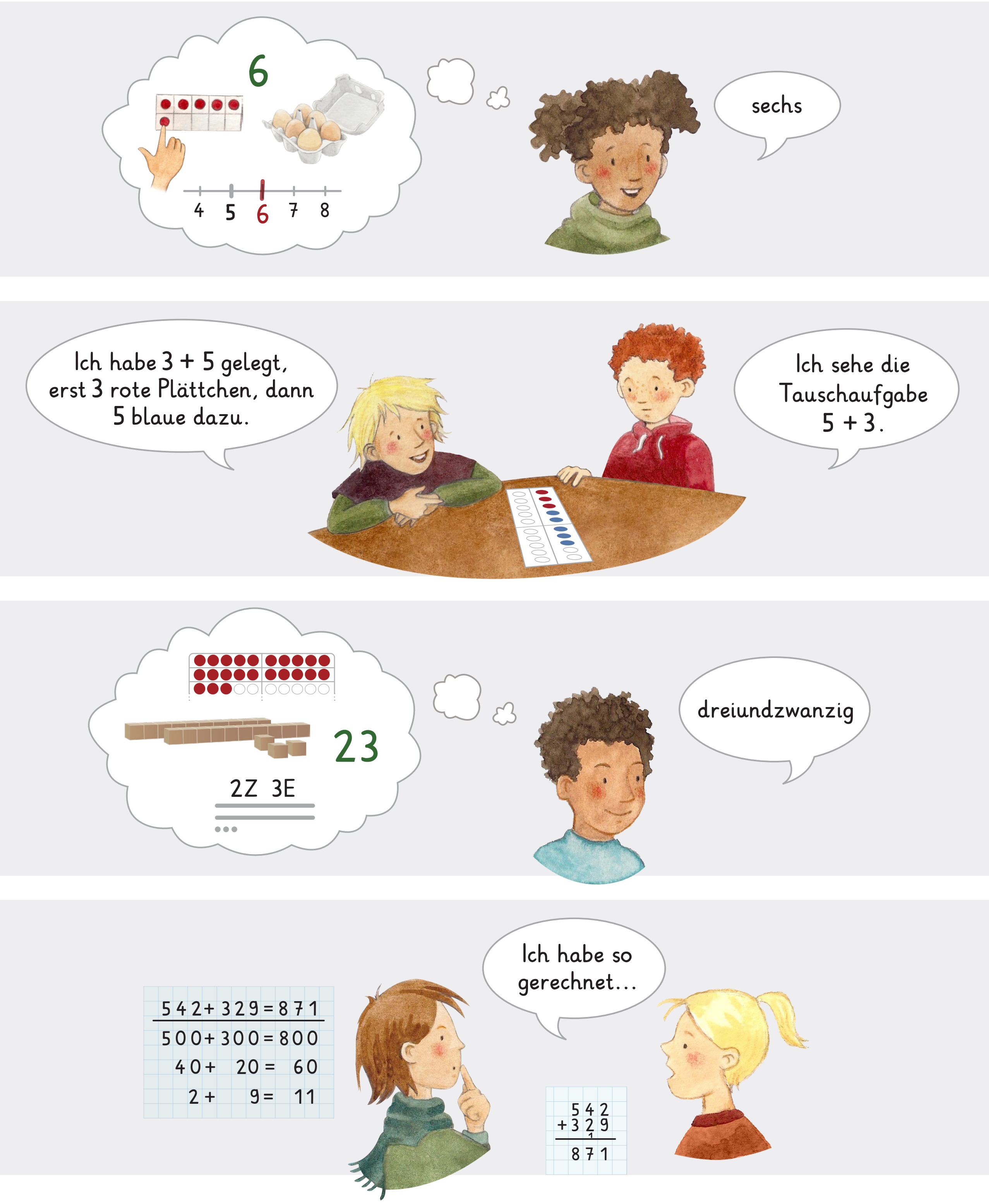
PIKAS
Deutsches Zentrum für
Lehrkräftebildung Mathematik

Ministerium für
Schule und Bildung
des Landes Nordrhein-Westfalen



Arithmetische Basiskompetenzen

Erläuterungen und Beispiele zum Orientierungsrahmen

PIKAS
Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik

Orientierungsrahmen
Arithmetische Basiskompetenzen

Verstehensgrundlagen und Grundfertigkeiten für erfolgreiches Mathematiklernen in der Primarstufe und darüber hinaus

Im Folgenden werden arithmetische Basiskompetenzen beschrieben, die die Lernenden im Verlauf der Primarstufe erwerben können sollen (SWK, 2022). Die Beispiele entstammen zwar jeweils einem bestimmten Zahlraum, sind aber stets auch auf andere Zahlräume übertragbar.

Zahlverständnis

GRUNDVORSTELLUNGEN BESITZEN
Lernende erfassen Zahlen sowohl kardinal (als Anzahlen/Mengen) als auch ordinal (als Positionen in einer Reihe). Es werden insbesondere flächige (z. B. Punktefeld) und lineare Darstellungen (z. B. Zahlenstrahl oder Rechenstrich) genutzt und miteinander vernetzt, die die Strukturen des Zehnersystems verkörpern.

DARSTELLUNGEN VERNETZEN
Lernende vernetzen Darstellungen von Zahlen (Handlung, Bild, Sprache, Mathesprache) kontinuierlich miteinander, indem sie diese einander zuordnen und den Prozess sprachlich begleiten. Zahlen werden durch Materialien und Bilder verständlich. Zahlbilder sollten daher jederzeit aktiviert werden können.

ZAHLBEZIEHUNGEN NUTZEN
Lernende nutzen die vielfältigen Zusammenhänge zwischen Zahlen. Die Nutzung der Zusammenhänge ist Grundvoraussetzung für nicht zählendes Rechnen. Zentral sind hierbei z. B. die *Teil-Ganzes-Beziehung* (6 sind 4 und 2) oder die Fähigkeit zur quasi-simultanen Anzahlerfassung (14 Plättchen sind 1 Zehner und 4 Einer).

Schnelles Kopfrechnen

ABLEITUNGSSTRATEGIEN NUTZEN
Lernende verwenden Ableitungsstrategien für das Erlernen der Aufgaben des kleinen Einspluseins und Einmaleins sowie des kleinen Einsminuseins und Einsdurcheins (Basisfakten). Es werden schwierige aus einfachen Aufgaben abgeleitet. Sie werden mit geeigneten Darstellungen kontinuierlich veranschaulicht und ihre Nutzung wird sprachlich begleitet.

BASISFAKTEN ABRUFEN
Lernende rufen Basisfakten sicher ab. Dabei steht nicht nur die Automatisierung von einzelnen Aufgaben im Vordergrund, sondern insbesondere auch die Steigerung der Geläufigkeit bei der Nutzung von Ableitungsstrategien. Beides wird später auch bei der Bearbeitung von Aufgaben zum sog. Stellenrechnen (wie 200 + 300, 5 · 400, 1000 – 200 oder 8 000 : 4) genutzt.

Operationsverständnis

GRUNDVORSTELLUNGEN BESITZEN
Lernende ordnen Aufgaben der vier Grundrechenarten und (Alltags-)Bedeutungen – wie *hinzufügen* oder *wegnehmen* – einander zu. Sie beschreiben innere Bilder von Rechenoperationen. Zur Ausbildung von Grundvorstellungen werden lineare und flächige Darstellungen genutzt, die auch für den weiterführenden Mathematikunterricht bedeutsam sind.

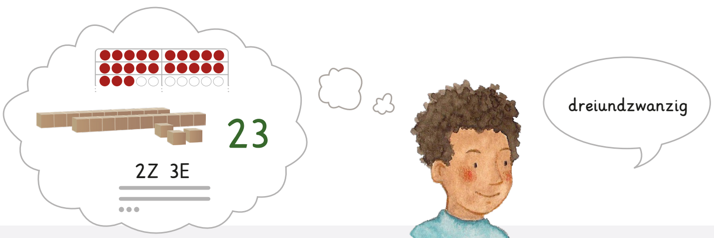
DARSTELLUNGEN VERNETZEN
Lernende vernetzen Darstellungen von Operationen (Handlung, Bild, Sprache, Mathesprache) kontinuierlich miteinander, indem sie diese einander zuordnen und den Prozess sprachlich begleiten. Operationen werden erst durch die Deutungen von Handlungen und Bildern verständlich, keineswegs durch die grundschulspezifischen Fachausdrücke *plus*, *minus*, *mal* und *geteilt* allein.

AUFGABENBEZIEHUNGEN NUTZEN
Lernende nutzen Beziehungen zwischen einzelnen Aufgaben/Rechenoperationen. Dieses ist Grundvoraussetzung für das Erlernen von Ableitungs- bzw. Rechenstrategien. Grundlagen bilden hier Rechengesetze wie das Kommutativgesetz (2 + 9 = 9 + 2), das Assoziativgesetz (8 + 5 = 8 + (2 + 3)) oder das Distributivgesetz (6 · 8 = 5 · 8 + 1 · 8) ebenso wie die Zusammenhänge zur jeweiligen Umkehroperation.

Zahlenrechnen

RECHENSTRATEGIEN VERWENDEN
Lernende verwenden Rechenstrategien für mündliches oder halbschriftliches Rechnen und können ihre Vorgehensweisen erläutern. Die Rechenstrategien werden auf der Grundlage eines tragfähigen Operationsverständnisses mit geeigneten Darstellungen kontinuierlich veranschaulicht. Dabei erfolgt kein verfrühtes Abkoppeln und ausschließliches Verwenden des Symbolischen.

