



Die Raumvorstellung herausfordern mit Somawürfeln

*Lerntandems färben fehlende Flächen am Netz eines Somawürfels
und verbalisieren gefundene Strategien*

Im folgenden Artikel soll eine Kartei vorgestellt werden, die es ermöglicht, an vorhandene Kompetenzen im Bereich „Raum und Form“ anzuknüpfen und diese weiter herauszufordern. Um den Aufbau der Kartei zu erläutern, wird es zunächst nötig sein, den Begriff der Raumvorstellung etwas näher zu betrachten. Weiterhin wird der Somawürfel kurz vorgestellt, da diese theoretischen Hintergründe den Ausgangspunkt zur Entwicklung der hier vorgestellten Kartei bilden.

1. Theoretische Einbettung

1.1 Raumvorstellung

Da wir in einer dreidimensionalen Umwelt leben, ist unsere Raumvorstellung in zahlreichen alltäglichen Situationen von zentraler Bedeutung. Diese geht weit über das Beschreiben von Wegen oder das Orientieren in einer neuen Umgebung hinaus. Raumvorstellung ist beispielsweise auch vonnöten, „wenn man gedanklich vorwegnimmt, wie Objekte eingepackt, eingeräumt oder transportiert werden“¹ oder wenn ein zugeworfener Ball gefangen werden soll. Weiterhin heißt es z.B. bei Grassmann u.a., dass ein Bezug zwischen der Raumvorstellung und dem Erfolg im Beruf besteht, da eine gute Raumvorstellung Auswirkungen auf die persönliche Organisation von Aufgaben habe.² So herrscht allgemein Einigkeit darüber, dass die Raumvorstellung „eine Basiskomponente der Intelligenz“³ ist.

Auch wird an zahlreichen Stellen in der Fachliteratur auf den engen Zusammenhang zwischen der Raumvorstellung und der Arithmetik verwiesen.⁴ Erst die Vorstellung von Zahlen, deren Beziehungen sowie mathematischen Operationen ermöglichen echtes Verstehen sowie flexibles Rechnen.⁵ Vor diesem Hintergrund ist es verständlich, dass Radatz/Rickmeyer die Förderung der Raumvorstellung als „eines der obersten Ziele des Geometrieunterrichts“⁶ bezeichnen. Die Raumvorstellung entwickelt sich zudem „zwischen dem 7. und dem 13. Lebensjahr – verglichen mit den anderen Intelligenzfaktoren – besonders stark[...]. Damit gewinnt die Behandlung geometrischer Inhalte in der Grundschule unter dem Aspekt der Förderung der Raumvorstellung eine fundamentale Bedeutung.“⁷ Krauthausen/Scherer sprechen von einer „sensiblen Phase“ in diesem Alter.⁸

Auch in den KMK-Bildungsstandards Mathematik findet die Raumvorstellung eine besondere Beachtung im Inhaltsfeld „Raum und Form“.⁹

Der Begriff der „Raumvorstellung“ bzw. des „räumlichen Vorstellungsvermögens“ wird in der Fachliteratur jedoch nicht einheitlich definiert.¹⁰

An dieser Stelle sollen die **fünf** von Grassmann u.a. genannten **Teilaspekte** vorgestellt werden, da in diesen wesentliche Komponenten anderer Ansätze aufgegriffen, konkretisiert und voneinander abgegrenzt werden.¹¹

1. Die „räumliche Wahrnehmung“ betrifft alle Fähigkeiten, „Objekte, Lagebeziehungen zwischen

¹ Eichler/Eipert 2005, S. 15.

² Vgl. Grassmann u.a. 2010, S. 99.

³ Ebd; Vgl. auch Krauthausen/Scherer 2007, S. 59.

⁴ Vgl. Grassmann u.a. 2010, S. 98f; Lorenz 2006, S. 10f; Krauthausen/Scherer 2007, S. 60f; Jansen 2007; Merschmeyer-Brüwer 2011, S.5; Winkler 2006, S.5.

