Üben und Entdecken

Nicht zuletzt in Reaktion auf internationale Leistungsvergleiche wie TIMSS, PISA oder PIRLS/IGLU wird seit einigen Jahren vieler Ortens recht intensiv über Inhalte und Prinzipien des Unterrichts nachgedacht. Mit Blick auf die nicht immer erfreulichen Resultate im Bereich Mathematik konstatieren die einen, die Grundfertigkeiten und das Basiswissen seien bei den Schüler(innen) nicht in ausreichendem Maße vorhanden und deren Training müsse demzufolge vermehrt ins Zentrum gerückt werden. Die anderen hingegen machen Defizite in der eigenständigen Auseinandersetzung mit komplexeren Aufgaben aus und möchten das Problemlösen stärker betont wissen.

Die Geschichte des Mathematikunterrichts lehrt, dass das Pendel nicht zu stark in die eine oder die andere Richtung ausschlagen darf, sondern Üben und Entdecken stets gleichermaßen berücksichtigt werden sollten. Allerdings sollten sie nicht als voneinander getrennte Phasen im Lernprozess angesehen werden: Vom 1. Schuljahr an sollte weitest möglich *entdeckend geübt* und *übend entdeckt* werden.

Im Weiteren knüpfen wir an diese Forderung an und beschreibt zunächst die Konzeption des *produktiven Übens,* die gegenüber anderen Vorstellungen des Übens abgegrenzt wird (Kap. 1 & 2). Dabei erfolgt eine Konzentration auf die sog. strukturierten Übungen, bei denen die einzelnen Aufgaben durch einen übergeordneten Strukturzusammenhang aufeinander bezogen sind. Dieser Strukturzusammenhang kann ein realitätsbezogener oder ein 'innermathematischer' sein. Wir beschränken uns im zweiten Teil dieses Beitrags (Kap. 3 & 4) auf Beispiele der letzten Art, auch um die Beziehungshaltigkeit von Fragestellungen der in der Grundschule bisweilen vernachlässigten nicht anwendungsorientierten Seite der elementaren Mathematik aufzuzeigen.

1 Die Konzeption des produktiven Übens

Im deutschsprachigen Raum haben insbesondere Winter (1984) und Wittmann & Müller (1990; 1992) die Vorstellung revidiert, ein Stoff müsse zuerst eingeführt werden, bevor sich unmittelbar eine längere Phase automatisierenden Übens anschließe. *Einführen* und *Üben* seien keine strikt voneinander zu trennenden Phasen, sondern eng miteinander verzahnt: „Üben ist damit im wesentlichen das Wiederaufnehmen eines (entdeckenden) Lernprozesses, das Nocheinmalnachbilden, Nocheinmalnachbauen von Lernsituationen. An der zunehmenden (und nicht schon gleich vermittelten) Mechanisierung von Verfahren, an der Verflechtung von Wissen sowie an der geläufigeren Handhabung von Strategien werden die Schüler bewußt und aktiv beteiligt“ (Winter 1984, 10).

Sieht man also gemäß dieser Philosophie Üben als *integralen Bestandteil* eines aktiven Lernprozesses, so muss eine sorgfältige Analyse erfolgen, welche verschiedenen Typen von Übungsformen es gibt und wo deren jeweiliger Ort im Lernprozess liegt. Mit den Dichotomien *‚formales* vs. *gestütztes‘* sowie *‚unstrukturiertes* vs. *strukturiertes‘* Üben sollen im folgenden wesentliche Elemente der Konzeption des *produktiven Übens* kurz dargestellt werden. Von ‚Üben‘ spricht Wittmann (1992) dann, wenn ein Satz von Wissenselementen (z.B. Einspluseins) bzw. eine Fertigkeit (z.B. schriftliches Addieren) bei einer Serie von *gleichartigen* Aufgaben *wiederholt* angesprochen wird. Die verschiedenen Übungsformen unterscheidet er in zwei Dimensionen.

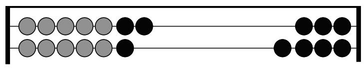
Formales und gestütztes Üben: Übungsformen können zum ersten verschiedene Grade der Anschauungsgebundenheit aufweisen: Beim *formalen* Üben werden die Aufgaben in der *symbolischen* Darstellungsform behandelt; beim *gestützten Üben* hingegen stützen sich die Aufgabenbearbeitungen auf *bildliche Darstellungen oder Handlungsmaterial*. Lorenz (1992, 2) hat in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, es sei ein wesentlicher Mangel gängiger Methodik, dass sie es den Schülern unhinterfragt überlasse, den Sprung von der Anschauung zum mathematischen Begriff zu vollziehen. Ein notwendiger Zwischenschritt bestehe in der Ausbildung visueller Vorstellungsbilder und in der Entwicklung der Fähigkeit zum mentalen visuellen Operieren mit den Materialien. Die Konsequenz für den Unterricht lautet daher, dem gestützten Üben genügend Raum zu geben.

Unstrukturiertes und strukturiertes Üben: Für den Grad der Anschauungsgebundenheit kann man relativ eindeutig entscheiden, ob eine Übungsform dem *formalen* oder dem *gestützten* Typ zuzurechnen ist; für ihren *Strukturierungsgrad* allerdings kann man sich nicht gleichermaßen exakt festlegen. Statt dessen existiert ein breites Spektrum, das von nicht strukturierten bis zu stark strukturierten Übungsformen reicht: Beim *unstrukturierten* Üben sind die Aufgaben willkürlich ausgewählt und haben keine Beziehung zueinander; jede Aufgabe wird für sich betrachtet.

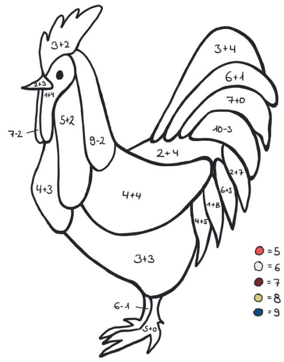
Beim *strukturierten Üben* hingegen sind die Aufgaben einer Übungsserie sind durch einen ganzheitlichen Strukturzusammenhang aufeinander bezogen; die Lösungswege und die Ergebnisse der einzelnen Aufgaben stehen in einem Zusammenhang und können sich gegenseitig unterstützen und korrigieren.

Beispiele: Anhand von vier Beispielen zur Addition im Zahlenraum bis 20 sollen diese Ausführungen kurz illustriert werden:

- *Rechne aus! (gestützt, unstrukturiert)*:
  Benutze die Rechenkette!
  7+6= 1+5= 3+4= 8+2= 4+9=



- *Rechne aus! (gestützt, strukturiert)*:
  Benutze den Rechenrahmen! Was fällt dir auf?
  7+6= 6+7= 5+8= 4+9= 3+10=
- *Der bunte Hahn (formal, unstrukturiert)*: Male die Felder so aus, wie es die Farbe des jeweiligen Ergebnisses vorgibt (siehe rechts)



- *Zahlenketten (formal, strukturiert)*: Wähle zwei Startzahlen und rechne sie zusammen. Das Ergebnis schreibe rechts daneben. Rechne dann die zweite und die dritte Zahl zusammen. Das Resultat schreibe als Zielzahl rechts neben die dritte Zahl, zum Beispiel
  2 **10** 12 **22** bzw. **8** **4** 12 **16**
  Finde (alle) Startzahl-Pärchen, mit denen du die Zielzahl 20 erreichen kannst.

Gewichtung: Bezüglich der Gewichtung der vier Grundtypen in der Konzeption des produktiven Übens lässt sich zusammenfassend sagen: so lange gestütztes Üben wie individuell nötig, so oft strukturiertes Üben wie möglich!

In gewissen Phasen, insbesondere Automatisierungsphasen am Ende der Lernprozesses, sind allerdings auch *formale, unstrukturierte* Übungen erforderlich. Bis vor rund zwei Jahrzehnten waren diese in der Hauptsache durch das klassische Päckchenrechnen repräsentiert. In den heutigen Schulen finden sich jedoch mehr und mehr Übungen des Typs 'Bunter Hahn'. Gegen deren vereinzelten Einsatz ist wenig einzuwenden. In der Praxis lässt sich jedoch nicht selten beobachten, dass 'Bunte Hähne' nicht nur die abschließenden Übungsphasen, sondern den gesamten Lernprozess dominieren. Aus diesem Grund sollen daher einige grundsätzliche Bemerkungen angeschlossen werden.

2 Üben als Unterhaltung oder als Herausforderung?

Es ist unbestritten, dass nicht wenige Kinder Übungen wie den 'Bunten Hahn' durchaus gern erledigen. Allerdings ist ein recht sparsamer Einsatz aus einer Reihe von Gründen zu empfehlen. Vier von ihnen seien im Folgenden angeführt (vgl. auch Wittmann 1990; Sundermann & Selter 2000):

Beziehungsreiches Denken oder isoliertes Pauken: Bei Aufgaben wie dem ‚Bunten Hahn' geht es in der Regel nur darum, dass die Kinder lernen, auf Aufgaben mit Ergebnissen zu reagieren. Werden solche Aufgaben verfrüht eingesetzt, sind sie für das Verstehen eher hinderlich als förderlich. Beziehungen zwischen Zahlen und zwischen Aufgaben sind die Quellen des mathematischen Lernprozesses, die bei ‚Bunten Hähnen' und dergleichen allerdings überhaupt nicht angesprochen werden. In diesem Zusammenhang ist zudem zu fragen, ob das Kind wirklich rechnet oder ob es lediglich beschäftigt wird. Mit anderen Worten: Bei vielen Aufgaben dieses Typs steht die Zeit, die für das Rechnen und das Denken benötigt wird, in keinem angemessenen Verhältnis zu den rechenfernen Aktivitäten (wie etwa dem Suchen der Zahlen im ‚Bunten Hahn').