SICHER RECHNEN
Lernende bewältigen bei geeigneten Aufgaben Anforderungen des mündlichen bzw. halbschriftlichen Rechnens im Zahlraum bis 1 000 und leicht darüber hinaus sicher. Es wird nicht erwartet, dass alle Lernenden alle Aufgaben mit allen Strategien rechnen können.



Stellenwertverständnis

VORSTELLUNGEN BESITZEN
Lernende fassen jeweils zehn Objekte zu einem Bündel höherer Ordnung zusammen (*bündeln*) und machen diese Operation rückgängig (*entbündeln*). Dabei nutzen sie das Prinzip des Zahlenwerts (**zwei** Zehner) und das Prinzip des Stellenwerts (zwei **Zehner**). Zum Verständnis dieser Konventionen ist die Einsicht in die Zerlegbarkeit von Zahlen (*Teil-Ganzes-Beziehung*) wichtig.

DARSTELLUNGEN VERNETZEN
Lernende vernetzen die Sprech- und die Schreibweise sowie andere Darstellungen von Zahlen kontinuierlich miteinander, die die Strukturen des Zehnersystems verkörpern. Dieses passiert zunächst mit Hilfe von Material und bildlichen Darstellungen und wird mit symbolischen Darstellungen verknüpft. Einsichten in diese Prozesse bilden eine Verständnisgrundlage für das Zahlen- und das Ziffernrechnen.

STRUKTUREN NUTZEN
Lernende nutzen Strukturen von (vorrangig flächigen) Darstellungen für das schnelle Sehen durch quasi-simultane Anzahlerfassung größerer Anzahlen (6 Zehner und 7 Einer). Tätigkeiten des schnellen Sehens vertiefen das Verständnis für das Dezimalsystem: Gebündelte Einheiten wie Zehner oder Hunderter werden nicht einzeln abgezählt, sondern können als Einheit gedacht werden.

Ziffernrechnen

ALGORITHMEN NACHVOLLZIEHEN
Lernende verwenden die Algorithmen des schriftlichen Rechnens und können ihre Vorgehensweisen erläutern. Da Fehler häufig auf Verständnisdefiziten beruhen, wird im Unterricht gemeinsam über die einzelnen Schritte gesprochen. Gemeinsamkeiten und Unterschiede der halbschriftlichen Strategie *Stellenweise* (Ausnahme bei der Division: *Schrittweise*) und des Algorithmus werden besprochen.

ALGORITHMEN VERSTÄNDIG NUTZEN
Lernende bearbeiten Aufgaben zum schriftlichen Rechnen – mit Ausnahme von Aufgaben zur schriftlichen Division – sicher. Die Entwicklung eines Aufgabenblicks trägt dazu bei, dass das schriftliche Rechnen nicht unverstanden ausgeführt, sondern flexibel angewendet wird.

Literatur:

SWK (2022). *Basale Kompetenzen vermitteln – Bildungschancen sichern. Perspektiven für die Grundschule. Gutachten der Ständigen Wissenschaftlichen Kommission der Kultusministerkonferenz (SWK).* www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/KMK/SWK/2022/SWK-2022-Gutachten_Grundschule.pdf

PIKAS-Team (2020). *Rechenschwierigkeiten vermeiden. Hintergrundwissen und Unterrichtsanregungen für die Schuleingangsphase.* Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.). pikas.dzlm.de/node/1219

Die beiden Quellen enthalten weiterführende Literaturhinweise. PIKAS-Team (2020) enthält zudem Anregungen zur unterrichtlichen Umsetzung. Hinweise zu *Diagnose und Förderung* finden sich unter pikas.dzlm.de/node/1660. Ausführlichere Hintergrundinformationen und zahlreiche Übungsanregungen bietet mahiko.dzlm.de.

Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen

technische universität dortmund

Hier gibt es mehr Infos und Anregungen zur Förderung mathematischer Basiskompetenzen: https://pikas.dzlm.de/node/2410

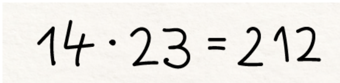
Bedeutsamkeit der Basiskompetenzen

Der Orientierungsrahmen *‚Arithmetische Basiskompetenzen‘* gibt einen primarstufenspezifischen Überblick über die Basiskompetenzen, die die Lernenden im Inhaltsbereich *‚Zahlen und Operationen‘* erwerben können sollen. Als Basiskompetenzen – im Gutachten der Ständigen Wissenschaftlichen Kommission der Kultusministerkonferenz (SWK) auch *‚basale Kompetenzen‘* genannt – werden diejenigen grundlegenden Fertigkeiten und Fähigkeiten beschrieben, die für ein erfolgreiches und nachhaltig verständiges Mathematiklernen in der Primarstufe und auch darüber hinaus unverzichtbar sind (SWK, 2022, S. 50).
Sie schaffen somit die Grundlagen für ein erfolgreiches Lernen im weiterführenden Mathematikunterricht und für die Bewältigung von Alltagsanforderungen. Daher trägt ihre förderorientierte Thematisierung im Unterricht auch wesentlich dazu bei, dass die in den Bildungsstandards festgelegten Kompetenzerwartungen, einschließlich der Mindeststandards (SWK, 2022, S. 42), erreicht werden.
Arithmetische Basiskompetenzen fokussieren sowohl das Vorhandensein von Verstehensgrundlagen als auch die Beherrschung von Grundfertigkeiten im sicheren Umgang mit Zahlen und Operationen. Sie bedürfen im Mathematikunterricht der Primarstufe dahingehend von Beginn an einer besonderen Beachtung, da der Inhaltsbereich der Arithmetik hierarchisch strukturiert ist.
So ist beispielsweise das verständige und sichere Addieren im Zahlraum bis 20 eine Voraussetzung für das nicht zählende Addieren im Zahlraum bis 100, was wiederum eine Voraussetzung für das halbschriftliche Rechnen im Zahlraum bis 1.000 ist, usw. Das bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Basiskompetenzen in einem Zahlraum für den Erwerb von Basiskompetenzen in einem neuen Zahlraum erweitert werden müssen. Der Begriff der Basiskompetenzen ist somit dynamisch zu verstehen: Basiskompetenzen werden kumulativ erworben, sie erweitern sich im Laufe der Schulzeit.
Im Orientierungsrahmen werden die arithmetischen Basiskompetenzen aus den Bereichen *'Zahlverständnis'*, *'Operationsverständnis'*, *'Stellenwertverständnis'*, *'Schnelles Kopfrechnen'*, *'Zahlenrechnen'* und *'Ziffernrechnen'* unter Bezugnahme auf konkrete Beispiele vor dem Hintergrund des Lehrplans Mathematik Grundschule NRW (MSB, 2021) veranschaulicht. Die Ausführungen sind aber auch auf weitere Operationen und Zahlräume übertragbar. Bevor Erläuterungen zum mathematikdidaktischen Hintergrund gegeben werden, soll an einem Beispiel verdeutlicht werden, wie Verstehenslücken bei den arithmetischen Basiskompetenzen dazu führen können, dass ein Weiterlernen erschwert wird.

Verstehenslücken erschweren das Weiterlernen

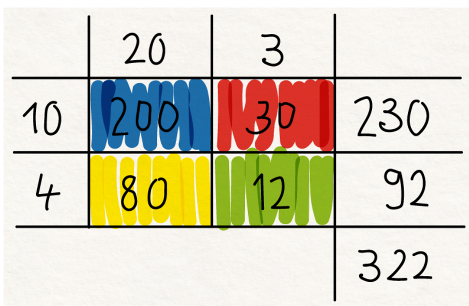
Die Fünftklässlerin Lisa ermittelte für die Aufgabe 14 · 23 das Ergebnis 212.

Abb. 1



Es ist naheliegend, dass Lisa die Zehner mit den Zehnern multiplizierte (10 · 20 = 200), ebenso Einer mit Einern verknüpfte (4 · 3 = 12) und abschließend die beiden Teilergebnisse addierte. Sie übertrug vermutlich eine Vorgehensweise auf die Multiplikation, die beispielsweise bei der Addition gut funktioniert, nämlich die Verrechnung von Zehnern mit Zehnern und Einern mit Einern.
Sie beging keinen Rechenfehler. Dass sie trotzdem nicht das korrekte Ergebnis berechnete, liegt vermutlich in einem nicht tragfähigen Operationsverständnis begründet. Lisa hat möglicherweise (noch) nicht verstanden, dass und warum bei der Zerlegung in Zehner und Einer auch Zehner mit Einern und Einer mit Zehnern multipliziert werden müssen. Aber wann und wie hätte Lisa dieses Wissen erwerben können?

Abb. 2



Um die symbolische Darstellung im Malkreuz zu verstehen, wäre es für Lisa hilfreich, wenn sie eine entsprechende bildliche Darstellung aktivieren könnte. Hierbei erfolgt eine Zerlegung nach Zehnern und Einern und gemäß dem Distributivgesetz eine Zerlegung in vier Teilprodukte.

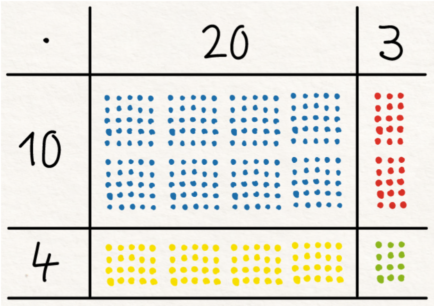


Abb. 3

Und um schließlich diese bildliche Darstellung in ihrer Bedeutung als flächige Darstellung der Multiplikation erfassen zu können, benötigt Lisa wiederum das Wissen aus dem zweiten Schuljahr. Sie muss wissen, dass Multiplikationsaufgaben mit Hilfe von Punktefeldern flächig dargestellt werden können und dass es nicht ausreicht, dass sie die 4 und die 3 irgendwo im Punktefeld sehen kann. Vielmehr muss sie verstanden haben, dass 4 mal 3 als vier Dreiergruppen gedacht werden können und das Ergebnis 12 ist.