⁵ Vgl. Grassmann u.a. 2010, S. 98f; Lorenz 2006, S. 10f.

⁶ Radatz/Rickmeyer 1991, S. 17.

⁷ Ebd; S. 145; Vgl. auch Carniel/Knapstein/Spiegel 2002, S. 4; Winkler 2006, S. 5.

⁸ Krauthausen/Scherer 2007; S. 59.

⁹ Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) 2005, S.10.

¹⁰ Bspw. die Teilfähigkeiten nach Besuden 1979, Radatz/Rickmeyer 1991, Linn und Petersen 1985. Vgl. hierzu Radatz/Rickmeyer 1991, S. 17, 144f; Franke 2007, S. 55f; Schipper 2009, S. 250ff.

¹¹ Vgl. Grassmann u.a. 2010, S. 99f; Eine mit der Lerngruppe aufgestellte Übersicht über die fünf Komponenten in Anlehnung an Ruwisch 2006 findet sich unten.

Objekten und [...] Lagebeziehungen von Objekten bezüglich des eigenen Körpers wahrzunehmen¹². Sie umfasst die fünf Bereiche nach Frostig.¹³

2. Die Teilfähigkeit „**räumliche Beziehungen**“ umfasst das Vorstellen und Beschreiben von räumlichen Lagebeziehungen unbewegter Objekte, wie z.B. darüber – darunter, dahinter – davor. Der Standort der Betrachterin bzw. des Betrachters befindet sich bei dieser Teilkomponente außerhalb der räumlichen Situation.
3. Die „**räumliche Orientierung**“ beinhaltet die „Fähigkeit, die eigene Person gedanklich richtig in eine räumliche Situation einzuordnen, sich real und mental im Raum zurechtzufinden.“¹⁴
4. Fähigkeiten, wie das gedankliche Falten oder Zerschneiden von Objekten, also das mentale Operieren mit Teilen eines Objektes, werden dem Bereich der „räumlichen Visualisierung“ oder auch „**Veranschaulichung**“ zugeordnet.
5. Die Teilkomponente „**mentale Rotation**“ umfasst die Fähigkeit, sich Rotationen eines Objektes als Ganzes „schnell und präzise“¹⁵ vorstellen zu können.

Die folgende Grafik gibt einen Überblick über die Einordnung verschiedener Situationen und Aufgabenstellungen:

Raumvorstellung		
In meiner Vorstellung Ich befinde mich	... bewege ich die Dinge nicht	... bewege ich die Dinge
... außerhalb der Situation	Räumliche Beziehungen	a) Veranschaulichung <small>(ich bewege Teile des Objekts)</small> b) Gedankliches Bewegen <small>(ich bewege das Objekt als Ganzes)</small>
... in der Situation	Räumliche Wahrnehmung	Räumliche Orientierung

1.2 Der Somawwürfel

In der Fachliteratur wird der Somawwürfel in Zusammenhang mit der Schulung unterschiedlicher Teilaspekte der Raumvorstellung erwähnt und im Kontext entsprechender Aufgabenstellungen vorgestellt.¹⁶

Der Somawwürfel wurde 1936 von dem dänischen Mathematiker Piet Hein erfunden. Ausgangspunkt waren alle Würfelmehrlinge, die sich mit einem, zwei, drei und vier Würfeln bilden lassen. „Wenn zwei, drei und vier Würfel so miteinander verbunden werden, dass sich immer zwei Flächen berühren, entstehen mit zwei Würfeln ein Würfelzwilling, mit drei Würfeln zwei Würfeldrillinge, mit vier Würfeln acht Würfelvierlinge.“¹⁷ Die auf diese Weise gewonnenen sieben irregulären Körper – sechs Würfelvierlinge und ein Würfeldrilling – bestehen aus genau 27 Einzelwürfeln und lassen sich, Symmetrien ausgenommen, auf 240 Weisen zu einem 3x3x3-Würfel zusammensetzen.

¹² Grassmann u.a. 2010, S. 99.

