieser Handreichung wird an manchen Stellen die Grundschrift des Grundschulverbands e.V. und der Wissenschaftlichen Einrichtung der Laborschule Bielefeld genutzt.

Herausgeber

Projekt QuaMath in Kooperation mit dem Projekt PIKAS
quamath.dzlm.de
pikas.dzlm.de
Fakultät für Mathematik / IEEM
Vogelpothsweg 87
44227 Dortmund

AUTORENSCHAFT:
Daniela Götze
Christoph Selter
Susanne Prediger
Lars Holzäpfel
Bettina Rösken-Winter
Luise Eichholz
Nadine Wilhelm

UNTER MITARBEIT VON:
Dorothea Backe-Neuwald
Lukas Baumanns
Johanna Brandt
Simone Engler
Elena Glettenberg
Annabell Gutscher
Lisa Parschauer
Kati Schroeder
Julia Stark

Abbildungen & Gestaltung: Karoline Mosen

Stand: Januar 2025