Individualisierung oder Gleichbehandlung: Übungsformen wie der ‚Bunte Hahn' werden häufig als ideale Hilfen für differenziertes Arbeiten bezeichnet. In der Praxis sieht es dann bisweilen so aus, dass es Arbeitsblätter in drei Niveaustufen gibt, bei denen jedoch samt und sonders keine prinzipiell unterschiedlichen Aufgaben zu erledigen sind, sondern in der Regel die Aufgabenanzahl bzw. die Zahlengröße die einzigen variablen Parameter sind. Damit geht man jedoch nicht wirklich auf die einzelnen Kinder ein. Die schwächeren Schüler erhalten keine zusätzliche Förderung und die Starken keine echte Herausforderung. Denn alle erledigen im Prinzip dasselbe.

Selbständigkeit oder Funktionieren: Als ein weiterer Vorteil von 'Bunten Hähnen' wird nicht selten angeführt, dass die Schüler(innen) eigenständig vorgehen könnten und somit zur Selbständigkeit erzogen werden würden. Bei genauer Betrachtung führen solche Aufgaben jedoch lediglich zu unselbständiger und oberflächlicher Beschäftigung mit den Lerninhalten. Die einzige eigenständige 'Leistung' der Kinder kann dann bestenfalls darin bestehen, dass sie in einem organisatorisch offenen Unterricht den Zeitpunkt bestimmen, an dem sie das von anderen vorgedachte Arbeitsblatt bearbeiten; eigenes produktives Denken ist weitgehend nicht gefragt.

Lernen als Lust oder als Last: Im Grunde wird beim Einsatz von Aufgaben wie dem 'Bunten Hahn' implizit oder explizit von der zumindest in dieser Absolutheit falschen Voraussetzung ausgegangen, dass bestimmte Lerninhalte prinzipiell langweilig und die Kinder per se daran weder interessiert noch in der Lage dazu sind, ihnen produktiv zu begegnen. Da sich Schülerinnen und Schüler jedoch mit diesem 'Stoff' auseinanderzusetzen haben, müssen die durchzuführenden Aktivitäten wenigstens unterhaltsam sein. Und das heißt leider häufig: zwar reich an Abwechslung, jedoch arm an Substanz. Nach meinem Dafürhalten sollte Schule aber nicht mit der Unterhaltungsindustrie konkurrieren, sondern sich auf ihre eigentliche Hauptaufgabe besinnen: den Schülerinnen und Schülern zielbewusst Gelegenheiten zu bieten, sich in einer zugleich angenehmen wie herausfordernden Atmosphäre weiterzuentwickeln.

Diese Forderung betrifft natürlich auch das entdeckende Üben. Hierfür möchten wir im Folgenden mit den operativ strukturierten sog. *schönen Päckchen* (Kap. 3) und den *problemstrukturierten Übungsformen* (Kap. 4) eine Reihe von Beispielen geben,

- die Kinder herausfordern, statt sie primär unterhalten zu wollen,
- die ihre Selbständigkeit schulen und nicht ausschalten,
- die es jedem Kind ermöglichen, eigene Wege zu gehen, statt für alle dasselbe verbindlich vorzuschreiben,
- die beziehungsreiches Denken anregen und nicht isoliertes Aufgabenrechnen in den Vordergrund stellen.

3 Schöne Päckchen

Unter *schönen Päckchen* oder *Entdeckerpäckchen* versteht man operative Aufgabenserien, deren Variationen und Einsatzmöglichkeiten wir im Folgenden am Beispiel des Einspluseins, der Einmaleins und der (halb)schriftlichen Addition/Subtraktion erläutern möchten. Die Grundideen sind jedoch mutatis mutandis auf andere Übungsinhalte übertragbar.

10 + 6 = ______	5 + 3 = ______
9 + 7 = ______	8 + 3 = ______
8 + 8 = ______	11 + 3 = ______
7 + 9 = ______	14 + 3 = ______

Abb. 1: Schöne Päckchen (aus Wittmann & Müller 2000, 38)

3.1 Schöne Päckchen zum Einspluseins

Wenn die Kinder diesen Aufgabentyp noch nicht kennen, sollten sie zunächst einmal eine Reihe von schönen Päckchen ausrechnen. Dabei gibt es vermutlich immer einige Schüler(innen), die die existierenden Zusammenhänge bereits sehen oder gar nutzen, und andere, die die einzelnen Aufgaben getrennt voneinander berechnen. Sind einige Päckchen bearbeitet worden, sollten deren Aufbauprinzipien mit den Kindern besprochen werden. Wenn dann die Grundidee ‚klar‘ geworden ist, können sich Aufgabenstellungen der folgenden Art anschließen, die die Kinder zum Nachdenken über die Aufgaben und ihre Ergebnisse anregen (vgl. Selter 2002).

Wie geht es weiter? Hierbei sollen die Kinder den vorgegebenen Anfang einer Aufgabenserie ausrechnen und diese fortsetzen, also das hinein gelegte oder ein anderes von ihnen zu rechtfertigendes Konstruktionsprinzip nutzen. Man sollte keine Scheu haben, auch vergleichsweise simpel erscheinende Aufgabenserien einzusetzen – etwa solche mit einem konstanten Faktor –, denn manche Kinder brauchen verständlicher Weise einige Zeit, um komplexere Aufbauprinzipien zu durchschauen.

Wie geht es weiter?

2 + 3 = …	8 + 8 = …	5 + 2 = …	7 + 9 = …	9 + 1 = …
3 + 3 = …	7 + 7 = …	5 + 4 = …	6 + 8 = …	8 + 3 = …
4 + 3 = …	6 + 6 = …	5 + 6 = …	5 + 7 = …	7 + 5 = …
5 + 3 = …	……………	……………	……………	……………
……………	……………	……………	……………	……………

Um wie viele Aufgaben die Serie jeweils fortgesetzt werden soll bzw. wie viele Aufgaben jeweils vorgegeben werden, sollte individuell entschieden werden. Häufig ergibt es sich natürlicher Weise, dass dabei der Rahmen des kleinen Einspluseins oder sogar der Zwanzigerraum verlassen wird.

Erfinde selbst! Wenn die Kinder das Grundprinzip der operativen Serien verstanden haben, sollten sie auch selbst solche Aufgabenpäckchen erfinden können. Hierbei sind verschiedene Variationen denkbar, z. B.:

- Erfinde ein schönes Päckchen! (ganz frei)
- Die erste (zweite) Zahl soll bei jeder Aufgabe die 3 sein!
- Die erste Aufgabe soll 2+2 lauten!
- Das erste Ergebnis soll 10 sein!
- Bei jeder Aufgabe soll das gleiche Ergebnis herauskommen!

Hierbei werden vermutlich einige Kinder nicht durchgängig ein Aufbauprinzip verwenden. Auch ist zu erwarten, dass Aufgaben zur Subtraktion oder solche mit mehr als 2 Summanden erfinden werden (Abb. 2).

4+2	7+8	5+3	2+2+5	1+2-1
4+3	8+9	3+5	2+3+6	1+3-1
5+3	9+10	5+5	2+4+7	1+4-1
5+4	10+1	3+3	2+5+8	1+5-1
6+4	10+2		2+6+9	1+6-1
6+5	10+3			1+7-1

Abb. 2: 'Andere' schöne Päckchen

Es kommt nun nicht darauf an, solche Eigenproduktionen auszusondern und auf schöne Päckchen hinzusteuern, die aus jeweils zwei Summanden bestehen und ein einziges, klar definiertes Konstruktionsprinzip aufweisen. Wichtig ist es statt dessen, die Erfindungen der Kinder anzuerkennen und deren 'Regeln' verstehen zu wollen. Inwieweit man dann im Unterricht behutsam auf das Einhalten bestimmter Konventionen bezüglich der Anzahl der Summanden und des Wirkungsbereichs der Regel drängt, muss im Einzelfall entschieden werden.

Was passt nicht? Auch bei dieser Variation müssen die Kinder über die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Aufgaben reflektieren. Ihnen wird eine Aufgabenserie aus etwa fünf Aufgaben vorgegeben, von denen eine das Muster stört. Die Kinder müssen die 'falsche' Aufgabe finden und durch die richtige ersetzen, also die Störung beseitigen. Im Schulbuch 'Das Zahlenbuch' (Wittmann & Müller 2000) findet sich an verschiedenen Stellen eine Variation derart, dass unter der Überschrift 'Schöne Päckchen?' verschiedene Aufgabenserien abgedruckt sind, und die Kinder diese nicht nur ausrechnen, sondern entscheiden müssen, ob ein schönes oder ein gestörtes Päckchen vorliegt. Wie das letzte der hierzu angeführten Beispiele andeutet, ist es bisweilen durchaus auch möglich, mehr als eine Störung einzubauen.

1 + 2 = 3	8 + 1 = …	1 + 1 = …	5 + 7 = …	9 + 2 = …
2 + 3 = 5	8 + 2 = …	2 + 2 = …	4 + 7 = …	8 + 3 = …
3 + 4 = 7	8 + 3 = …	3 + 5 = …	2 + 7 = …	7 + 5 = …
4 + 4 = 8	8 + 4 = …	4 + 4 = …	2 + 7 = …	6 + 4 = …
5 + 6 = 11	8 + 6 = …	5 + 5 = …	1 + 7 = …	5 + 6 = …

Auch hier ist 'kein Lehrer vor der Kreativität seiner Schüler sicher', wie es Bauersfeld einmal ausgedrückt hat. Steinweg (2001, 230) etwa berichtet von einem Erstklässler, der zu der links abgedruckten Serie sagt, die letzte Aufgabe würde nicht in das Muster passen, weil das Ergebnis größer als 10 sei und die Klasse zu dem Zeitpunkt nur bis 10 gerechnet habe. Erneut gilt: Wichtig ist zunächst nicht, dass die Kinder die Antwort geben, die der Lehrer aufgrund seiner Aufgabenzusammenstellung erwartet, sondern dass ihre Entscheidung aus deren Perspektive Sinn macht.