Möglicherweise wird es erforderlich sein, mit der Viertklässlerin Lisa nochmals ‚ins 2. Schuljahr zurückzugehen', um zu erheben, ob sie über die flächige Vorstellung der Multiplikation mit Hilfe von Punktefeldern und die zugehörige Gruppensprache verfügt. Vielleicht reicht ein Reaktivieren dieser Vorstellungen, aber vielleicht bedarf es auch einer (erneuten) Grundlegung dieser Verstehensgrundlagen.

Nun könnte man der Auffassung sein, es würde ausreichen, Lisa die Rechenregel ‚Verrechne immer alles mit allem' beizubringen, und nach einiger Übung wäre sie schon in der Lage, Aufgaben dieses Typs zu berechnen. Es sei nicht unbedingt erforderlich, in der **Rückschau** nicht vorhandene Basiskompetenzen zu reaktivieren oder aufzuarbeiten, sollte sie über ein Verfahren oder eine Rechenregel zur Lösungsfindung verfügen.

Hier bleibt einerseits zu fragen, wie nachhaltig der Erwerb dieser Rechenregel sein würde, insbesondere wenn die Aufgabenstellungen komplexer werden (z. B. 204 · 112). Mindestens ebenso wichtig ist das Argument, dass stets auch in der **Vorschau** betrachtet werden sollte, welche Bedeutung der Erwerb von Basiskompetenzen für weiterführende Lernprozesse hat – auch im Anschluss an die Grundschulzeit.

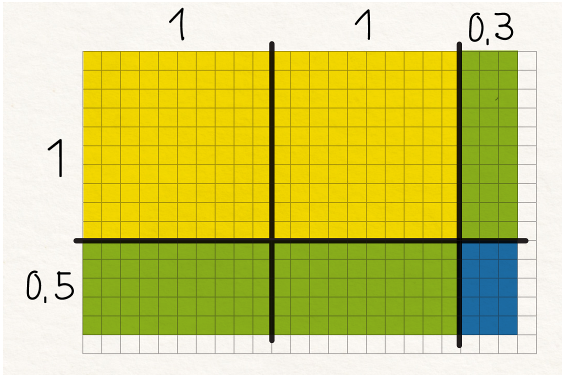


Abb. 4

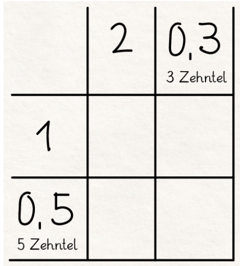


Abb. 5

Denn für das Verständnis und die sichere Ausführung der Multiplikation von Brüchen und Dezimalzahlen beispielsweise ist es wichtig, dass Lisa über ein Verständnis der flächigen Darstellung der Multiplikation verfügt, um diese für den neuen Zahlbereich weiterentwickeln zu können.

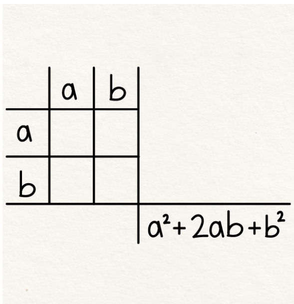


Abb. 6

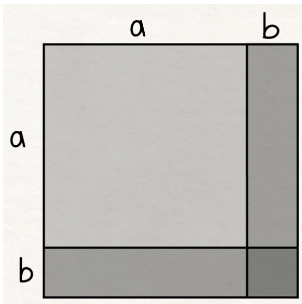


Abb. 7

Auch für das Verständnis und das sichere Operieren mit algebraischen Ausdrücken bildet die flächige Darstellung der Multiplikation eine wichtige Grundlage, zum Beispiel auch für das Verständnis der Binomischen Formeln. Auch über die Arithmetik und die Algebra hinausgehend ist die flächige Darstellung der Multiplikation eine wichtige Verstehensgrundlage; man denke hier etwa an die Berechnung von Flächen und Rauminhalten, auch von komplexeren Figuren.

ZAHLVERSTÄNDNIS

1.1 Grundvorstellungen besitzen

Abb. 8

Lernende erfassen Zahlen sowohl kardinal (als Anzahlen bzw. Mengen) als auch ordinal (als Positionen in einer Reihe). Es werden insbesondere flächige (z. B. Punktefeld) und lineare Darstellungen (z. B. Zahlenstrahl oder Rechenstrich) genutzt und miteinander vernetzt, die die Strukturen des Zehnersystems verkörpern.

Sowohl die lineare als auch die flächige Darstellung von Zahlen (vgl. Abb. 9) sind weit über die Primarstufe hinaus von Bedeutung und bieten die notwendige Verstehensgrundlage für den Erwerb der anderen fünf Basiskompetenzen, zum Beispiel des Operationsverständnisses.

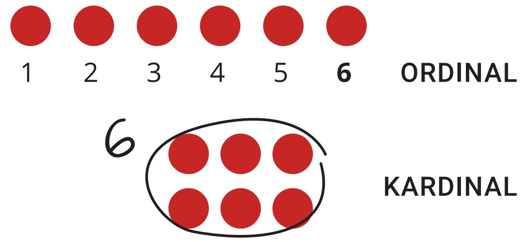


Abb. 9

Als *lineare* Darstellungen können im 20er-Raum Plättchenreihen oder 20er-Ketten eingesetzt werden, die eine klar erkennbare Fünfer- bzw. Zehnerstruktur aufweisen müssen. Deren Nutzung muss beständig mit den Lernenden besprochen werden. Im 100er-Raum kann als Abstraktion der Hunderterkette dann der Rechenstrich bzw. der Zahlenstrahl zum Einsatz kommen. Diese beiden Repräsentationen sind auch für den weiteren Mathematikunterricht bei der Orientierung nicht nur im Tausender- bzw. Millionraum, sondern auch in der weiterführenden Schule von zentraler Bedeutung, etwa bei der Einführung von Dezimalzahlen, Brüchen oder negativen Zahlen (vgl. Abb. 10 in Anlehnung an Prediger et al., 2023).

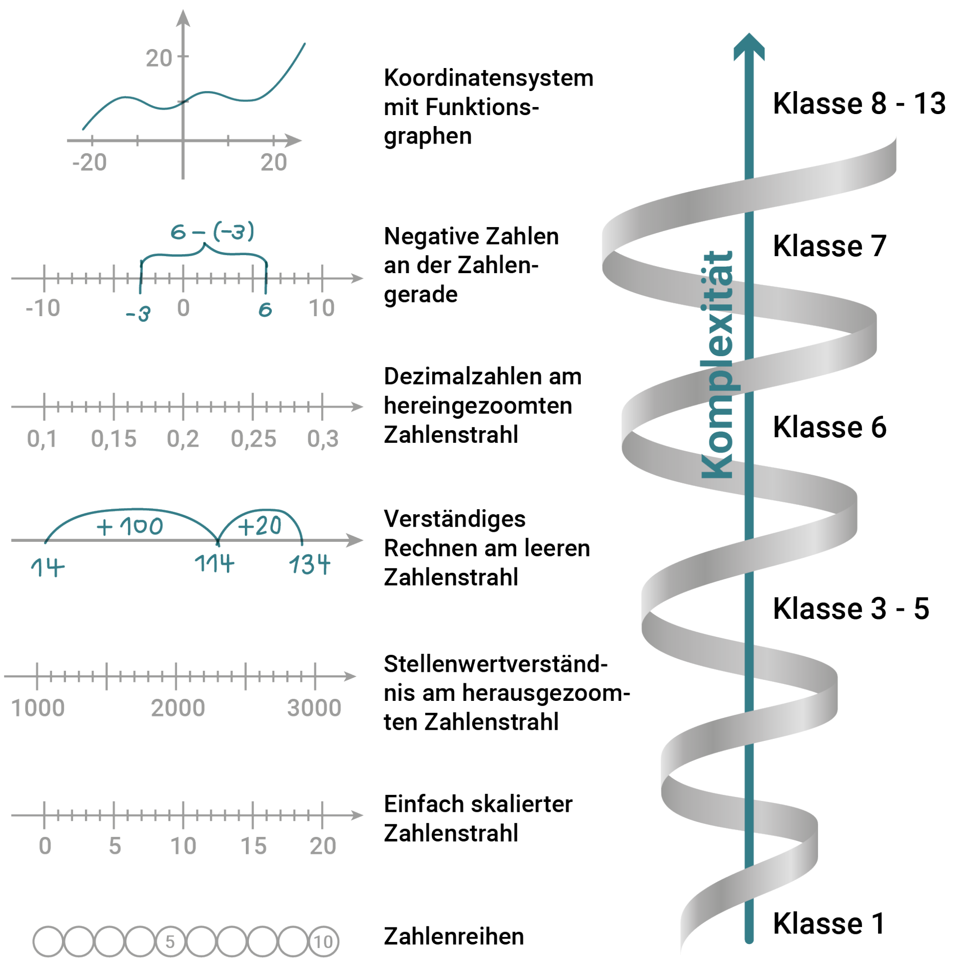


Abb. 10

Als *flächige* Darstellungen können im 20er-Raum das 10er- oder das 20er-Feld verwendet werden, in die Einzelplättchen, Fünfer- oder Zehnerstreifen hineingelegt werden. Da es um die kardinale Gesamtmenge geht (Wie viele Plättchen sind es?), sollten das 10er- oder das 20er-Feld nicht durchnummeriert sein. Ferner gilt auch hier, dass über die Nutzung der Strukturen gesprochen werden muss, damit die Kinder nicht nur Einzelplättchen legen: „Wie kannst du 16 Plättchen mit möglichst wenig Material legen?"
Die im 20er-Feld gemachten Lernerfahrungen sollten in den folgenden Schuljahren auf weitere flächige Darstellungen mit Punkten (Zehnerstreifen, Hunderterquadrate, Tausenderstreifen …) oder auf das Würfelmaterial (Zehnerstangen, Hunderterplatten, Tausenderwürfel) übertragen werden.

