Haus 3: Umgang mit Rechenschwierigkeiten, Modul 3.1

„Wenn 6 + 6 gleich 12 ergibt, dann gibt 7 + 6 = 13“ – Aufgabenbeziehungen an der Einspluseinstafel erkennen und nutzen – ein langer Weg

Mit Nachbaraufgaben beziehungshaltig rechnen

Bereits im ersten Schuljahr sollen die Schülerinnen und Schüler Zahlbeziehungen – z.B. Nachbarzahlen – für vorteilhaftes Rechnen nutzen können (LP NRW 2008, S. 62). Wenn Kinder über diese Kompetenz verfügen, können sie sich die Ergebnisse schwierigerer Aufgaben aus den Ergebnissen einfacher und deshalb früh automatisierter Aufgaben erschließen. Als schwierig gelten im Allgemeinen die Aufgaben mit Zehnerübergang, ausgenommen die Verdopplungsaufgaben. Soll nun z.B. die Aufgabe 7+8 gelöst werden, kann das Ergebnis vorteilhaft über das bekannte Ergebnis einer „benachbarten“ Verdopplungsaufgabe (7+7=14 oder 8+8=16) erschlossen werden. Das Ergebnis der Aufgabe 7+8 muss um 1 größer sein als 14 (7+7+1) oder um 1 kleiner als 16 (8+8-1). Folglich muss es 15 betragen. Dieser Rechenweg wird als „Verdoppeln +1 (oder -1)“ oder auch als „Fastverdoppeln“ bezeichnet.

Die meisten Verdopplungsaufgaben im Zahlenraum bis 20 haben jeweils 4 solcher „Nachbaraufgaben“, deren Lösungen sich in der beschriebenen Art und Weise vorteilhaft ermitteln lassen.

Auch die 14 Aufgaben, deren erster oder zweiter Summand eine 9 ist (2+9 … 8+9 und 9+2 … 9+8; vgl. Abb. 1) können durch das Nutzen der Nachbarschaft zu den Aufgaben mit 10 beziehungshaltig gelöst werden: 4+9 = 4+10–1; 9+7 = 10+7–1.

An einer Einspluseintafel können sich die Kinder die „nachbarschaftlichen“ Positionen der einzelnen angrenzenden Aufgaben leicht vergegenwärtigen (siehe Abb. 1). Der Begriff „Nachbaraufgaben“ erfährt so eine nachvollziehbare Bedeutung.

Durch die unterschiedliche Einfärbung der Felder wird zudem der Blick auf spezifische Aufgabenmerkmale gelenkt, deren Erkennen für beziehungshaltiges Rechnen Grundlage ist.

1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6	1+7	1+8	1+9	1+10
2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6	2+7	2+8	2+9	2+10
3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6	3+7	3+8	3+9	3+10
4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6	4+7	4+8	4+9	4+10
5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6	5+7	5+8	5+9	5+10
6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6	6+7	6+8	6+9	6+10
7+1	7+2	7+3	7+4	7+5	7+6	7+7	7+8	7+9	7+10
8+1	8+2	8+3	8+4	8+5	8+6	8+7	8+8	8+9	8+10
9+1	9+2	9+3	9+4	9+5	9+6	9+7	9+8	9+9	9+10
10+1	10+2	10+3	10+4	10+5	10+6	10+7	10+8	10+9	10+10

Abb. 1: Hundertertafel aus „Fredo Co“ Mathematik 1, Ausgabe A, Oldenbourg 2009

In der Regel verläuft eine Unterrichteinheit zum Rechnen von Aufgaben mit Zehnerübergang in der Weise, dass dieser zunächst einmal mit dem „Teilschrittverfahren“ d.h. mit Zerlegen und Ergänzen zur 10 (z.B. 7 + 8 = 7 + 3 + 5) erarbeitet und eingeübt wird. Gelegentlich kann der Eindruck gewonnen werden, dass die alternativen Möglichkeiten, bestimmte Aufgabentypen vorteilhaft unter Ausnutzung von Zahlbeziehungen zu berechnen, lediglich „angehängt“ werden, und diese Rechenwege längst nicht so gründlich und ausgiebig thematisiert werden, wie es für den Aufbau von Verständnis nötig wäre. Wenn man bedenkt, dass 20 von 32 Aufgaben mit Zehnerübergang mithilfe von Nachbaraufgaben gelöst werden können (s.o.), erscheint es ratsam, Kinder möglichst früh an beziehungshaltiges Rechnen heranzuführen. Zudem muss folgender Sachverhalt bedacht werden: Haben die Kinder erst einmal das „klassische“ Verfahren eingeschliffen, fällt es ihnen schwer, sich auf andere Rechenwege einzulassen und diese flexibel aufgabenbezogen anzuwenden.