Ordne! Beim Ordnen werden den Kindern die durcheinander geratenen Aufgaben einer Serie vorgegeben. Sie werden gebeten, diese auszurechnen – wobei es einige Schüler geben mag, die von sich aus die vorgegebene Reihenfolge beim Rechnen nicht einhalten – und im Nachhinein zu sagen, wie man die Aufgaben anders anordnen könnte (links). Oder sie schreiben die Aufgaben geordnet ab und rechnen dieses schöne Päckchen dann aus (mittig). Etwas anspruchsvoller ist die Aufgabe, beispielsweise acht Aufgaben vorzugeben, aus denen die Kinder zwei schöne Päckchen zusammenstellen sollen (rechts).

5 + 6 = …

5 + 2 = …
5 + 5 = …
5 + 4 = …
5 + 3 = …

Ein schönes Päckchen
2 + 2 5 + 5
4 + 4
1 + 1
3 + 3

Zwei schöne Päckchen
9 + 1 3 + 8
1 + 6 6 + 4
4 + 9 7 + 3
8 + 2 2 + 7

Geschult wird bei diesen Variationen nicht nur die Einsicht in die operative Struktur schöner Päckchen, sondern auch das Beachten von Zahleigenschaften und Zahlbeziehungen, Fähigkeiten, die beim sog. flexiblen Rechnen von entscheidender Bedeutung sind.

Was fällt dir auf? Eine weitere Anregung zur Reflexion über Zusammenhänge besteht in der Frage 'Was fällt dir auf?', die je nach Situation in unterschiedlich offener Form gestellt werden kann (Abb. 3), beispielsweise …

- Was fällt dir auf? (ganz frei)
- Schaue dir die erste Zahl (die zweite Zahl) in jeder Aufgabe an. Was fällt dir auf?
- Schaue dir die Ergebnisse an. Was fällt dir auf?
- Vergleiche die erste und die zweite Aufgabe. Was ist gleich? Was ist anders?
- Wie verändert sich die erste Zahl (die zweite Zahl; das Ergebnis) von Aufgabe zu Aufgabe?

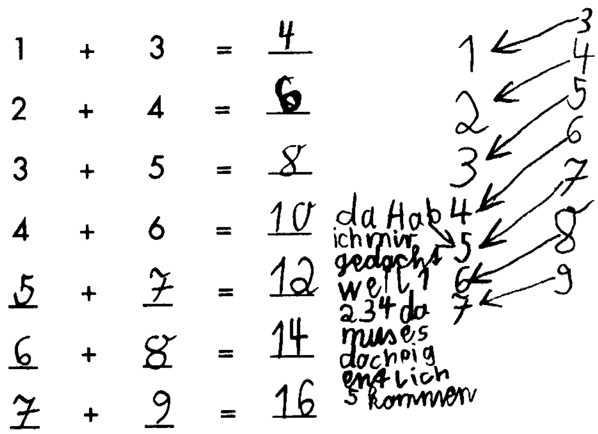


Abb. 3: Beschreibung von Auffälligkeiten

Wenn Kinder ihre Auffälligkeiten verbalisieren oder in Form von Zeichnungen bzw. kurzen Texten verschriftlichen, dann werden erfahrungsgemäß auch unerwartete Auffälligkeiten benannt, z. B.

- Alle Ergebnisse sind kleiner als 10.
- Die linke Zahl (1. Summand) ist immer größer als die rechte (2. Summand).
- Die linke Zahl ist immer kleiner als das Ergebnis. (!)
- Zuerst stehen 5 Zahlen untereinander, dann fünfmal plus, dann wieder fünf Zahlen, dann fünfmal gleich und dann wieder fünf Zahlen.
- Die letzten beiden Aufgaben waren schwerer als die anderen.

Auch hier gilt es zunächst wieder, solche ggf. unerwarteten Äußerungen zu würdigen. Schließlich ist es ganz normal, dass nicht allen Kindern auf Anhieb klar sein kann, was im Kontext des Mathematikunterrichts eher als interessante Auffälligkeit gilt und was eher nicht.

Erkläre! Die vermutlich schwierigste Aufgabe für die Kinder besteht darin, die von ihnen beobachteten Auffälligkeiten anhand von repräsentativen Beispielen zu erklären. Inwieweit die Kinder hier Plättchen zur Erläuterung heranziehen, hängt davon ab, ob sie diese als Hilfsmittel oder als eine weitere Darstellung kennengelernt haben, die zur Erhellung des Sachverhalts nichts oder wenig beiträgt. Dabei lassen sich aber häufig schon erstaunliche Einsichten in Beziehungen und Wirkungen von Rechenoperationen beobachten, etwa …

- Die erste Zahl wird um 1 größer, die zweite bleibt gleich. Das Ergebnis wird auch um 1 größer.
- Beide Zahlen werden um 1 kleiner. Das Ergebnis wird um zwei kleiner.
- Wenn ich bei der ersten Zahl eins dazu tue und bei der zweiten Zahl eins wegnehme, dann habe ich wieder das gleiche Ergebnis.

3.2 Schöne Päckchen zum Einmaleins

Während im vorangehenden Abschnitt verschiedene Arten des Umgangs mit operativ strukturierten Päckchen beschrieben wurden, die die Schüler(innen) zum Üben, aber auch zum Nachdenken und zum Entdecken anregen sollten, werden nun am Beispiel des Einmaleins verschiedene Variationen der Aufgabenpräsentation und damit auch der Aufgabenstellung beschrieben. Auch soll dargestellt werden, wie Plättchen als Argumentationshilfe dienen können.

Ein schönes Päckchen: Dieser Aufgabentyp ist zu Recht der am weitesten Verbreitetste. Eine Reihe von Aufgaben, die durch operative Variationen auseinander hervorgehen und wie auch in Kap. 3.1 untereinander notiert werden, ist zu berechnen. Außerdem können die ihnen zueigenen Auffälligkeiten beschrieben und begründet werden.

$1 \cdot 0 =$	$1 \cdot 1 =$	$0 \cdot 2 =$	$8 \cdot 10 =$	$10 \cdot 3 =$
$2 \cdot 1 =$	$2 \cdot 2 =$	$1 \cdot 3 =$	$7 \cdot 9 =$	$9 \cdot 4 =$
$3 \cdot 2 =$	$3 \cdot 3 =$	$2 \cdot 4 =$	$6 \cdot 8 =$	$8 \cdot 5 =$
$4 \cdot 3 =$	$4 \cdot 4 =$	$3 \cdot 5 =$	$5 \cdot 7 =$	$7 \cdot 6 =$
$5 \cdot 4 =$	$5 \cdot 5 =$	$4 \cdot 6 =$	$4 \cdot 6 =$	$6 \cdot 7 =$
…	…	…	…	…

Es bietet sich auch an, nicht nur Aufgaben aus jeweils zwei Faktoren zu behandeln, sondern durchaus auch komplexere Problemstellungen, etwa solche die sich aus der gegen- oder aus der gleichsinnig verlaufenden Addition und der Subtraktion von Einmaleinsreihen ergeben, z. B. …

$1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 =$	$1 \cdot 9 - 1 =$	$1 \cdot 4 + 10 \cdot 2 =$	$1 + 1 + 1 \cdot 1 =$	$10 + 5 + 10 \cdot 5 =$
$2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 =$	$2 \cdot 9 - 2 =$	$2 \cdot 4 + 9 \cdot 2 =$	$2 + 2 + 2 \cdot 2 =$	$9 + 5 + 9 \cdot 5 =$
$3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 =$	$3 \cdot 9 - 3 =$	$3 \cdot 4 + 8 \cdot 2 =$	$3 + 3 + 3 \cdot 3 =$	$8 + 5 + 8 \cdot 5 =$
$4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 =$	$4 \cdot 9 - 4 =$	$4 \cdot 4 + 7 \cdot 2 =$	$4 + 4 + 4 \cdot 4 =$	$7 + 5 + 7 \cdot 5 =$
…	…	…	…	…

Zwei schöne Päckchen: Bei diesem Grundtyp müssen jeweils zwei zusammengehörige Aufgabenserien berechnet werden: So sind bei dem für die Abb. 4 ausgewählten Beispiel im linken Aufgabenpäckchen jeweils drei aufeinanderfolgende Zahlen zu addieren; parallel dazu ist deren mittlerer Summand jeweils mit ‚3' zu multiplizieren. Die Schüler können dabei sowohl innerhalb einer Serie als auch im Vergleich von Plus- und Malaufgaben eine Reihe von Auffälligkeiten entdecken. So weisen etwa ‚zusammengehörige' Aufgaben stets das gleiche Resultat auf.

Diese Gleichheit kann man verstehen, wenn man den ersten Summanden auf Kosten des dritten um ‚1' erhöht, so dass man in der Summe das Dreifache des mittleren Summanden erhält. Allerdings ist es mindestens genauso aufschlussreich, diesen Zusammenhang auf der anschaulichen Ebene anhand repräsentativer Beispiele ‚einzusehen'. Dazu stellt man die drei aufeinanderfolgenden Summanden als untereinander angeordnete Punktreihen dar und verschiebt einen Punkt aus der letzten in die erste Zeile. So kann man unabhängig von der Größe der verwendeten Zahlenwerte stets die Ergebnisgleichheit begründen (Abb. 4), wie die Dokumente von Drittklässlern illustrieren, die gebeten worden waren, die ersten drei vorgegebenen Aufgaben auszurechnen, die Serie entsprechend fortzusetzen, Auffälligkeiten zu beschreiben und – falls möglich – auch zu begründen.