1.2 Darstellungen vernetzen

Lernende vernetzen Darstellungen von Zahlen (Handlung, Bild, Sprache, Mathesprache) kontinuierlich miteinander, indem sie diese einander zuordnen und den Prozess sprachlich begleiten. Zahlen werden durch Materialien und Bilder verständlich. Zahlbilder sollten daher jederzeit aktiviert werden können.

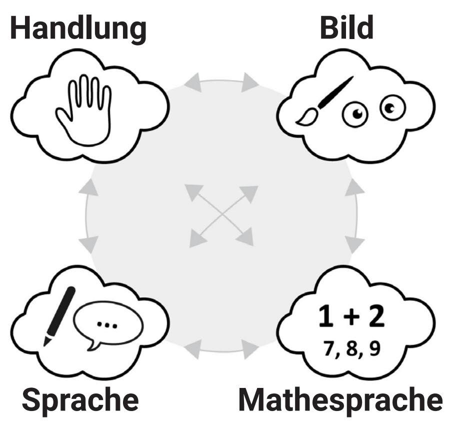


Abb. 11

Die verschiedenen Darstellungen sind nicht in streng linearer Abfolge (erst handelnd, dann bildlich, dann symbolisch) zu durchlaufen. Vielmehr gilt es, die Darstellungen immer wieder zu vernetzen, d. h. nicht die symbolische Darstellung als (möglichst schnell zu erreichendes) Endziel festzulegen, sondern stets die anschaulichen, mentalen Bilder aktiv zu halten – und das für alle Lernenden. Natürlich sollen die Lernenden im Verlauf ihres Lernprozesses immer souveräner im Umgang mit den symbolischen Darstellungen werden (vgl. Abb. 12). Sie sollten den Bezug zu den nicht-symbolischen

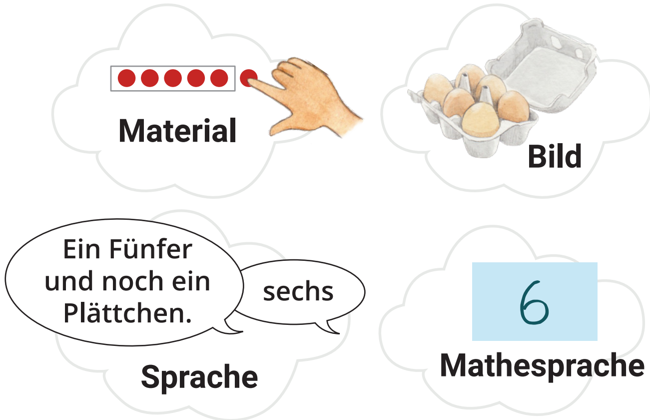


Abb. 12

Repräsentationen aber nicht verlieren. Auch innerhalb einer Darstellungsform sollten Vernetzungen hergestellt werden. So können beispielsweise die 6 am Zehnerfeld und die 6 an der Plättchenreihe oder die 82 am Hunderterfeld und die 82 mit Würfelmaterial verglichen werden: „Was ist gleich?" „Was ist verschieden?"
Von besonderer Bedeutung ist nicht nur der Darstellungswechsel, sondern auch das Nachdenken und das gemeinsame Sprechen über die verschiedenen Darstellungen und deren Vernetzungen: „Was passt?" „Warum?" „Was nicht?" „Warum nicht?" „Wie muss man es verändern, dass es passt?" … Dann kann die Fähigkeit zum Umgang mit symbolischen Darstellungen auf einer ausreichenden Verständnisgrundlage in Form von mentalen Vorstellungsbildern basieren.
Diese Ausführungen zum Darstellungswechsel im Kontext des Zahlverständnisses sind nicht nur für das Zahlverständnis, sondern auch für die anderen Basiskompetenzen relevant. Sie werden aus Gründen der Vermeidung von Redundanzen dort jedoch nicht mehr ausführlich wiederholt.

1.3 Zahlbeziehungen nutzen

Lernende nutzen die vielfältigen Zusammenhänge zwischen Zahlen. Die Nutzung der Zusammenhänge ist Grundvoraussetzung für nicht zählendes Rechnen. Zentral sind hierbei z. B. die Teile-Ganzes-Beziehung (6 sind 4 und 2) oder die Fähigkeit zur quasi-simultanen Anzahlerfassung (14 Plättchen sind 1 Zehner und 4 Einer).

Zahlen stehen in zahlreichen Beziehungen zu anderen Zahlen. Die Zahl 6 beispielsweise ist der Vorgänger der 7 und der Nachfolger der 5, das

Doppelte der 3 und die Hälfte von 12, zwei weniger als 8, drei mehr als 3 usw. Zudem lässt sich die 6 zerlegen in 3 und 3, in 4 und 2, in 1 und 5 usw.
Gerade diese Teil-Ganzes-Beziehungen sind für den Unterricht von besonderer Bedeutung. Schließlich bilden das Verständnis und die Nutzung der Teil-Ganzes-Beziehungen eine wichtige Grundlage dafür, dass die Beziehung zwischen einer Zahl (dem Ganzen) und ihren Teilen numerisch erfasst werden kann, also Zahlen (im Kopf) zerlegt und zusammengesetzt werden können. Die Teil-Ganzes-Beziehungen sind auch in größeren Zahlräumen bedeutsam (100 sind 60 und 40, 1.000 sind 800 und 200, aber auch 165 sind 100 und 60 und 5…). Zahlen zerlegen und zusammensetzen zu können, ist unverzichtbar, um insbesondere auch in größeren Zahlräumen rechnen zu können (z. B. „37 + 45 = 37 + 40 und dann + 5“ oder „27 + 45 = 20 + 40, dann 7 + 5 und schließlich 60 + 12“).
Die simultane Anzahlerfassung – Erkennen der Anzahlen von 1 bis 5, 10, 20 oder 100 auf den ersten Blick – und die quasi-simultane Anzahlerfassung – Erkennen von Anzahlen auf den zweiten Blick (10 Punkte und 4 Punkte sind 14 Punkte; 8 ist 1 Fünfer und 3 Einer; 14 sind 1 Zehner und 4 Einer) – sind eine unverzichtbare Grundlage für die Entwicklung von kardinalen Zahlvorstellungen (Wie viele?) sowie von nicht zählenden Rechenstrategien. Durch das Erfassen größerer Anzahlen unter Ausnutzung von Strukturierungen bzw. (gedanklichem) Zerlegen und Zusammensetzen in schnell erfassbare Teilanzahlen kann die Anzahl einer größeren Menge von Objekten ohne Abzählen direkt bestimmt werden (vgl. Abb. 13).

Abb. 13

So entstehen konkrete kardinale Vorstellungsbilder zu Zahlen, die bei der Entwicklung von Rechenstrategien und damit bei der Ablösung vom zählenden Rechnen eine große Rolle spielen.

OPERATIONSVERSTÄNDNIS

2.1 Grundvorstellungen besitzen

Abb. 14

Lernende ordnen Aufgaben der vier Grundrechenarten und (Alltags-)Bedeutungen – wie *hinzufügen* oder *wegnehmen* – einander zu. Sie beschreiben innere Bilder von Rechenoperationen. Zur Ausbildung von Grundvorstellungen werden lineare und flächige Darstellungen genutzt, die auch für den weiterführenden Mathematikunterricht bedeutsam sind.

Den Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division liegen verschiedene statische und dynamische sowie ordinale und kardinale Grundvorstellungen zugrunde (vgl. z. B. für die Addition *mahiko.dzlm.de/node/47).* Beim Erlernen der Grundrechenarten ist es nicht ausreichend, dass die Kinder die Aufgaben des kleinen Einspluseins, Einsminuseins, Einmaleins und Einsdurcheins auswendig lernen. Ziel der ersten beiden Schuljahre und auch darüber hinaus ist, dass die Lernenden konkrete Vorstellungen zu den verschiedenen Rechenoperationen entwickeln und somit ein Verständnis darüber aufbauen können, welche Handlung(en) mit der jeweiligen Operation verknüpft werden können (vgl. die Infoseite auf *pikas.dzlm.de/node/1946;* vgl. Abb. 15).

GRUNDVORSTELLUNGEN ADDITION

HINZUFÜGEN

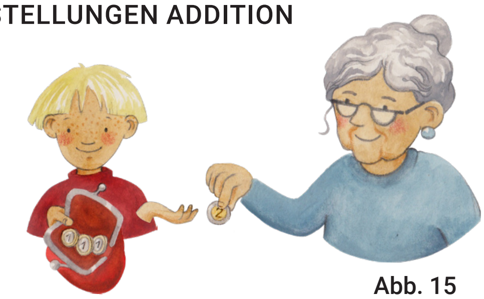


Abb. 15

Einer Menge von Objekten wird eine weitere hinzugefügt (dynamisch).
Jule hat 3€ gespart. Zwei weitere Euro bekommt sie geschenkt. Wie viele Euro hat sie jetzt?