¹³ Vgl Ebd; S. 111ff.

¹⁴ Ebd; S. 100.

¹⁵ Ebd.

¹⁶ Vg. Hirt/Luginbühl 2003, Winkler 2006, Rickmeyer 1996.

¹⁷ Hirt/Luginbühl 2003, S. 4.

2. Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für den Mathematikunterricht?

Durch die obige Betrachtung der fünf definierten Teilaspekte der Raumvorstellung können Aufgabenstellungen aus Schulbüchern oder bisheriger Lernumgebungen eingeschätzt und verglichen werden. Meist wurden in einer vierten Jahrgangsstufe, für welche die Kartei konstruiert wurde, die Raumvorstellung bereits in verschiedenen Kontexten geschult. Man denke z.B. an Lernumgebungen zu Würfelnetzen im Fach Mathematik, aber auch an Wegbeschreibungen, Zeichnungen des eigenen Schulwegs, Aufgaben zur Orientierung auf der Karte sowie der Beschäftigung mit und der praktischen Anwendung von Verkehrsregeln im Rahmen der Mobilitätserziehung im Sachunterricht. Betrachtet man Lerninhalte aus vergangenen Schuljahren, so ermöglicht dies, im Mathematikunterricht andere Schwerpunkte zu setzen und so neue Aspekte der Raumvorstellung einzubringen.

Anhand von Netzen des Somawürfels werden bei der hier vorgestellten Kartei insbesondere die Teilkomponenten „**Mentale Rotation**“ und „**Veranschaulichung**“ auf unterschiedlichen Niveaustufen geschult.

2.1 Was fordert die Kartei „Somawürfelnetze“?

Die Kartei¹⁸ besteht aus insgesamt 40 Karten in vier Schwierigkeitsstufen. Diese Karten zeigen unterschiedliche Netze eines Somawürfels. Diese Netze sind jedoch an jeweils einer oder mehreren Flächen nicht gefärbt. Im Folgenden soll erläutert werden, was durch die zugehörige Aufgabenstellung „Färbt die fehlende(n) Fläche(n) des Somawürfelnetzes und notiert eure Strategien!“ von den Lernenden gefordert wird.

a) „Färbt die fehlende(n) Fläche(n) des Somawürfelnetzes...“

Durch diesen Teil der Aufgabenstellung werden zwei Komponenten des räumlichen Vorstellungsvermögens gefordert. Durch die Darstellung des Somawürfels in Form seines (unvollständigen) Netzes, muss, um die fehlende Fläche korrekt kolorieren zu können, gedanklich gefaltet werden (Teilaspekt: **Veranschaulichung**). Die Kinder müssen Überlegungen anstellen, welche Kanten sich beim Zusammenfallen des Würfelnetzes berühren. Aufgrund der Tatsache, dass es sich um das Netz eines Somawürfels handelt, wird es weiterhin erforderlich zu überlegen, an welchen Stellen die entsprechenden Kanten sich berühren, denn jede Kante ist durch die Zusammensetzung des Somawürfels aus 27 Einzelwürfeln in drei Abschnitte eingeteilt. Es findet somit zum einen eine Wiederholung, zum anderen aber auch eine Erweiterung der Kenntnisse und inneren Vorstellungen zu den bereits behandelten Würfelnetzen statt. Doch können mit der „Veranschaulichung“ nicht alle Felder gefärbt werden. Spätestens um das mittlere Feld einer fehlenden Fläche zu färben, wird die Fähigkeit der „**mentalen Rotation**“ gefordert. Auf Grundlage der zweidimensionalen Abbildung des Somawürfels in Form seines Netzes müssen nun Rückschlüsse auf die Raumlage einzelner Teile des Somawürfels gezogen werden. Dabei können z.B. Teile aufgrund ihrer Größe ausgeschlossen oder aber ihre Lage aufgrund der bereits gefärbten Würfelflächen des Netzes eindeutig bestimmt werden. Dafür müssen die Somateile im Kopf oder handelnd in verschiedene Lagen gebracht und jeweils mit der zweidimensionalen Darstellung des Netzes abgeglichen werden. Da nach Franke den Handlungserfahrungen eine wichtige Bedeutung bei der Entwicklung der Raumvorstellung zukommt¹⁹ und auch Radatz/Rickmeyer davor warnen, zu schnell auf die reine Vorstellungsebene zu wechseln,²⁰ ist es sinnvoll, den Kindern die Teile des Somawürfels in der Arbeitsphase zur Verfügung zu stellen (fachdidaktischer Grundsatz des entdeckenden, anschaulichen und handlungsorientierten Lernens). Um dennoch das gedankliche Rotieren anzuregen, empfiehlt es sich, in der Arbeitsphase die Regel aufzustellen, dass immer nur zwei Teile des Somawürfels aufeinander gesetzt bzw. gemeinsam in Händen gehalten werden dürfen, bis das Netz vollständig gefärbt wurde. Hat ein Lerntandem das ausgewählte Somawürfelnetz vollständig gefärbt, so kann eine