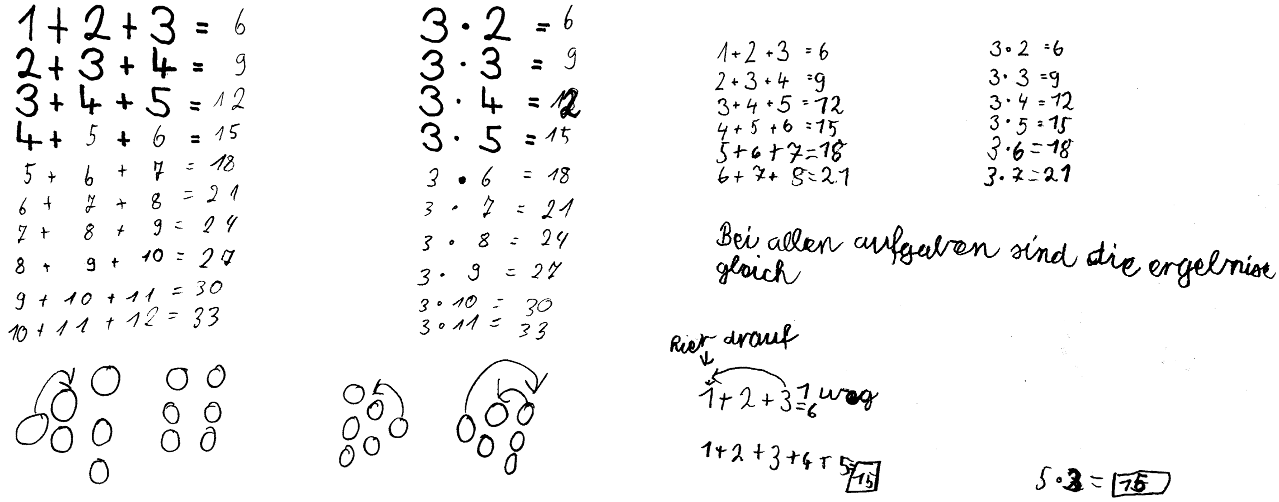
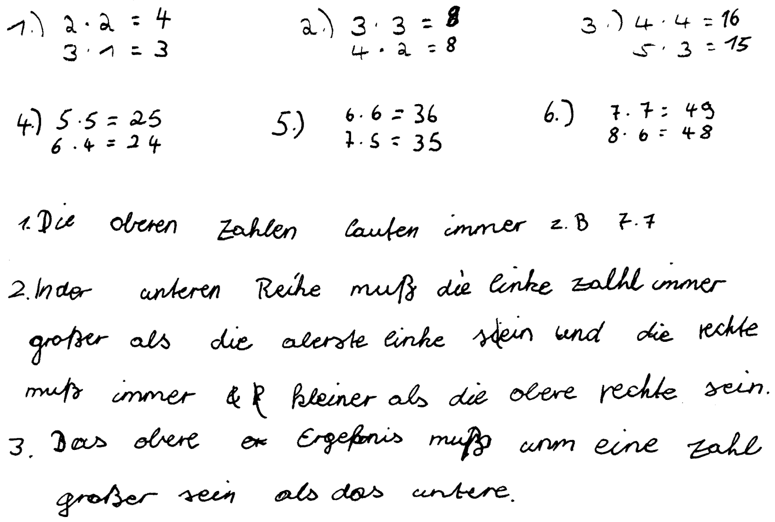
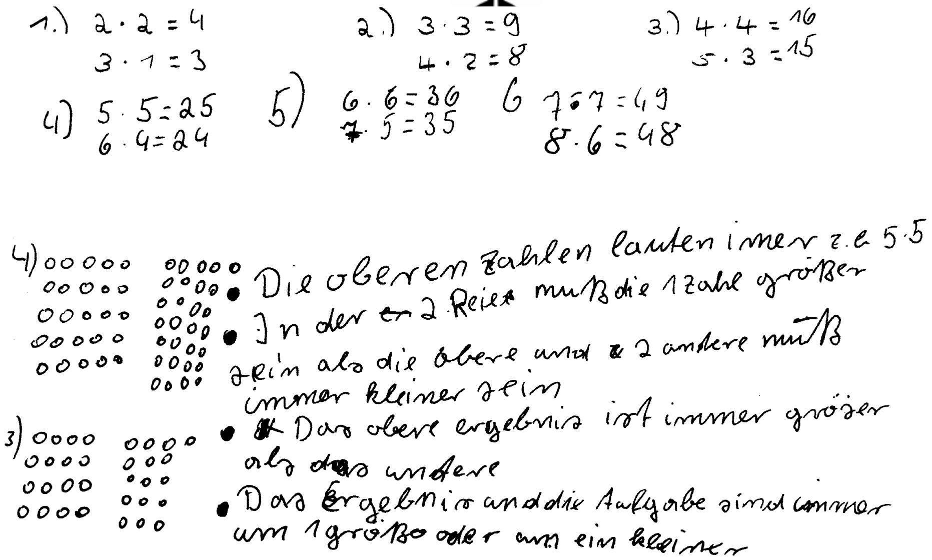


Abb. 4: Zahlentreppen

Aufgabenpärchen: Bei den ‚Aufgabenpärchen' werden jeweils zwei Aufgaben zweier schöner Päckchen als zusammengehörig hervorgehoben, um die Aufmerksamkeit auf diese Beziehung zu lenken. ‚Aufgabenpärchen' kann man beispielsweise so wählen, dass jeweils zwei *Malaufgaben* miteinander zu vergleichen sind, bei denen die Faktoren der jeweils oben stehenden Aufgabe zur Konstruktion der unten stehenden gegensinnig um ‚1' verändert werden (Abb. 5).



Rebecca



Max

Abb. 5: Aufgabenpärchen

Hier kann eine Punktmusterdarstellung helfen, zu verstehen, warum sich stets die Differenz ‚1' ergibt (Abb. 5). Hierzu geht man jeweils von der quadratischen Anordnung aus – in den beiden von Max gewählten Beispielen also von ‚5·5' bzw. ‚4·4' –, nimmt die letzte, hier grau markierte Spalte weg und ordnet sie unterhalb der jeweils letzten Zeile des dadurch entstandenen ‚5·4' bzw. ‚4·3'-Rechtecks an. Da die Anzahl der Spalten um ‚1' vermindert worden ist, behält man dabei stets einen Punkt übrig. Damit Schüler solche Beweise führen bzw. verstehen können, bedarf es natürlich einer gewissen Übung.

Allerdings würde ich es zunächst einmal als vollkommen ausreichend ansehen, wenn Auffälligkeiten – und keineswegs nur die von der Lehrerin als besonders bedeutsam erachteten – entdeckt, zur Weiterführung der Serie benutzt und beschrieben würden. Im Übrigen hat man mit der Beweisidee von Max eigentlich schon die Grundidee für einen Beweis der dritten Binomischen Formel: Man kann analog zeigen, dass n^2 dasselbe ist wie $(n+1)\cdot(n-1)+1$, und wenn man jeweils ein Plättchen entfernt, dass $n^2-1=(n-1)\cdot(n+1)$.

3.3 Schöne Päckchen zum (halb)schriftlichen Rechnen

Abschließend möchte ich zwei Beispiele geben, die verdeutlichen sollen, dass die Idee der operativen Päckchen keineswegs auf das Einspluseins und das Einmaleins beschränkt ist, sondern den Rechenunterricht auch in höheren Klassen bereichern kann. Auch soll in diesem Abschnitt gezeigt werden, dass schöne Päckchen im Rahmen einer anregenden Aufgabenstellung durchaus auch von den Schüler(innen) selbst konstruiert werden können.

Möglichst nahe an Null: Bei dieser Übungsform wird zunächst die Regel festgelegt, dass von einer bestimmten Zahl (nicht größer als 100) der Reihe nach die aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen subtrahiert werden, also –1, –3, –5 usw. Die Zielsetzung besteht darin, Startzahlen zu finden, die dazu führen, dass man ein möglichst kleines (positives) Ergebnis erhält. Noch besser ist es, wenn man Startzahlen findet, die genau zum Resul-

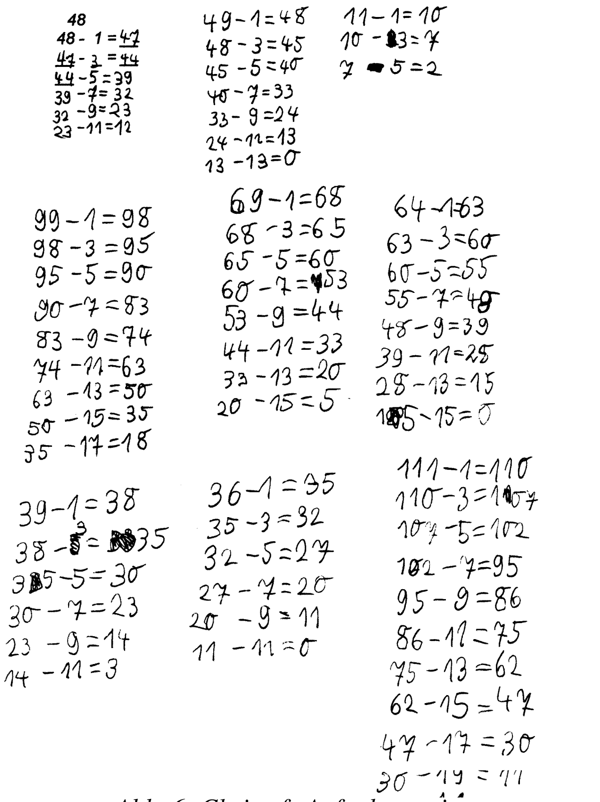


Abb. 6: Christofs Aufgabenserien

tat 0 führen. Bei diesen handelt es sich genau um die Quadratzahlen, wie man schon anhand der nebenstehenden Lösung von Christof vermuten kann, der ausgehend von denjenigen Startzahlen, die nicht exakt die 0 ergaben, geschickt operativ variierte.