ZUSAMMENFASSEN

Abb. 16

Zwei Mengen werden zusammengelegt.
Jule hat 3€. Paul hat 3€. Wie viele Euro haben sie zusammen?

VERGLEICHEN

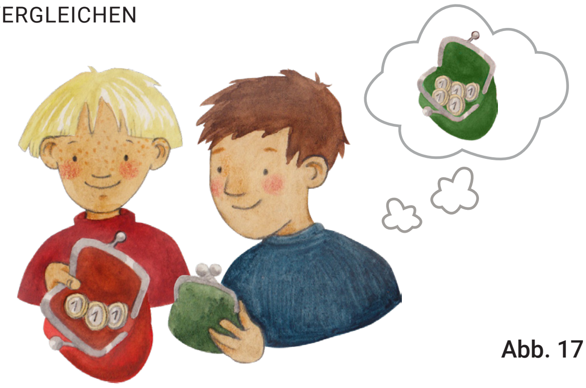


Abb. 17

Zwei Mengen werden durch Addition verglichen (statisch).
Jule hat 3€. Paul hat 2€ mehr als Jule. Wie viele Euro hat Paul?

Die Lernenden sollen die einzelnen Grundvorstellungen allerdings nicht benennen können, schließlich sollen sie Mathematik lernen – und nicht Mathematikdidaktik. Aber sie sollen je nach Kontext und je nach Aufgabe unteschiedliche Grundvorstellungen aktivieren. Dabei spielen lineare als auch flächige Darstellungen der jeweiligen Grundvorstellung eine große Rolle (vgl. Abschnitt 1.1).

2.2 Darstellungen vernetzen

> Lernende vernetzen Darstellungen von Operationen (Handlung, Bild, Sprache, Mathesprache) kontinuierlich miteinander, indem sie diese einander zuordnen und den Prozess sprachlich begleiten. Operationen werden erst durch die Deutungen von Handlungen und Bildern verständlich, keineswegs durch die grundschulspezifischen Fachausdrücke *plus, minus, mal* und *geteilt* allein.

Bildliche oder sprachliche Darstellungen helfen die hinter den grundschulspezifischen Ausdrücken ‚plus', ‚minus', ‚mal' und ‚geteilt' steckenden Vorstellungen bewusst, sichtbar und kommunizierbar zu machen. Zudem hilft die Auseinandersetzung mit diesen Darstellungen, mögliche Fehlvorstellungen frühzeitig aufzudecken und neue Vorstellungen in das eigene Wissensnetz einzubauen. Durch die Arbeit mit den verschiedenen Darstellungen können die Kinder sich Aufgaben zu ‚plus', ‚minus', ‚mal' und ‚geteilt' vorstellen. Das ist eine wesentliche Grundvoraussetzung für das schnelle Kopfrechnen und das verständige Zahlenrechnen (vgl. Kapitel 4 und 5; Abb. 18).

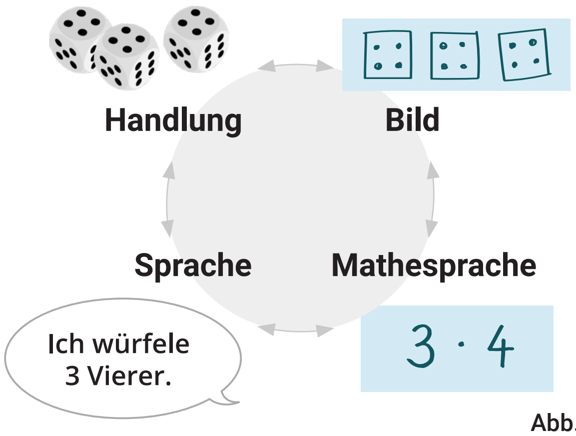


Abb. 18

In einem Mathematikunterricht, der die Vernetzung von verschiedenen Darstellungen der Rechenoperationen anstrebt, sollten immer wieder Fragen zur Passung gestellt werden: „Warum passt das Bild zur Aufgabe?" „Warum passt das, was du gelegt hast, zu deiner Minus-Geschichte?" „Wie muss sich dein Bild verändern, damit es zu einer anderen Aufgabe passt?" …

2.3 Aufgabenbeziehungen nutzen

> Lernende nutzen Beziehungen zwischen einzelnen Aufgaben/Rechenoperationen. Dieses ist Grundvoraussetzung für das Erlernen von Ableitungs- bzw. Rechenstrategien. Grundlagen bilden hier die Rechengesetze wie…
> das Kommutativgesetz (2 + 9 = 9 + 2),
> das Assoziativgesetz (8 + 5 = 8 + (2 + 3)) oder
> das Distributivgesetz (6 · 8 = 5 · 8 + 1 · 8)
> ebenso wie die Zusammenhänge zur jeweiligen Umkehroperation.

Auf dem Weg zur Automatisierung der Basisfakten des schnellen Kopfrechnens (vgl. Kap. 4) und zum Erwerb von Sicherheit beim Zahlenrechnen

ist das Erkennen von Beziehungen und Strukturen zwischen verschiedenen Aufgaben zentral. So lernen die Kinder zunächst die (für sie) besonders einfachen Aufgaben zu automatisieren (Basisfakten, z. B. 5 · 3) bzw. schnell zu ermitteln (Zahlenrechnen, z. B. 40 + 30). Anschließend nutzen sie dieses Wissen, um aus den einfachen Aufgaben die schwierigen Aufgaben abzuleiten. Dieses Vorgehen kommt der Heterogenität der Kinder entgegen, denn schließlich sind für unterschiedliche Kinder möglicherweise unterschiedliche Aufgaben einfach oder schwierig.
Insofern entlastet dieses Vorgehen die Lernenden, denn sie sind nicht gefordert (oder damit nicht überfordert), in recht kurzer Zeit eine Vielzahl von Aufgaben schnellstmöglich zu automatisieren bzw. schnell zu ermitteln. Stattdessen bekommen sie Strategien an die Hand, wie sie eine Aufgabe, die sie noch nicht gesichert haben, aus einer einfachen Aufgabe ableiten können: „Wie kann dir 14 – 10 helfen, wenn du 14 – 9 ausrechnen willst?“

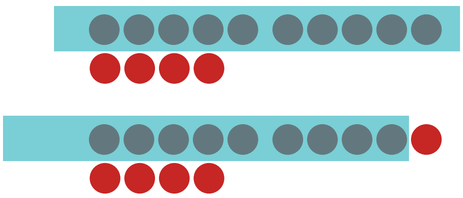


Abb. 19

Dadurch entsteht ein Wissensnetz aus Aufgabenbeziehungen, das dabei unterstützt, das Ergebnis einer Aufgabe abzuleiten, falls es nicht mehr automatisiert abgerufen werden kann. Anschauliche Darstellungen, die Aktivierung von Grundvorstellungen sowie das Gespräch über Aufgabenzusammenhänge sind hierbei von großer Bedeutung: „Von 14 nehme ich 10 weg. Ich soll aber nur 9 wegnehmen, also habe ich einen zu viel weggenommen.“ Ebenso lernen die Kinder, die Zusammenhänge zwischen den Rechenoperationen, aber auch das Anwenden von Rechengesetzen zum geschickten Rechnen auszunutzen (vgl. Kapitel 4 und 5).
Die Nutzung von Aufgabenbeziehungen, die in kleinen Zahlräumen grundgelegt wird, ist auch in größeren Zahlräumen ein wichtiges Hilfsmittel, um Aufgabenanforderungen bewältigen zu können („100 ist der Nachbar von 99, also rechne ich +99, indem ich +100 rechne und dann -1.“ oder „12 · 6 = 10 · 6 + 2 · 6.“ oder „96 : 8 = 80 : 8 + 16 : 8“).

STELLENWERTVERSTÄNDNIS

3.1 Vorstellungen besitzen

Abb. 20

Lernende fassen jeweils zehn Objekte zu einem Bündel höherer Ordnung zusammen *(Bündeln)* und machen diese Operation rückgängig *(Entbündeln)*. Dabei nutzen sie das Prinzip des Zahlenwerts (**zwei** Zehner) und das Prinzip des Stellenwerts (zwei **Zehner**). Zum Verständnis dieser Konventionen ist die Einsicht in die Zerlegbarkeit von Zahlen *(Teile-Ganzes-Beziehung)* wichtig.

Im Unterricht ist es wichtig, genügend Gelegenheiten zu bieten, um am konkreten Anschauungsmaterial das Bündelungsprinzip (bündeln und entbündeln) handelnd zu erarbeiten. Dies kann z. B. durch Ordnung einer unübersichtlichen Menge passieren, im Hunderterraum beispielsweise durch das Eintauschen von zehn Einerwürfeln in eine Zehnerstange oder von zehn Plättchen in einen Zehnerstreifen.
Solches Handeln allein reicht jedoch nicht aus. Wichtig ist, dass darüber gemeinsam nachgedacht und gesprochen wird. In dem Zusammenhang ist es auch bedeutsam, über die ‚unregelmäßige‘ Zahlwortbildung im Deutschen zu sprechen und die korrekten Sprechweisen materialgestützt zu veranschaulichen: 54 sind 5 Zehner und 4 Einer, also 50 + 4, und 45 sind 4 Zehner und 5 Einer, also 40 + 5.