Bis die Kinder im ersten Schuljahr in der Lage sind, Aufgabenbeziehungen für vorteilhaftes Rechnen zu nutzen, ist es ein langer Weg: Zunächst einmal muss die Struktur der Einspluseinstafel erfasst und der Blick für Zahlbeziehungen zwischen benachbart liegenden Termen geschult werden. Sodann müssen die Kinder Sicherheit darin gewinnen, die Nachbaraufgaben der automatisierten Aufgaben zu identifizieren. Und letztlich müssen sie befähigt werden, die einfacheren Aufgaben auch wirklich für das Berechnen der schwierigeren Aufgaben zu nutzen.
Dieser Weg soll im Folgenden am Beispiel „Verdopplungsaufgaben und ihre Nachbaraufgaben“ nachgezeichnet werden.

Erster Schritt: Orientierungsübungen an der Einspluseinstafel

Nach der Präsentation der Einspluseinstafel und einem ersten Unterrichtsgespräch über die Entdeckungen der Kinder erfolgen zunächst Orientierungsübungen an der Aufgabentafel:

- „Lege ein Plättchen auf die Aufgabe 7 + 7 / 4 + 5 / 9 + 2…“;
- „Welche Aufgabe liegt links neben / rechts neben / über / unter der Aufgabe 7 + 7?“
- „Nenne mir 3 Aufgaben, die nebeneinander / übereinander liegen.“
- „Nenne mir Aufgaben, in denen die zweite Zahl immer eine 7 ist.“
- Einzelne Felder werden verdeckt. „Wie heißen die Aufgaben?“

Durch diese Übungen wird zugleich ein entsprechender Fachwortschatz – insbesondere zu den Lagebeziehungen der Aufgaben - erarbeitet und eingeschliffen.

Zur Vertiefung setzen die Kinder einen quadratischen Ausschnitt der Einspluseinstafel mit 25 Aufgabenkärtchen richtig zusammen. Dabei können sie – als differenzierende Maßnahme - zwischen drei Ausschnitten sowie zwei verschiedenen Vorlagen (mit einigen eingetragenen Aufgaben bzw. Leerraster) wählen (Abb. 2 bis 4).

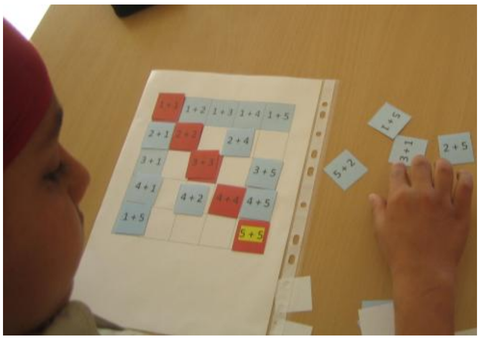

Abb. 2: Bikramjit wählt sich den einfachsten Ausschnitt und die Vorlage mit einigen Vorgaben