Dass genau die Quadratzahlen die gesuchten Zahlen sind, kann man sich verdeutlichen, wenn man den Spieß umdreht und zu 0 die aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen hinzuzählt: 0+1=1; +3=4; +5=9; +7=16 usw. Variationen dieser Aufgabenstellung bestehen darin, die aufeinanderfolgenden geraden oder alle aufeinanderfolgende Zahlen zu subtrahieren. In beiden Fällen ergeben sich wieder besondere Zahlen als Startzahlen: die sog. Rechteckszahlen und die sog. Dreieckszahlen. (Abb.7)

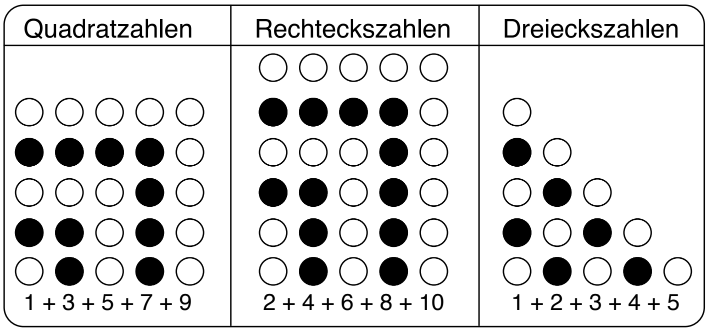


Abb. 7: Besondere Zahlen

Schöne Ergebnisse: Bei dieser Aufgabe bekommen die Kinder Rechenpäckchen vorgelegt, bei den die verwendeten Zahlen besondere Zahlen sind, wie etwa Schnapszahlen (z. B. drei gleiche Ziffern) oder solche, die aus aufeinanderfolgenden Ziffern bestehen (z. B. 234 oder 654). Beim folgenden Beispiel wurden Viertklässler gebeten, vorgegebene operative Serien auszurechnen und zu beschreiben, was ihnen auffallen würde. Marc-André notierte hierbei das Folgende.

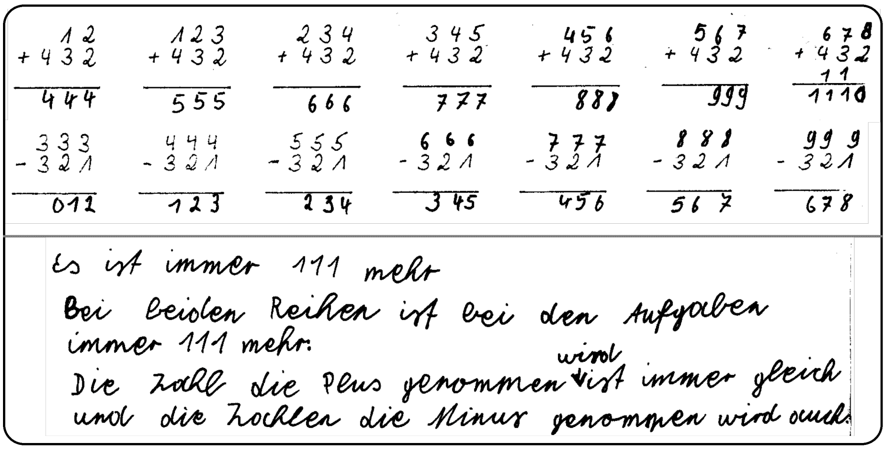


Abb. 8: Marc-Andrés Beschreibungen

Außerdem sollten die Kinder selbst ähnliche Aufgabenserien erfinden. Hier produzierte Marc-André vier unterschiedliche Serien, deren Resultate jeweils Vielfache von 111 darstellten (Abb. 9).

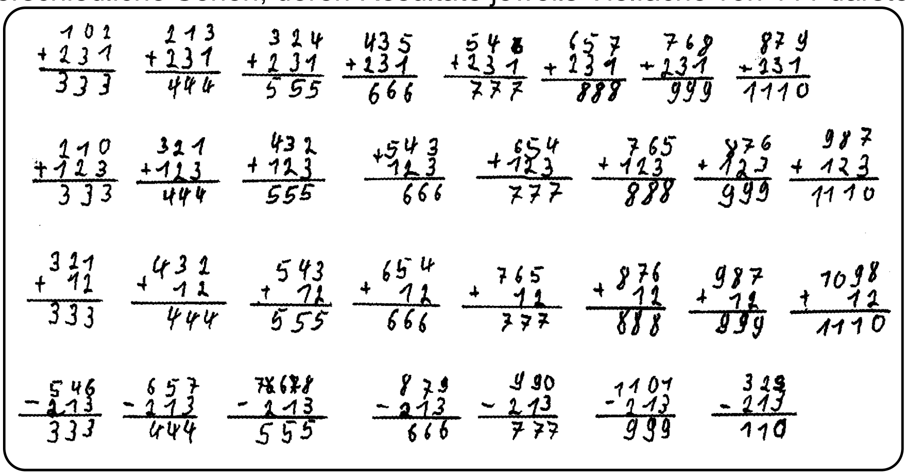


Abb. 9: Marc-Andrés Erfindungen

Wie bei den anderen Aufgaben des Kapitels 3 kann bei dieser Übungsform gleichzeitig entdeckt und geübt werden, denn die Schüler setzen sich mit Auffälligkeiten auseinander und rechnen gleichzeitig eine größere Anzahl von Aufgaben. In der Theorie des produktiven Übens (Wittmann 1992) werden solche Aufgaben als *operativ strukturierte* Übungen bezeichnet. Deren Besonderheit besteht darin, dass die gleichartigen Aufgaben einer Serie aus systematischen Variationen der Aufgabendaten erwachsen und diese in einem gesetzmäßigen Zusammenhang stehen.

4 Problemstrukturierte Übungsformen

Bei *problemstrukturierten* Übungen, einem anderen Grundtyp des produktiven Übens, sind die Aufgaben einer Serie im Umkreis einer übergeordneten Fragestellung innerhalb eines mathematisch substanziellen Problemkontextes angesiedelt, so dass die Auseinandersetzung mit einzelnen Aufgaben den Boden für die Untersuchung dieser übergeordneten Struktur bietet. Für solche Problemkontexte gebe ich im Folgenden mit den *Rechendreiecken*, den *Malhäusern* und den *Summen von Reihenfolgezahlen* drei Beispiele.

Dieses geschieht allerdings nicht ohne den Hinweis darauf, dass das produktive Üben mit den *sachstrukturierten* Übungen, bei denen sich die Aufgaben in einen lebensweltlichen Sachzusammenhang einordnen, noch einen dritten, hier aus eingangs geschilderten Erwägungen nicht näher beschriebenen Übungstyp kennt. Eine klare Unterscheidung in operativ, problem- und sachstrukturiert ist bei manchen Übungsformen nicht zweifelsfrei möglich, da auch Mischformen dieser Grundtypen existieren – so enthält die operativ strukturierte Aufgabe ‚Möglichst nahe an 0' (Kap. 3.3) durchaus auch Elemente problemstrukturierten Übens.

4.1 Rechendreiecke

Bei den Rechendreiecken (Wittmann & Müller 2000, 56f.) wird ein gleichseitiges Dreieck in drei kongruente Drachenvierecke zerlegt, in die jeweils Plättchen gelegt bzw. deren Anzahlen durch Zahlsymbole repräsentiert werden (Abb. 10). Die Summe der Anzahlen zweier benachbarter Felder – auch Mittelzahlen genannt – wird in die dafür vorgesehenen Felder am Rand – als sog. Randzahlen – eingetragen. Vier verschiedene Aufgabenstellungen im Kontext der Rechendreiecke möchte ich im Folgenden kurz beschreiben (vgl. Selter 1997).

Finde die fehlenden Zahlen! Die einfachste Aufgabe besteht darin, die Randzahlen bei gegebenen Mittelzahlen zu ermitteln (1 & 2). Diese Aufgabenstellung kann erschwert werden, indem eine (zwei, drei) Randzahl(en) und zwei (eine, keine) Mittelzahl(en) vorgegeben sind (vgl. 3 bis 6). In höheren Klassenstufen ist es möglich, größere Zahlen, negative Zahlen, Dezimalzahlen, Brüche, sogar algebraische Ausdrücke zu verwenden und damit Gelegenheit zur Übung des additiven Rechnens in anderen Stoffgebieten zu geben.