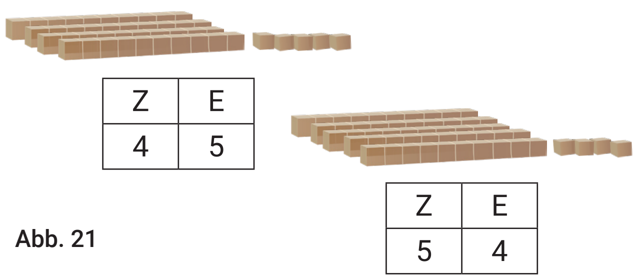


Abb. 21

3.2 Darstellungen vernetzen

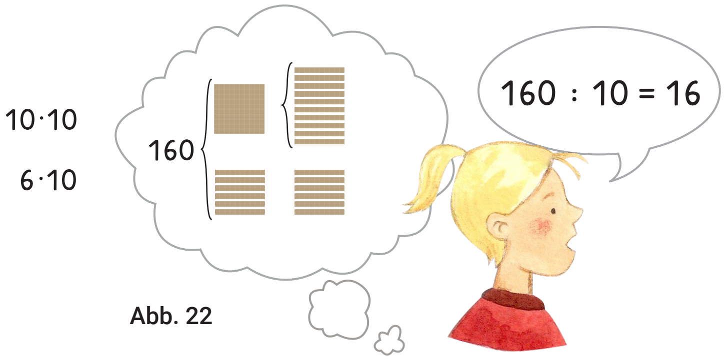


Abb. 22

Lernende vernetzen die Sprech- und die Schreibweise sowie andere Darstellungen von Zahlen kontinuierlich miteinander, die die Strukturen des Zehnersystems verkörpern. Dieses passiert zunächst mit Hilfe von Material und bildlichen Darstellungen und wird mit symbolischen Darstellungen verknüpft. Einsichten in diese Prozesse bilden eine Verständnisgrundlage für das Zahlen- und das Ziffernrechnen.

Auch beim Stellenwertverständnis gilt, dass mit der Darstellungsvernetzung nicht nur Übersetzungen zwischen den verschiedenen Darstellungsformen gemeint sind (wie z. B. die Umwandlung eines Zahlzeichens (Mathesprache) in ein Zahlwort (Sprache)). Denn Übersetzungen sollten auch innerhalb einer Darstellungsform stattfinden – beispielsweise von einer Zahldarstellung in Mathesprache in eine andere (z. B. 23 = 20 + 3 = 2Z + 3E) oder von einer bildlichen Darstellung in eine andere, etwa im Kontext eines Sortierspiels, bei dem Karten mit Punktebilddarstellungen solchen mit Würfelmaterial zugeordnet werden sollen.
Die Entwicklung des Stellenwertverständnisses wird zudem nicht allein durch die Anforderung gefördert, Materialdarstellungen in Zahlzeichen oder Zahlzeichen in Zahlworte zu übersetzen. Von zentraler Bedeutung ist stets auch der regelmäßige Austausch über die Vernetzung der Darstellungen: „Warum passt das?" „Was ist gleich, was ist verschieden?" „Was muss man verändern, damit …" „Was ändert sich, wenn …" etc., weil es zum Ausbau von Verständnis durch das Herausarbeiten von Merkmalen beiträgt und die Entwicklung einer bedeutungstragenden Sprache unterstützt.

3.3 Strukturen nutzen

Lernende nutzen Strukturen von (vorrangig flächigen) Darstellungen für das schnelle Sehen durch quasi-simultane Anzahlerfassung größerer Anzahlen (6 Zehner und 7 Einer). Tätigkeiten des schnellen Sehens vertiefen das Verständnis für das Dezimalsystem: Gebündelte Einheiten wie Zehner oder Hunderter werden nicht einzeln abgezählt, sondern können als Einheit gedacht werden.

Auch im Kontext des Erwerbs des Stellenwertverständnisses und im Zuge der Orientierung im Hunderter- und Tausenderraum ist die Fähigkeit zum schnellen Sehen – also zur sog. quasi-simultanen Anzahlerfassung (vgl. Abschnitt 1.3) – von besonderer Bedeutung. Diese Bedeutung wird dadurch verstärkt, dass die Anzahlerfassung auf den zweiten Blick auch in größeren Zahlenräumen eine zentrale Voraussetzung dafür darstellt, dass die Lernenden nicht-zählende Rechenstrategien erwerben.
Dabei wird ein Schwerpunkt auf die flächigen Darstellungen gelegt, da diese normalerweise im Unterschied zu den linearen Darstellungen eine klarere zusätzliche Strukturierung in 5er und 50er aufweisen und das schnelle Sehen für gewöhnlich an flächigen Darstellungen schneller und sicherer gelingt. Hierzu sollte regelmäßig das schnelle Sehen durch sogenannte Blitzblickübungen geübt werden, und es sollte zudem darüber gesprochen werden, wie die Anzahlen (unterschiedlich) schnell erfasst werden können.

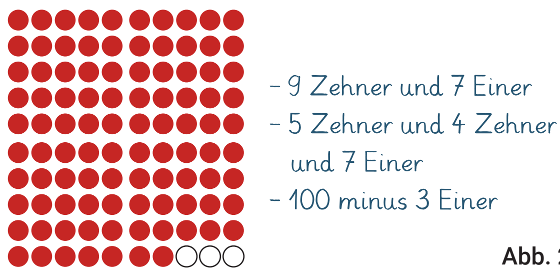


Abb. 23

Bei Blitzblickübungen werden Anzahlen z. B. am Hunderterfeld gezeigt und nach wenigen Sekunden wieder ausgeblendet. Im anschließenden Gespräch werden insbesondere für Kinder, die noch Probleme mit der Nutzung der Zahlstrukturen haben, mögliche Herangehensweisen des schnellen Sehens thematisiert. Denkbare Impulsfragen wären: „Wie hast du das so schnell gesehen?" „Wer hat die Zahl ebenfalls schnell gesehen, aber auf eine andere Weise?" „Beschreibe noch einmal, wie Lisa das gesehen hat!" „Du kannst es nicht genau sagen? Gibt es ‚Ausschnitte', bei denen du dir sicher bist?" „Wie sahen die aus?" „Wie viele Punkte waren es höchstens?" „Wie viele mindestens?" …

SCHNELLES KOPFRECHNEN

4.1 Ableitungsstrategien nutzen

Abb. 24

> Lernende verwenden Ableitungsstrategien für das Erlernen der Aufgaben des kleinen Einspluseins und Einmaleins sowie des kleinen Einsminuseins und Einsdurcheins (Basisfakten). Es werden schwierige aus einfachen Aufgaben abgeleitet. Sie werden mit geeigneten Darstellungen kontinuierlich veranschaulicht, und ihre Nutzung wird sprachlich begleitet.

Aufgabenbeziehungen zu nutzen (vgl. Abschnitt 2.3), um aus einfachen Aufgaben schwierigere Aufgaben ableiten zu können, setzt voraus, dass die einfachen Aufgaben unter Ausnutzung von bekannten Zahlstrukturen sicher beherrscht werden. Durch die Vernetzung von Handlungen am Material (z. B. für das Einspluseins etwa 20er-Feld, Zehner- und Fünferstreifen, Plättchen) und deren sprachlicher Begleitung werden Vorstellungen von einfachen Aufgaben aufgebaut.

Zu den einfachen Aufgaben können bei der Addition die Aufgaben **mit 10 als Ergebnis** (Zerlegungen der 10), Aufgaben **mit 10 als erstem oder zweitem Summanden** (Hinzufügen eines Zehnerstreifens), die **Verdopplungsaufgaben**, Aufgaben mit 1 als erstem oder zweitem Summanden (Hinzufügen eines Plättchens) und Aufgaben **mit 5 als erstem oder zweitem Summanden** (durch Rückgriff auf die Fünferstruktur) gezählt werden. Bei der Erarbeitung dieser Kernaufgaben sollten die Strukturen eines Aufgabentyps am Zwanzigerfeld erarbeitet und gefestigt werden (Abb. 25).

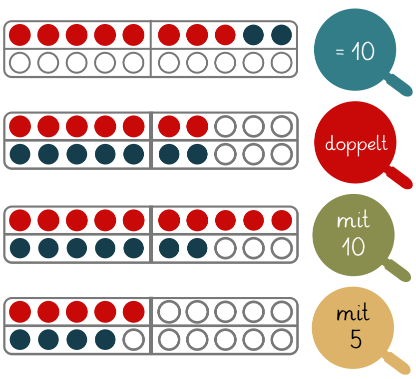


Abb. 25

Bei der Multiplikation sind es die Aufgaben mit den Faktoren 1, 10, 2 und 5 sowie für manche Kinder auch die Quadratzahlaufgaben (oder einige davon). Ausgehend von diesen einfachen Aufgaben (auch Kernaufgaben genannt) werden andere Aufgaben, z. B. durch Verschieben, Hinzufügen oder Weglassen einzelner Plättchen (Addition) oder z. B. durch Verschieben von Malwinkeln am Hunderterpunktefeld (Multiplikation), abgeleitet (Abb. 25).