¹⁸ Die Idee entstand bei der Beschäftigung mit den Spielideen „Würfel bauen“ (Hirt/Luginbühl 2003) und „Soma-Würfel“ (Winkler 2006). Bei beiden Spielen soll der Somawürfel aufgrund unterschiedlicher Ansichten zusammengebaut, bei dem Spiel nach Winkler soll dieser zudem von unten gezeichnet werden. Ich sah in der Form der Darstellung als Somawürfelnetz den Vorteil, dass bereits behandelte Aspekte der Einheit aufgegriffen, wiederholt und vertieft werden können.

¹⁹ Franke 2007, S. 56.

²⁰ Radatz/Rickmeyer 1991, S. 145.

Selbstkontrolle durch das Zusammenbauen des Somawürfels stattfinden. Dabei dient das nun vollständige Netz als Bauplan. Erneut muss dabei im Kopf ein ständiger Wechsel zwischen zweidimensionaler Abbildung und dreidimensionaler Realität stattfinden.

b) „... und notiert eure Strategien!“

In den Bildungsstandards Mathematik wird sowohl das „Kommunizieren“ als auch das „Argumentieren“ als einer von sechs Kompetenzbereichen genannt und konkretisiert.²¹ „Vorgehensweisen beschreiben“ sowie „Begründungen formulieren“ werden hier u.a. als Standards genannt. „Im Mittelpunkt steht die Befähigung zur sachlich korrekten Beschreibung mathematischer Sachverhalte.“²² Immer wieder wird in der Fachliteratur der Zusammenhang von Verstehensprozessen und Sprache betont.²³ Die Verlangsamung der Gedanken beim Schreiben kann u.U. zu einer Vertiefung von Erkenntnissen führen.²⁴ Gallin/Ruf sprechen davon, dass flüchtige Vorstellungen sich verdichten und durch die Strukturierung dieser bei der Verschriftlichung bleibende Spuren hinterlassen können.²⁵ All diese Aspekte erhalten über den zweiten Teil der Aufgabenstellung Einzug in das Arbeiten mit der Kartei. Die Aufgabenstellung fordert nun auch das Beschreiben und Begründen genutzter Strategien. Vorgehensweisen müssen von den Lernenden hinterfragt und auf ihre Effizienz hin überprüft werden. Durch den wiederholten Einsatz von Aufgaben mit derlei Zielsetzung kann sich langfristig „eine Kultur des Entdeckens und Forschens im Mathematikunterricht [...] entwickeln“²⁶. Neben erlangten Ergebnissen rückt so der Prozess des Lösens ins Zentrum des Interesses. Dabei kann das Beschreiben in mehrfacher Hinsicht auf unterschiedlichen Niveaustufen stattfinden. Neben der Präzision kann auch die Nutzung eingeführter Fachbegriffe differieren. Ein gemeinsam erstellter Wortspeicher kann den Kindern beim Beschreiben eine Hilfe sein.