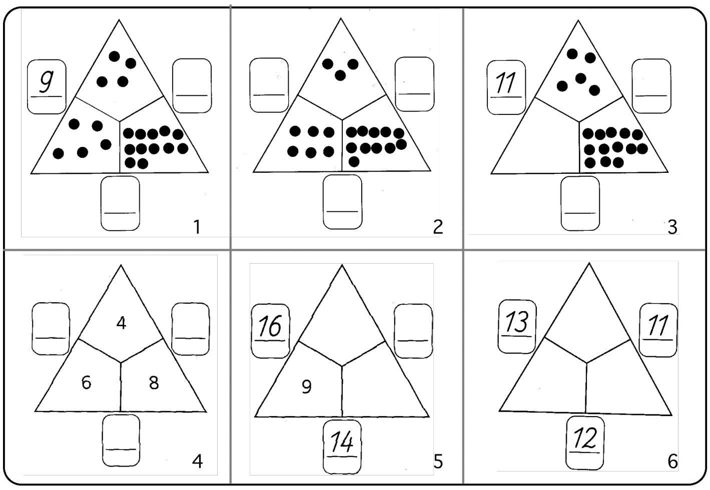


Abb. 10: Finde die fehlenden Zahlen!

Erfinde Rechendreiecke! Herausfordernd ist es auch, wenn die Kinder selbst Rechendreiecke für ihre Mitschüler erfinden, bei denen sie drei Zahlen vorgeben und die fehlenden drei zu bestimmen sind. Damit die ‚Erfinder' die Zahlen nicht wahllos hinschreiben, hat es sich bewährt, die jeweiligen Lösungen von ihnen selbst separat – etwa auf der Rückseite der Aufgabenkarte – notieren zu lassen. Damit üben sie selbst auch das Rechnen, und die Mitschüler, die die Aufgaben lösen, erhalten eine Kontrollmöglichkeit. Die Beispiele in Abb. 11 geben einen Eindruck davon, welche Rechendreiecke Viertklässler zu Beginn des Schuljahres erfunden und jeweils auch selbst gelöst haben. Dabei zeigt sich, dass nicht nur der bis dahin bekannte Zahlenraum bis 1000 überschritten wurde, sondern bereits auch einfache Dezimalzahlen (9,5) sowie Brüche (1/2) verwendet wurden.

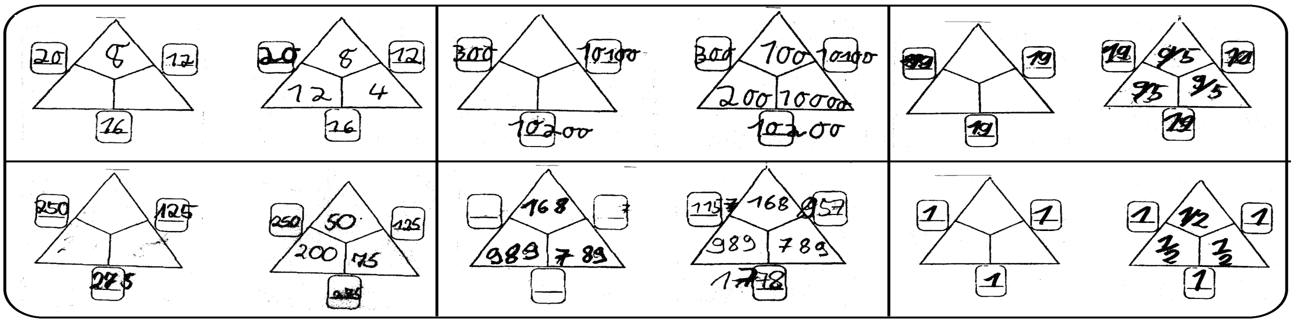


Abb. 11: Selbst erfundene Rechendreiecke

Systematische Variationen: Ein weiteres Problemfeld besteht darin, gezielt die Wirkung von systematischen Veränderungen zu untersuchen, die die Schüler (zunächst) anhand von repräsentativen Beispielen betrachten. Die Fragestellungen können sich beispielsweise damit befassen, wie sich – ausgehend von einem vorgegebenen Rechendreieck – die Randzahlen ändern,

- wenn jede Mittelzahl um 1 vergrößert wird;
- wenn die obere Mittelzahl um 1 verkleinert und die rechte um 1 vergrößert wird;
- wenn jeweils die obere und die linke Mittelzahl um 1 verkleinert wird;
- wenn alle drei Mittelzahlen um 2 vergrößert werden; usw.

In der Abb. 12 sind zwei solcher Serien abgebildet: Bei den ersten drei (bzw. vier) Rechendreiecken waren jeweils alle drei Mittelzahlen vorgegeben, bei den restlichen waren keinerlei Eintragungen vorgenommen worden. Drittklässler sollten die fehlenden Randzahlen ermitteln und bei den letzten Aufgaben diejenigen Mittelzahlen eintragen, die sich aus der Fortsetzung der Serie ergaben. Außerdem sollten sie in kleinen Texten Auffälligkeiten notieren: Im ersten Beispiel schreibt Christian zwar von der *rechten* Randzahl; seine sonstigen Ausführungen lassen es jedoch als ziemlich sicher scheinen, dass er darlegt, warum die *linke* Randzahl invariant bleibt: ‚Die rechte Randzahl bleibt gleich. Weil die obere Mittelzahl immer eins weniger wird. Die linke Mittelzahl wird immer eins mehr.' Rebecca setzte eine andere Aufgabenfolge fort, bei der die Mittelzahlen eines Rechendreiecks jeweils das Dreifache der jeweiligen Mittelzahl des vorangehenden darstellten: ‚Man kann jede Zahl in einem Dreieck mal drei rechnen, dann kommt sie beim nächsten Dreieck ´raus.' Dieses bezog sie – wie sie mündlich ergänzte – nicht nur auf die Mittel-, sondern auch auf die Randzahlen. Der Text von Vincent, dem dieselbe Aufgabenserie zugrundelag, zeigt, dass die Schüler durchaus überraschende Einsichten sammelten: ‚Wenn man vom ersten Dreieck die rechte Randzahl mit der linken Randzahl addiert vom zweiten Dreieck, erhält man die rechte Randzahl vom zweiten Dreieck'.

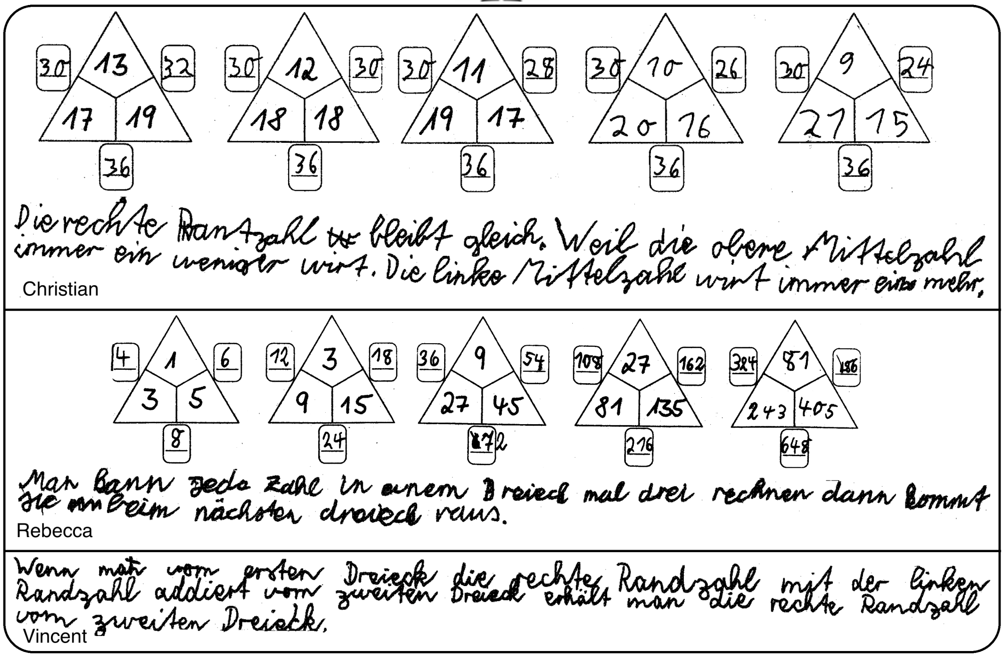


Abb. 12: Systematische Variationen

Genauso gut ist es natürlich möglich, die Problemstellungen zu modifizieren, indem betrachtet wird, wie sich die *Mittelzahlen* ändern, wenn man die Randzahlen entsprechend systematisch variiert.

Knobelaufgaben: Abschließend möchte ich einige sog. Knobelaufgaben erwähnen. Aus Platzgründen habe ich sie hier abstrakter formuliert, als es für den Unterricht (zumindest in der Grundschule) angemessen erscheint. Dem Leser wird es keine große Mühe bereiten, weitere Fragestellungen aufzuwerfen.

- Können alle drei Randzahlen gerade (bzw. ungerade) sein?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Summe der Randzahlen und der Summe der Mittelzahlen?
- Kann man drei beliebige Zahlen als Randzahlen wählen oder gibt es da Einschränkungen? Wenn ja, welche?
- Können die Randzahlen drei aufeinanderfolgende Zahlen (drei Quadratzahlen) sein?
- Übertrage alle Fragestellungen auf Rechenvierecke! usw.

4.2 Malhäuser

Die Malhäuser knüpfen an die sog. 'Plushäuser' (oder 'Zahlenhäuser') aus dem 1. Schuljahr an. Hier wie dort ist die Aufgabenvorschrift recht schnell beschrieben: In das Dach eines Hauses schreibt man eine Zahl (die 'Hausnummer'), in die einzelnen Stockwerke zugehörige Plus- bzw. Malaufgaben. Aufgabe und Tauschaufgabe werden als zwei verschiedene Aufgaben angesehen (vgl. Selter 2002a).