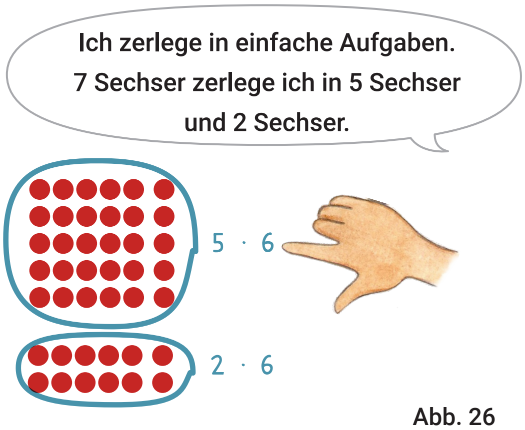


Abb. 26

Dabei ist es wichtig, dass Veränderungen als Handlung am Material bzw. an bildlichen Darstellungen und symbolisch durchgeführt sowie stets sprachlich begleitet werden. Im weiteren Verlauf werden Ergebnisse bereits beherrschter Aufgaben zur Berechnung anderer Aufgaben genutzt.

Die Fähigkeit des Ableitens schwieriger Aufgaben aus einfachen Aufgaben ist nicht nur für die anderen Rechenoperationen ebenfalls von Belang. Es bildet auch die Grundlage für die Entwicklung von Rechenstrategien des Zahlenrechnens (vgl. Kapitel 5), denn schließlich fußen viele Rechenwege auf der grundsätzlichen Idee, dass einfache Aufgaben ausgenutzt werden, um das Ergebnis einer schwierigen Aufgabe zu bestimmen.

4.2 Basisfakten abrufen

> Lernende rufen Basisfakten sicher ab. Dabei steht nicht nur die Automatisierung von einzelnen Aufgaben im Vordergrund, sondern insbesondere auch die Steigerung der Geläufigkeit bei der Nutzung von Ableitungsstrategien. Beides wird später auch bei der Bearbeitung von Aufgaben zum sog. Stellenrechnen (wie 200 + 300, 5 · 400, 1.000 – 200 oder 8.000 : 4) genutzt.

Zu bestimmten, auch von den individuell unterschiedlichen Lernständen abhängigen Zeitpunkten sollen die Lernenden alle Basisfakten des kleinen Einspluseins und des kleinen Einmaleins automatisiert beherrschen und die Aufgaben des kleinen Einsminuseins und des kleinen Einsdurcheins sicher ableiten können. Hierzu ist dann auch der systematisch angelegte und regelmäßig durchzuführende Einsatz von Übungen zur Automatisierung bzw. zur Sicherung erforderlich, die auf einer sicheren Verständnis- und Vernetzungsgrundlage basieren.
Es steht allerdings nicht nur die Automatisierung bzw. die Sicherung der Basisfakten im Vordergrund, sondern auch die zunehmend sichere Beherrschung der über diese Basisfakten hinausgehenden Ableitungsstrategien, die sich in größeren Zahlräumen zu Rechenstrategien weiterentwickeln.
Dabei ist auch der Sicherheit beim Stellenrechnen als wichtiger Grundlage für das Zahlenrechnen genügend Aufmerksamkeit zu widmen. Beim Stellenrechnen werden eine Zahl oder beide Zahlen aus den Aufgaben aus dem Bereich der o. a. Basisfakten mit einer Zehnerpotenz multipliziert. Auch hier ist es wichtig, die Beziehungen zwischen den einfachen und den (zunächst) schwierigen Aufgaben im größeren Zahlraum zu veranschaulichen und mit den Lernenden die Gemeinsamkeiten sowie die Unterschiede zu besprechen.

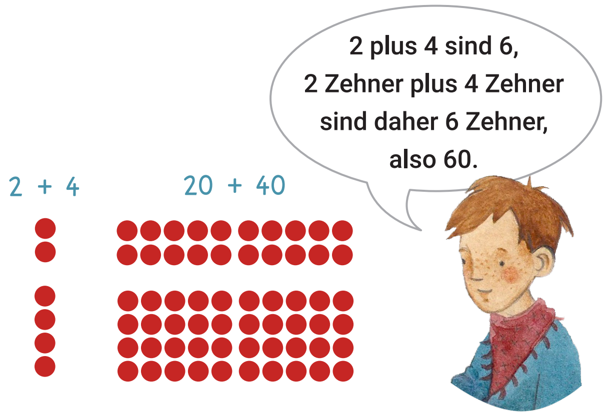


Abb. 27

ZAHLENRECHNEN

5.1 Rechenstrategien verwenden

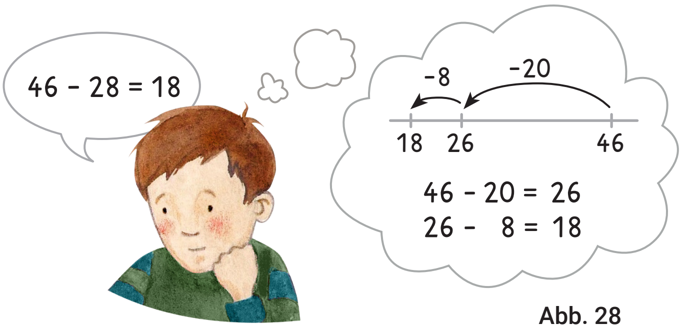


Abb. 28

Lernende verwenden Rechenstrategien für mündliches oder halbschriftliches Rechnen und können ihre Vorgehensweisen erläutern. Die Rechenstrategien werden auf der Grundlage eines tragfähigen Operationsverständnisses mit geeigneten Darstellungen kontinuierlich veranschaulicht. Dabei erfolgt kein verfrühtes Abkoppeln und kein ausschließliches Verwenden des Symbolischen.

Im Unterricht ist es wichtig, die Lernenden durch geeignete Aufgaben und Reflexionsanlässe dazu anzuregen, die Ablösung vom zählenden Rechnen zu vollziehen und stattdessen Zahl- und Aufgabenbeziehungen anschauungsgestützt zu erkennen, zu versprachlichen und zu nutzen.

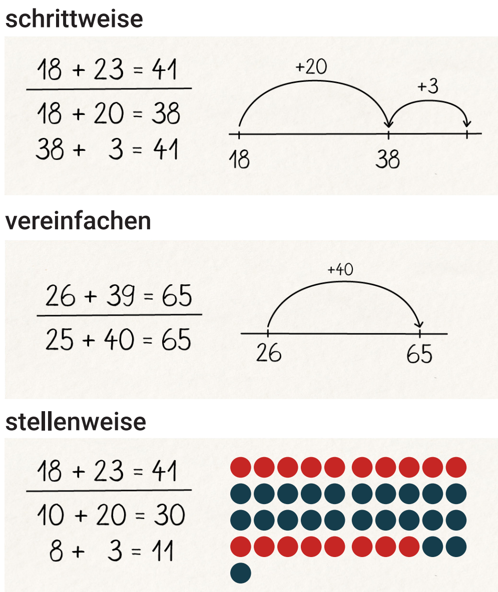


Abb. 29

Die unterschiedlichen Hauptstrategien (vgl. Abb. 28) sind immer auch potenzieller Lernstoff für die Lernenden. Daher sollte für jede behandelte Strategie – insbesondere für erstmals behandelte, aber auch für länger zurückliegend thematisierte – genügend Zeit reserviert werden, damit die

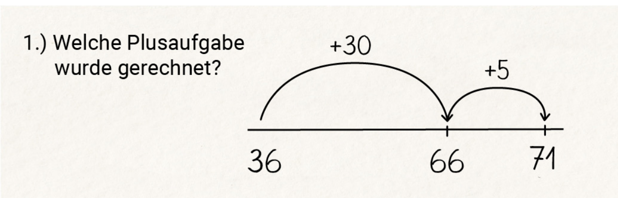
Lernenden deren Merkmale – auch im Vergleich – verstehen können. Es ist wichtig, auch in späteren Phasen des Lernprozesses, Aufgabenlösungen am Material bzw. an bildlichen Darstellungen nachvollziehen oder selbst darstellen zu lassen. Das benötigte Sprachmaterial (Einer, Zehner, darlegen, zusammenlegen, zerlegen, plus, etc.) sollte gemeinsam erarbeitet und in einem Sprachspeicher festgehalten werden. Das ist eine wichtige Grundlage dafür, dass die verbalen und die symbolischen Beschreibungen von Rechenwegen einander zugeordnet und die Zuordnungen begründet werden können.

5.2 Sicher rechnen

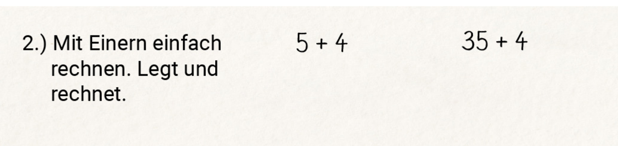
Lernende bewältigen bei geeigneten Aufgaben Anforderungen des mündlichen bzw. halbschriftlichen Rechnens im Zahlraum bis 1.000 und leicht darüber hinaus sicher. Es wird nicht erwartet, dass alle Lernenden alle Aufgaben mit allen Strategien rechnen können.

Auch beim Zahlenrechnen ist systematisches Üben unverzichtbar. Beim *grundlegenden Üben* stützen sich die Aufgabenbearbeitungen auf lebensweltliche Situationen, bildliche Darstellungen oder Material. Beim *vernetzenden Üben* werden Beziehungen zwischen Zahlen und Aufgaben thematisiert und benutzt, um auch im Übungsprozess bekannte Aspekte vernetzen bzw. neue Aspekte entdecken zu können. Beim *entdeckenden Üben* setzen sich die Kinder aktiv mit Beziehungen zwischen den Aufgaben auseinander. Während die Kinder diese entdecken, führen sie gleichzeitig mathematische Basiskompetenzen aus und ‚üben' diese somit nahezu ‚nebensächlich'. Beim *sichernden Üben* hingegen muss ebenfalls genügend Zeit eingeräumt werden, um die notwendige Rechensicherheit zu erzielen (PIKAS-Team, 2021, Abb.29).