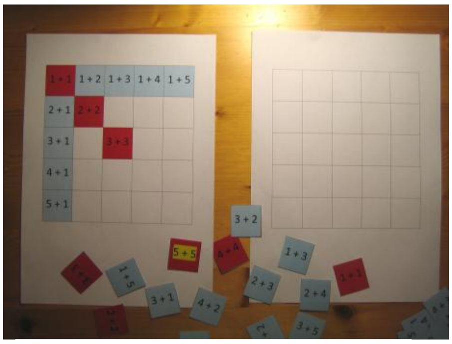

Abb. 3 Zwei verschiedene Vorlagen

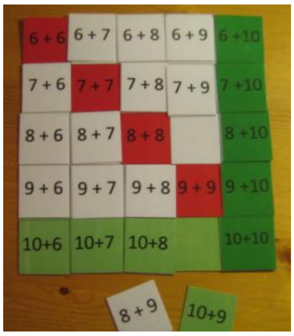

Abb. 4 Ausschnitt mit größeren Zahlen

Die Lehrerin sollte einzelne Kinder immer wieder befragen, woran sie erkennen, dass das Aufgabenkärtchen genau in das Feld gehört, in das es gerade eingefügt wurde. Dabei wird deutlich, woran sich die Kinder orientieren und inwieweit sie die strukturierte Anordnung der Aufgaben erkannt haben und berücksichtigen.
So hat Bikramjit (Abb. 2) das Kärtchen 3+5 abgelegt und argumentiert: „Weil hier ist 5 + 5, 4 + 5, dann muss hier 3 + 5 hin. 5 ist immer am Schluss."
Die Kinder lieben diese „Puzzleaufgaben" und setzen die gewählten Ausschnitte wiederholt und immer schneller zusammen. Zum Schluss wählen alle Kinder als Vorlage das Leerraster (vgl. Abb. 3). So verinnerlichen sie zunehmend die Struktur der Einspluseinstafel. Allerdings bleiben sie häufig eher an der Oberfläche des phänomenologisch Wahrnehmbaren; die arithmetischen Beziehungen zwischen den einzelnen Aufgabenkärtchen werden von den meisten Kindern oftmals noch nicht bewusst gedanklich erfasst.

Zweiter Schritt: Beziehungen zwischen den Aufgaben und Ergebnissen

Erst wenn sich die Kinder die Struktur der Einspluseinstafel vollständig erschlossen haben, werden sie daran herangeführt, die Beziehungen zwischen Aufgaben und Ergebnissen in den Blick zu nehmen. Das ist neu für die Kinder. Die folgende Aufgabenstellung erfolgt deshalb für die meisten Kinder im vertrauten und „beherrschten" Zahlenraum bis 10.
Hierzu notieren sie immer die 5 neben- oder untereinanderliegenden Aufgaben des einfachsten Ausschnitts aus der Einspluseinstafel (vgl. Abb. 5) und rechnen sie aus. Auch hierbei erfragt die Lehrerin immer wieder in Einzelgesprächen, was beim Ausrechnen der operativen Päckchen aufgefallen ist oder was beim Rechnen geholfen hat. Berivan erläutert zu ihrem letzten Rechenpäckchen (Abb. 5):
„Hier ist nur 5,5,5,5,5. Hier ist nur 1,2,3,4,5 und hier ist 6,7,8,9,10. Da wusste ich, wie man das schnell rechnet."

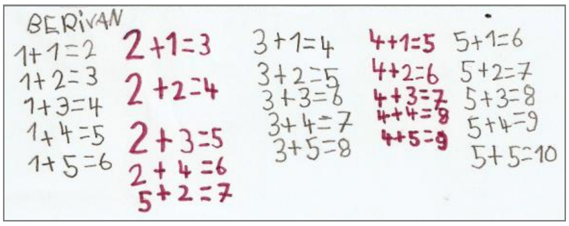

Abb. 5 Berivan rechnet Aufgabenserien aus der Einspluseinstafel.

Auf die Frage der Lehrerin „Warum kommt denn im letzten Päckchen immer ein größeres Ergebnis heraus als in dem vierten Päckchen?" antwortet Berivan: „Weil hier ist die kleine Zahl. Weil hier ist immer die 4 und hier immer die 5.“ Berivan hat bereits wesentliche Zahl- und Aufgabenbeziehungen in ihren Aufgabenserien erkannt, auch wenn sie diese noch nicht klar in Worte fassen kann. Sie stellt eine Verbindung zwischen den Aufgaben und Ergebnissen her und erkennt die Auswirkung operativer Veränderungen in den Aufgaben auf deren Ergebnissen.

Dies ist eine wichtige Voraussetzung für die folgende Fokussierung auf die Verdopplungsaufgaben und ihre Nachbaraufgaben.