2.2 Welche Vorteile kann das Arbeiten in Lerntandems bieten?

Die Kartei kann durchaus in Einzelarbeit bearbeitet werden, die Aufgabenstellung sieht jedoch aus verschiedenen Gründen dennoch eine Arbeit in (heterogenen) Lerntandems vor. Lerntandems werden dabei als Zweiergruppen von Kindern verstanden, die von der Lehrkraft für diese Einheit eingeteilt werden. Bildet nämlich die Lehrkraft die Tandems, so ist es ihr möglich, z.B. auf Erkenntnisse bestimmter Lernausgangslagen, Stärken und Schwächen im sprachlichen oder sozialen Bereich einzugehen. Die Kinder können sich unter Umständen gut ergänzen, sodass auf diese Weise eine Differenzierungsmaßnahme durch vorangestellte Überlegungen geschaffen werden kann, welche die Lehrkraft im Unterricht stark entlastet. Sprachliche Barrieren können gemeinsam u.U. leichter überwunden werden. Diese Möglichkeit der heterogenen, im Sinne von ergänzenden, Gruppenbildung geht z.B. bei der Methode der „Mathe-Konferenzen“ im Alltag meist verloren. Häufig bilden sich hier schnell relativ leistungshomogene Gruppen. Kinder, die lange für die Bearbeitung der gestellten Aufgabe brauchen bleiben „übrig“ und bilden oftmals eine leistungsschwache Gruppe, in der ein gewinnbringender Austausch schwierig ist.

Weiterhin fördert ein solches Einteilen der Lehrkraft das Soziale Lernen im Klassenverband. Jede(r) solle mit jeder/jedem auskommen und für eine absehbare Zeit auch zusammenarbeiten können.

Weiterhin ist bei der Verschriftlichung von Strategien zu bedenken, dass das adressatenbezogene Schreiben eine sehr anspruchsvolle Fähigkeit ist.²⁷ Dabei geht die Fähigkeit der mündlichen Begründung der schriftlichen meist voraus.²⁸ Dies gilt auch im Fach Mathematik. Durch die Zusammenarbeit wird die vorherige mündliche Kommunikation gefördert. Im Austausch wird deutlich, dass Beschreibungen eindeutiger sind, wenn eingeführte Fachbegriffe Verwendung finden. Weiterhin können Gedanken sortiert, Vermutungen überprüft und gemeinsam nach einer geeigneten Verschriftlichung zielführender Lösungswege gesucht werden. Somit wird „die sozial

²¹ Vgl. Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) 2005, S. 7f.

²² Grassmann et al. 2010, S. 29.

²³ Vgl. Gallin/Ruf 1998; Bezold 2009; Grassmann et al. 2010, S.28.

²⁴ Fetzter 2011, S. 25.

²⁵ Vgl. Gallin/Ruf 1998, S. 42.

²⁶ Schemel 2010, S. 4.

²⁷ Vgl. Textkompetenzentwicklungsmodell nach Augst et al. 2007. In: Bremerich-Foss 2009, S. 81-84.

²⁸ Selter 2004, S. 23.; Grassmann et al. 2010, S. 29.

konstruierte, gemeinsam geteilte Sichtweise [...] durch den Prozess des Aushandelns differenzierter und reichhaltiger als das je individuelle Vorverständnis. Lernfortschritt stellt sich dar als Teilhabe an diesem sozial konstruierten und sprachlich vermittelten Verständnis (Rogoff, 1990).²⁹ Dies unterstützt die Erweiterung der allgemein mathematischen Kompetenzen des „Kommunizierens“ und „Argumentierens“.

²⁹ Pauli/Reusser 2000, S. 5.