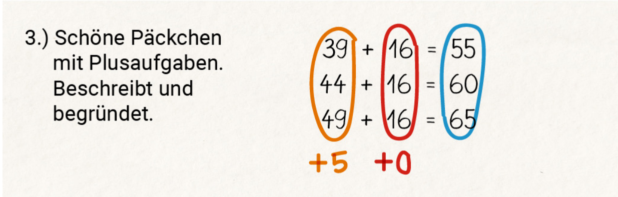
grundlegendes Üben



vernetzendes Üben



entdeckendes Üben



sicherndes Üben

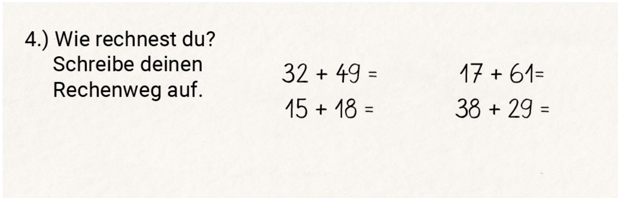


Abb. 30

Der Anspruch, dass jedes Kind jede Aufgabe gemäß aller Hauptstrategien berechnen können soll, würde viele Kinder überfordern, insbesondere diejenigen mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnen. Das bedeutet aber nicht, dass die Vermittlung lediglich einer einzigen Vorgehensweise angestrebt wird. Die Lernenden sollten unterschiedliche Wege angeboten bekommen und dann ihren Weg wählen, um die Aufgabe richtig lösen zu können. Für manche Kinder kann das bedeuten, dass sie im Endeffekt jede Aufgabe mit ‚ihrer' verständnisbasiert erworbenen Strategie angehen.

ZIFFERNRECHNEN

6.1 Algorithmen nachvollziehen

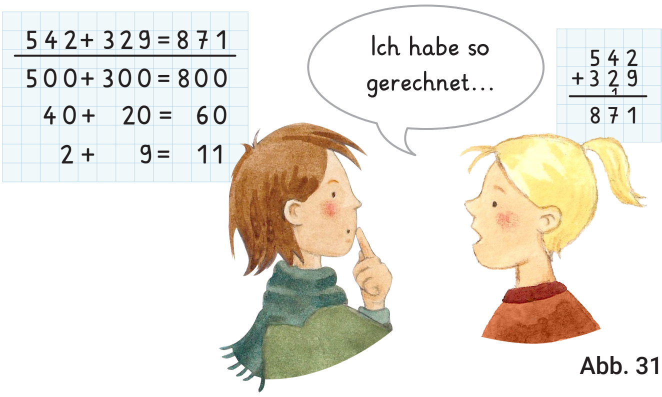


Abb. 31

Lernende verwenden die Algorithmen des schriftlichen Rechnens und können ihre Vorgehensweisen erläutern. Da Fehler häufig auf Verständnisdefiziten beruhen, wird im Unterricht gemeinsam über die einzelnen Schritte gesprochen. Gemeinsamkeiten und Unterschiede der halbschriftlichen Strategie Stellenweise (Ausnahme bei der Division: Schrittweise) und des Algorithmus werden besprochen.

Die dem schriftlichen Rechnen zugrundeliegenden Denkweisen sind für Lernende einerseits neu (ziffernweises Rechnen mit Einspluseins und Co., neue Notationsformen, in der Regel rechnet man beginnend bei den Einern hin zu den größeren Stellenwerten, …). Andererseits kann in der Regel an die halbschriftliche Strategie des stellenweisen Rechnens angeknüpft werden, bei der die Zahlen in ihre Stellenwerte zerlegt werden, um diese dann stellengerecht zu addieren (Abb. 28). Mit Hilfe von Material, wie dem Würfelmaterial oder Punktebildern, kann dies unterstützt werden (vgl. z. B. *mahiko.dzlm.de/node/182).* Auch die sprachliche Begleitung des Vorgehens unterstützt den Aufbau eines tragfähigen Verständnisses für das schriftliche Rechnen. Allerdings ist wichtig, dass die Darstellung mit Würfelmaterial oder mit Zahlbildern nicht den schriftlichen Algorithmus veranschaulicht, sondern die damit verbundene halbschriftliche Strategie. Stellenweises Rechnen kann zur schriftlichen Subtraktion und zur schriftlichen Multiplikation als Verständnishilfe herangezogen werden. Bei der schriftlichen Division gibt es Ähnlichkeiten bei der Denkweise zur halbschriftlichen Strategie ‚schrittweises Rechnen'.

6.2 Algorithmen verständig nutzen

Lernende bearbeiten Aufgaben zum schriftlichen Rechnen – mit Ausnahme von Aufgaben zur schriftlichen Division – sicher. Die Entwicklung eines Aufgabenblicks trägt dazu bei, dass das schriftliche Rechnen nicht unverstanden ausgeführt, sondern flexibel angewendet wird.

Ein gewisses Maß an Rechensicherheit beim schriftlichen Rechnen ist erforderlich, auch wenn die Alltagsbedeutung des schriftlichen Rechnens zurückgegangen ist und das schriftliche Rechnen für den weiterführenden Mathematikunterricht nicht dieselbe Bedeutung hat wie die anderen Basiskompetenzen – verständiges und sicheres Zahlenrechnen beispielsweise ist eine wichtige Grundlage für algebraisches Verständnis. Insofern bietet sich zum systematischen Üben insbesondere der Einsatz von Aufgaben zum vernetzenden und zum entdeckenden Üben, z. B. mit Ziffernkärtchen, an.

Abb. 32

Ein hoher Anteil der Fehler beim schriftlichen Rechnen ist durch systematische Fehlermuster zu erklären, die oft auf Verständnisdefizite in Bezug auf die Ausführung des Algorithmus zurückzuführen sind. Insofern müssen für das sichernde Üben die erforderlichen Verständnisgrundlagen vorhanden sein.

Zudem sollen die Kinder nach der Einführung der schriftlichen Rechenverfahren nicht sämtliche Aufgaben ‚blind' mit Hilfe eines schriftlichen Rechenverfahrens lösen. Vielmehr sollen sie aufgabenabhängig entscheiden, ob und wann sie eine Aufgabe halbschriftlich oder schriftlich lösen würden.

Weitere Anregungen

Anregungen für Unterrichtsmaterialien und weiterführende Informationen sind in sechs digitalen Pinnwänden zu den Basiskompetenzen auf *pikas.dzlm.de/node/2410* zusammengestellt. Dort wurde auch ein PDF des Orientierungsrahmens sowie die Handreichung ‚Rechenschwierigkeiten vermeiden' (PIKAS-Team, 2021) eingestellt, welche eine wesentliche Grundlage für die Ausführungen dieses Papiers darstellt.

Im Unterricht werden die aus dem Orientierungsrahmen ersichtlichen Basiskompetenzen nicht strikt nacheinander thematisiert. Bei der Orientierung im Zahlraum bis 100 beispielsweise werden das Zahlverständnis und das Stellenwertverständnis angesprochen und wechselseitig aufeinander bezogen. Oder beim Thema ‚Multiplikation im 2. Schuljahr' werden das Operationsverständnis und das Schnelle Kopfrechnen eng miteinander zu verbinden sein.
Für den arithmetischen Anfangsunterricht der ersten beiden Schuljahre wurden zudem im Projekt FÖDIMA (Förderorientierte Diagnostik im mathematischen Anfangsunterricht) in Zusammenarbeit mit der Fachoffensive Mathematik NRW und dem Projekt PIKAS Materialien zur Diagnose und Förderung der arithmetischen Basiskompetenzen zusammengestellt. Die Standortbestimmungen sowie die Diagnose- und Förderkartei nebst Materialien für die Lernenden finden sich unter *pikas.dzlm.de/node/2556.* Sie behandeln die Basiskompetenzen entlang von acht zentralen Themen des Anfangsunterrichts: Zahlverständnis, Addition und Subtraktion im Zahlraum bis 20 sowie Zahlverständnis, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division im Zahlraum bis 100.

Literatur

MSB NRW (Hrsg.). (2021). Lehrpläne für die Primarstufe in Nordrhein-Westfalen. Fach Mathematik. *https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/289/ps_lp_m_einzeldatei_2021_08_02.pdf*

PIKAS-Team (2021). Rechenschwierigkeiten vermeiden. Hintergrundwissen und Anregungen für die Schuleingangsphase. *https://www.pikas.dzlm.de/999.*

Prediger, S., Barzel, B., Hußmann, S., & Leuders, T. (2023). Durchgängigkeit von Darstellungen und Vorstellungen für den nachhaltigen Verständnisaufbau: Spiralcurriculum praktisch gewendet. *MNU-Journal,* (5), 421–427.

SWK (2022). Basale Kompetenzen vermitteln – Bildungschancen sichern. Perspektiven für die Grundschule. Gutachten der Ständigen Wissenschaftlichen Kommission der Kultusministerkonferenz (SWK). *https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/KMK/SWK/2022/SWK-2022-Gutachten_Grundschule.pdf*

HERAUSGEBER

Projekt PIKAS
pikas.dzlm.de
Fakultät für Mathematik / IEEM
Vogelpothsweg 87
44227 Dortmund

Autorinnen und Autoren:

Daniela Götze
Christoph Selter

Abbildung & Gestaltung: Karoline Mosen

Stand: September 2024