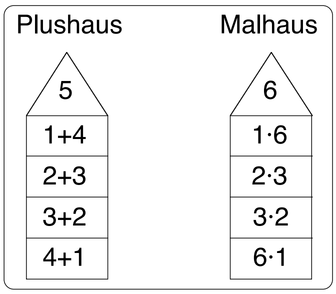


Abb. 13: Plus- und Malhaus

Natürlich kann man sich auf die Aufgaben des sog. kleinen Einmaleins (von 1·1 bis 10·10) beschränken, wenn deren Aufgaben im Unterricht besonders thematisiert werden. Es bietet sich jedoch geradezu an, etwa bei der Zahl 24 auch Aufgaben wie 1·24 oder 12·2 zuzulassen. Erstens tauchen diese beim Kopfrechnen im Hunderterraum natürlicher Weise auf; zweitens eröffnen sich dadurch neue und ergiebige Entdeckungsmöglichkeiten.

Am Beispiel des Malhauses mit der Zahl 6 kann deutlich werden, dass die Anzahl der Malaufgaben, die man finden kann, gleich der Anzahl der Teiler ist, die die entsprechende Zahl aufweist.

Die Teiler der Zahl 6 lauten 1, 2, 3 und 6, und zu jeder dieser Zahlen gibt es genau eine Malaufgabe mit eben diesen Teilern als 1. Faktor und dem sog. Co-Teiler als 2. Faktor.

In der Tabelle 1 ist für jede Hausnummer (fett) die Anzahl der Stockwerke angegeben. Sie mag auf den ersten Blick ein wenig unübersichtlich wirken, kann aber erstens beim selbst Entdecken von Zusammenhängen behilflich sein und zweitens im Unterricht auf einen Blick Informationen über die Anzahl von möglichen Aufgaben bei bestimmten Hausnummern geben.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
4	4	2	8	3	4	4	6	2	8
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
2	6	4	4	4	9	2	4	4	8
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
2	8	2	6	6	4	2	10	3	6
51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
4	6	2	8	4	8	4	4	2	12
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
2	4	6	7	4	8	2	6	4	8
71	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**
2	12	2	4	6	6	4	8	2	10
81	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**
5	4	2	12	4	4	4	8	2	12
91	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**
4	6	4	4	4	12	2	6	6	9

Tab. 1: Teiler und Teileranzahlen

Schaut man sich diese Tabelle an, so kann man Einiges erkennen:

- Es gibt genau eine Zahl mit nur einer Malaufgabe, nämlich die 1.
- Es gibt 25 Zahlen (von 100, also genau ein Viertel!) mit genau 2 Aufgaben; das sind die Primzahlen.
- Für nahezu jede dritte Zahl existieren genau 4 Aufgaben.
- Die meisten Zahlen haben eine gerade Anzahl von Aufgaben. Für nicht mehr als 10 von 100 Aufgaben gibt es eine ungerade Anzahl von Aufgaben – das sind genau die 10 Quadratzahlen. Hier sind Teiler und Co-Teiler identisch (z. B. 36=6·6).
- Die meisten Aufgaben, nämlich 12, findet man für die folgenden Zahlen: 60, 72, 84, 90, 96.
- Was vor allem Kinder überrascht: Die Größe einer Zahl hat – anders als bei den Plushäusern – keinen direkten Einfluss auf die Anzahl der Aufgaben. Es gibt große Zahlen mit wenigen Aufgaben (z. B. die 97) und kleine mit vergleichsweise vielen (z. B. die 12).
- Verdoppelt man eine Zahl, so wächst die Anzahl der möglichen Aufgaben jeweils um 1 (Überprüfen Sie es bei 2, 4, 8, 16, usw.!).
- Mehr für Lehrerinnen als für Viertklässler: Multipliziert man zwei Zahlen, die keinen gemeinsamen Teiler haben (z. B. 3·4=12), dann kann man auch die Anzahlen der zu findenden Malaufgaben entsprechend miteinander malnehmen (2·3=6). Sind die Zahlen nicht teilerfremd, so funktioniert das nicht.

Die Häuser 1 bis 20: Zunächst sollte anhand von kleineren Zahlen die 'Regel' erarbeitet bzw. – falls bekannt – von den Plushäusern auf die Malhäuser übertragen werden. Wichtig ist, dass nur Aufgaben mit genau 2 Faktoren notiert werden und dass Aufgabe und Tauschaufgabe als verschieden anzusehen sind. Ziel ist es dabei, jeweils alle möglichen Malaufgaben zu finden, die es zu jeder Hausnummer gibt. Wichtig ist des weiteren, dass auch Aufgaben 'jenseits' des sog. kleinen Einmaleins zugelassen sind (etwa 1·12 oder 12·1).

Sind diese 'Regeln' anhand von drei Beispielen (etwa der Hausnummern 3, 10, und 12) entwickelt und gefestigt worden, so kann sich nun eine Phase anschließen, in der die Schüler(innen) für die

Zahlen von 1 bis 20 alle möglichen Aufgaben finden und in die Stockwerke eintragen. Ob jedes Kind sich mit jeder Zahl beschäftigt, kleine Gruppen gebildet werden oder die Klasse arbeitsteilig vorgeht, hängt vom Leistungsstand der Schüler(innen) ab.

Die Ergebnisse werden dann z. B. an der Tafel oder am OHP zusammengetragen. Lässt man jedes Kind ein Malhaus mit vorgegebener Dachzahl ausfüllen, so hat man schnell alle 20 Malhäuser parat. Es fällt auf, dass es nur ein Einerhaus und ein Fünferhaus gibt: Vielleicht gibt es noch weitere bei größeren Zahlen. Es gibt viele Zweier- und Vierer-, aber nur zwei Dreierhäuser. Ist das Zufall? Gibt es vielleicht auch Siebener-, Achterhäuser usw? Viele Fragen können sich in der Diskussion ergeben, die es nahe legen, sich mit höheren Hausnummern zu befassen.

Höhere Hausnummern: Aufgrund der Beschränkung auf die Zahlen von 1 bis 20 tauchen Faktoren größer 10 nur in Aufgaben des Typs *1 mal Zahl* oder *Zahl mal 1* auf. Daher sollten zu Beginn dieser Phase anhand von zwei oder drei Beispielen (etwa der 23, der 24 und der 25) die Regeln nochmals wiederholt werden und insbesondere heraus gearbeitet werden, dass auch Aufgaben des Typs 1·24 oder 12·2 gesucht sind.

Die Lehrerin muss vorab entscheiden, ob sie nun alle Hausnummern von 1 bis 100 oder nur einen eingeschränkten Bereich (etwa von 1 bis 60) als 'Suchraum' zur Verfügung stellt, den einzelne Schüler(innen) bei Bedarf natürlich auch überschreiten können. Auch muss sie entscheiden, ob die Schüler(innen) direkt selbst Zahlen auswählen und nach der Anzahl ihrer Stockwerke forschen sollen, oder ob sie selbst zunächst eine Anzahl von repräsentativen Beispielen auswählt, anhand derer gewisse Phänomene zu Tage treten, bevor die Schüler(innen) selbst eigene Hausnummern aussuchen.

Man kann den Kindern für die ggf. vorgegebenen Hausnummern auch signalisieren, wie viele Stockwerke es jeweils gibt. Das kann deren systematisches Vorgehen erleichtern (da sie wissen, dass ggf. noch Aufgaben fehlen, und sie gezielt suchen), aber auch erschweren (wenn sie 'zufällig' alle Möglichkeiten gefunden haben und nicht mehr weiter suchen müssen).

Auch hierbei geht es wieder um das Beobachten von Auffälligkeiten: Wer hat ein Neunerhaus gefunden? Ein Zehner-, gar ein Elfer- oder Zwölferhaus? Gibt es weitere Einer- oder Fünferhäuser? Findet man auch bei großen Hausnummern kleine Häuser? usw.

Einfamilienhäuser und Hochhäuser: Naturgemäß interessieren Kinder Extreme, in diesem Zusammenhang also Häuser mit wenigen und solche mit vielen Stockwerken. Es bietet sich an, einen Teil der Klasse nach besonders niedrigen (1 bis 3 Stockwerke) und nach besonders hohen Häusern suchen zu lassen oder sich von vornherein auf hohe Häuser zu beschränken. Was man dabei als hoch bezeichnet, hängt vom gewählten Suchraum ab. Nimmt man den Zahlenraum bis 60 (100), so könnte man beispielsweise Häuser, die mehr als 5 (8) Stockwerke haben, als besonders hoch bezeichnen.

Auch bei dieser Aufgabe ist es natürlich möglich, zunächst einen gewissen Zahlenpool vorzugeben, um den Suchraum einzuschränken und so das Auftreten von Erfolgen wahrscheinlicher werden zu lassen, bevor die Schüler(innen) sich selbst Zahlen suchen. Selbstverständlich können einzelne Schüler(innen) auf der Suche nach hohen Häusern auch den Hunderterraum verlassen.

4.3 Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen

Beim den ‘Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen’ geht es darum, verschiedene, unterschiedlich anspruchsvolle Probleme zu lösen, die sich im Umkreis von Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ergeben. Im 2. Schuljahr beispielsweise kann man die Schüler bitten, jeweils drei Reihenfolgezahlen zu addieren, z. B.: 2+3+4 oder 13+14+15 oder …, Auffälligkeiten zu beschreiben und ggf. sogar zu begründen. Im 8. Schuljahr könnte die Aufgabe lauten: Finde alle Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen (also nicht nur diejenigen mit drei Summanden), deren Ergebnis 1000 ist! Versuchen Sie doch selbst einmal, alle Lösungen zu finden, bevor Sie weiterlesen!
Die Aufgabenstellung für das 4. bis 6. Schuljahr, von der im weiteren berichtet werden soll (vgl. Schwätzer & Selter 2000), bestand darin, alle Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen zu finden, deren Resultat nicht größer ist als 25. Aus der Tabelle 2 ist ersichtlich, dass es hier 27 verschiedene Lösungen gibt.