Literaturverzeichnis

- Bremerich-Foss, Albert, u.a. (Hrsg.) (2009):** Bildungsstandards für die Grundschule: Deutsch konkret. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 81-84.
- Carniel, Dorothee; Knapstein, Kordula; Spiegel, Hartmut (2002):** Räumliches Denken fördern. Erprobte Unterrichtseinheiten und Werkstätten zur Symmetrie und Raumgeometrie. Donauwörth: Auer.
- Eichler, Klaus-Peter; Eipert, Peter (2005):** Zur Vorstellung von räumlichen Bewegungen. In: Grundschulunterricht, Heft 11/2005. München: Oldenbourg, S. 15-20.
- Fetzer, Marei (2011):** Schreiben, um Mathematik zu lernen. In: Die Grundschulzeitschrift. Lerntagebücher. Lernwege in Mathematik dokumentieren. Heft 244, Mai 2011. Seelze: Friedrich, S. 24-29.
- Franke, Marianne (2007):** Didaktik der Geometrie in der Grundschule. München: Spektrum.
- Gallin, Peter; Ruf, Urs (1998): Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen** zur Fachkompetenz. Seelze: Kallmeyer.
- Grassmann, Marianne; Eichler, Klaus-Peter; Mirwald, Elke; Nitsch, Bianca (2010):** Mathematikunterricht. Kompetent im Unterricht der Grundschule Band 5. Hohengehren: Schneider, S. 93-160.
- Hessisches Kultusministerium (Hrsg.) (1995):** Rahmenplan Grundschule. Frankfurt/Main: Diesterweg, S. 144f; 164-171.
- Hessisches Kultusministerium (Hrsg.) (2011):** Bildungsstandards und Inhaltsfelder. Das neue Kerncurriculum für Hessen. Primarstufe. Mathematik. Wiesbaden.
- Hirt, Ueli; Luginbühl, Sandra (2003):** Schauen und Bauen 2. Spiele mit dem Somawürfel. Seelze: Kallmeyer.
- Huhmann, Tobias (2011):** Zwischen Netzen, Schachteln und Würfeln. Die Inter-Netzzo-Werkstatt. In: Praxis Grundschule, Heft 5/2011. Braunschweig: Westermann, S. 46-55.
- Jansen, Peter (2007):** Rechnen braucht Geometrie. Die Entwicklung eines tragfähigen Zahlbegriffs beruht auf räumlicher Orientierung. In: Grundschule, Heft 12/2007. Braunschweig: Westermann, S. 8-11.
- Krauthausen, Günter; Scherer, Petra (2007):** Einführung in die Mathematikdidaktik. Heidelberg: Spektrum, S. 53-76.
- Merschmeyer-Brüwer, Carla (2011):** Raum und Form. Vorstellung und Verständnis. In: Mathematik differenziert, Heft 1/2011. Braunschweig: Westermann, S. 4-5.
- Radatz, Hendrik; Rickmeyer, Knut (1991):** Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel.
- Rickmeyer, Knut (1996):** Übungen mit dem Somawürfel. Zur Entwicklung der Raumvorstellung. In: Praxis Grundschule, Heft 2/1996. Braunschweig: Westermann, S. 4-9.
- Ruwisch, Silke (2006):** Komponenten des Raumvorstellungsvermögens. In: Grundschulmagazin, Heft 5/2006. München: Oldenbourg, S. 13-16.
- Schemel, Vanessa (2010):** Zauberquadrate entdecken. Unter: <http://www.pikas.tudortmund.de/material-pik/herausfordernde-lernangebote/haus-7-informationsmaterial/informationstexte/informationstexte.html> (Letzter Abruf: 20.11.2011)
- Schipper, Wilhelm (2009):** Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel, S. 248-273.
- Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2005):** Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. S. 7-10. Pdf unter: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf (Letzter Abruf: 17.06.2013).
- Selter, Christoph (2004):** Erforschen, Entdecken und Erklären im Mathematikunterricht der Grundschule. Handreichung des Programms SINUS an Grundschulen. Unter: <http://www.sinus-an-grundschulen.de/index.php?id=113> (Letzter Abruf: 30.09.2011).
- Winkler, Dorothea (2006):** Karteien zum Soma-Würfel. Bauen und Experimentieren mit dem Soma-Würfel. Braunschweig: Westermann.