Wie viele finden wir? Zunächst sollten alle Kinder sämtliche Summen niederschreiben, die sie fanden. Am Ende dieser Phase sollten die Kinder an Gruppentischen mit zur gleichen Zeit fertig werdenden anderen Zweiergruppen ihre Ergebnisse abgleichen bzw. ergänzen und dabei möglicherweise schon erste Diskussionen über Findestrategien führen.
Joana und Fabian (Abb. 14) produzierten beispielsweise zunächst 4er-Summen mit der Strategie, eine Aufgabe durch Erhöhung aller Summanden um 1 aus der vorangehenden zu erzeugen, bis die 25 überschritten wurde, um dann mittels ähnlich systematisch 3er-Summen zu finden. Auch die Lösung von Jennifer und Julian lässt strategiegeleitetes Vorgehen vermuten.

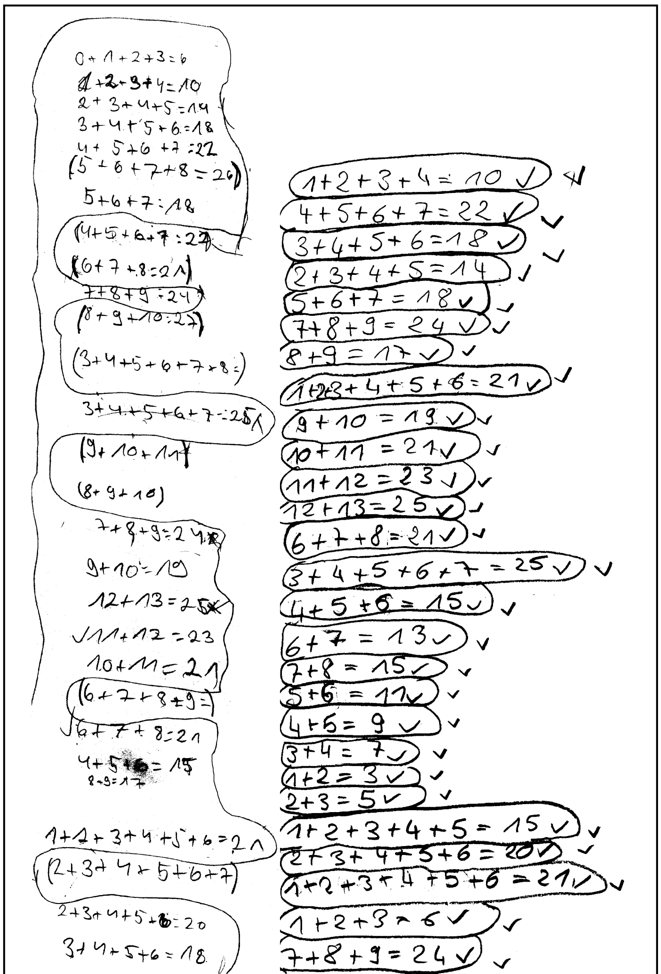


Abb. 14: Produktion von Lösungen

1					
2					
3	1+2				
4					
5	2+3				
6		1+2+3			
7	3+4				
8					
9	4+5	2+3+4			
10			1+2+3+4		
11	5+6				
12		3+4+5			
13	6+7				
14			2+3+4+5		
15	7+8	4+5+6		1+2+3+4+5	
16					
17	8+9				
18		5+6+7	3+4+5+6		
19	9+10				
20				2+3+4+5+6	
21	10+1	6+7+8			1+2+3+4+5+6
22			4+5+6+7		
23	11+1				
24		7+8+9			
25	12+1			3+4+5+6+7	

Warum haben wir alle gefunden? Anschließend ging es um die Begründung der Vollständigkeit der gefundenen Lösungen. Zunächst stellte die Lehrperson aus den teilweise auf Folie kopierten Eigenproduktionen die verschiedenen Anzahlen gefundener Möglichkeiten vor, um darauf hin zu fragen, welche Anzahl denn nun die richtige sei.
Die Kinder sollten dann gemeinsam ein Dokument erstellen, in dem sie durch Ordnen die Vollständigkeit ihrer Lösungen begründen. „Ordnen" hieß hier sowohl das geordnete Abschreiben der gefundenen Ergebnisse bzw. deren Ausschneiden und geordnetes Aufkleben.
Die Gruppe um Joana (Abb. 15) beispielsweise zerschnitt dazu eine Kopie ihres Ergebnisblattes, ordnete die Ergebnisse nach Anzahl der Summanden sortiert an, eliminierte doppelte, ergänzte noch fehlende Lösungen und gelangte so schließlich zu der Auffassung, dass es nur ihre 27 gefundenen Möglichkeiten gab.

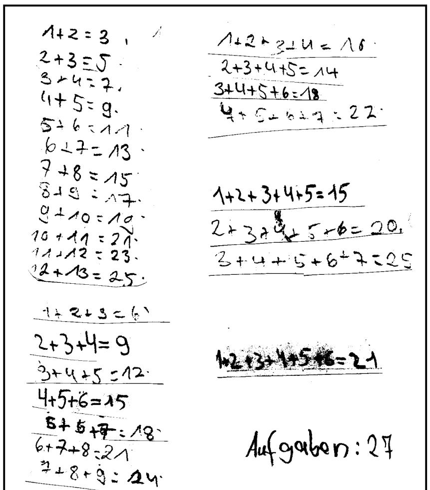


Abb. 15: Systematisierungen

Reflexion über die Entdeckungen: Am Ende nahmen die Kinder eine individuelle Rückschau auf den Lernprozess vor. Zu diesem Zweck sollten sie einen Text zu einer der beiden folgenden Fragestellungen verfassen: „Wie viele Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen mit Ergebnis nicht größer als 25 gibt es?" oder „Was ich über Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen gelernt habe" (Abb. 16).

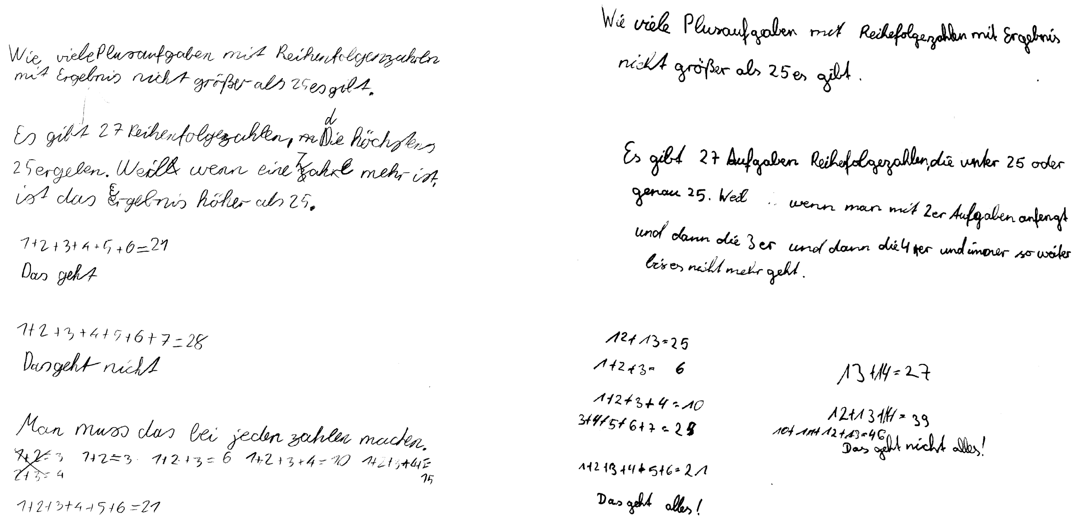


Abb. 16: Reflexionen

Literatur

Lorenz, Jens Holger (1992): *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe.

Schwätzer, Ulrich & Christoph Selter (2000): Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen – eine Unterrichtsreihe für das 4. bis 6. Schuljahr. In: *Mathematische Unterrichtspraxis*. H. 2, 28–37.

Selter, Christoph (1997): Entdecken und Üben mit Rechendreiecken. In: Friedrich Jahresheft ‚Lehrmethoden - Lernmethoden' 1997, 88-91.

Selter, Christoph (2002): Operatives Üben: Tradition und Innovation. In: Albrecht Abele & Christoph Selter (Hg.): *Mathematikunterricht zwischen Tradition und Innovation*, S. 229-241.

Selter, Christoph (2002a): Malhäuser – eine Übungsform zur Zahlzerlegung. In: *Die Grundschulzeitschrift*. H. 152, S. 44-46.

Steinweg, Anna Susanne (2001): *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*. Münster.

Sundermann, Beate & Christoph Selter (2000): Quattro Stagioni. Nachdenkliches zum Üben an Stationen aus mathematikdidaktischer Perspektive. In: *Friedrich Jahresheft: Üben und Wiederholen*. S. 110-113.

Winter, Heinrich (1984): Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. In: *mathematik lehren*. H. 2, 4-11.

Wittmann, Erich Ch.(1990): Wider die Flut der „bunten Hunde" und der „grauen Päckchen": Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In: Erich Ch. Wittmann & Gerhard N. Müller: *Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd.1: Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Stuttgart: Klett, 152-166.

Wittmann, Erich Ch.((1992): Üben im Lernprozeß. In: Erich Ch. Wittmann & Gerhard N. Müller: *Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd.2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen*. Stuttgart: Klett, 175-182.

Wittmann, Erich Ch. & Gerhard N. Müller (1990; 1992): *Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd.1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Bd. 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen*. Stuttgart: Klett

Wittmann, Erich Ch. & Gerhard N. Müller (2000; Hg.): *Das Zahlenbuch. Mathematik im 1. Schuljahr*. Leipzig: Klett.