Dritter Schritt: Verdopplungsaufgaben und ihre Nachbaraufgaben
Im Allgemeinen ist nicht davon auszugehen, dass Kinder eine Aufgabe wie 6+7 mithilfe einer Verdopplungsaufgabe lösen, auch wenn wir öfter von einzelnen Kindern überrascht werden, die diesen Rechenweg schon sehr früh selbstständig entwickeln.
Die Lehrerin lenkt den Blick der Kinder auf die „roten“ Aufgaben, die Verdopplungsaufgaben. Da das Verdoppeln bereits zu einem früheren Zeitpunkt erarbeitet wurde, erkennen die Kinder diese besonderen Aufgaben in der Einspluseinstafel schnell wieder. Die Ergebnisse wissen sie bereits auswendig. Von diesem Könnens-Bewusstsein wird ausgegangen. Den Kindern wird transparent gemacht: „Die Verdopplungsaufgaben könnt ihr schon. Die Verdopplungsaufgaben können euch bei einigen schwierigeren Aufgaben helfen, z.B. bei der Aufgabe 6 + 7.“ Vielleicht haben einige Kinder schon eine Idee.
Es wird herausgearbeitet, dass zu einer Verdopplungsaufgabe immer 4 Nachbaraufgaben gehören. Mithilfe der Kreuz-Folie (vgl. Abb. 2) werden diese schnell identifiziert. Das sichere Bestimmen von Nachbaraufgaben wird geübt: Die Kinder ordnen z.B. den Verdopplungsaufgaben 6 + 6 und 8 + 8 die passenden Nachbaraufgaben zu (Abb. 6). Auch hierbei erläutern sie wieder ihr Tun, z.B.: „Hier ist 6 + 6 und hier ist 6 + 5, dann muss hier 6 + 7 sein.“ Oder: „Hier muss 7 + 8 hin, weil 7, 8, 9.“

Abb. 6: Wo gehören die Nachbaraufgaben hin?

Umgekehrt erfolgen nun mündliche Übungen: Wie heißen die beiden Verdopplungsaufgaben zu der Aufgabe 5 + 6? (5 + 5 und 6 + 6).

Bei derartigen Orientierungsübungen spielt das Ermitteln der Ergebnisse noch keine Rolle. Das entlastet und fokussiert die Aufmerksamkeit ausschließlich auf Lagebeziehungen und Aufgabenmerkmale. Dies ist auch in einer weiteren Übung der Fall:

Die Kinder werden angeregt die 4 Nachbaraufgaben mit der passenden Verdopplungsaufgabe zu vergleichen und zu überlegen, welches Ergebnis jeweils um wie viel größer oder kleiner sein muss. Dazu fügen sie die vier Kärtchen mit den Nachbaraufgaben richtig in das Satzmuster ein (Abb. 7) und notieren, um wie viel die jeweilige Nachbaraufgabe größer oder kleiner ist als die Verdopplungsaufgabe. (immer um 1).

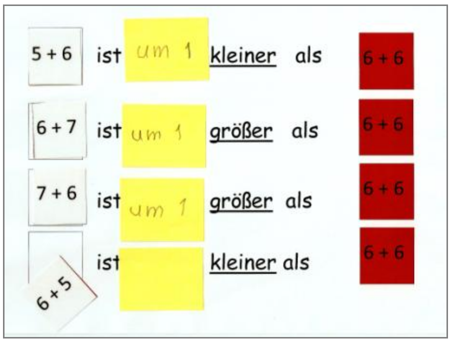

Abb. 7: Nachbaraufgaben mit den Verdopplungsaufgaben vergleichen

Viele Kinder schaffen das bereits aus der Vorstellung heraus und können die Zuordnung entsprechend begründen: „7 + 6 ist um 1 größer als 6 + 6, weil hier eine 7 ist und hier eine 6. Und die 7 ist eins größer."

Manche Kinder müssen sich die Aufgabenbeziehungen jedoch wiederholt konkret-handelnd am Zwanzigerfeld vergegenwärtigen (Abb. 8) und/oder zeichnerisch vertiefen.

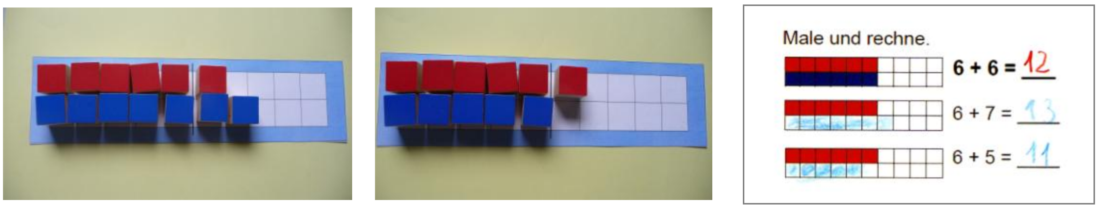

Abb. 8: Veranschaulichung der Aufgabenbeziehungen am Zwanzigerfeld

Zum Schluss sind alle Kinder in der Lage, entsprechende Arbeitsblätter (Abb. 9; in Anlehnung an Fredo&Co 1, Oldenbourg 2009, S.82) richtig auszufüllen.

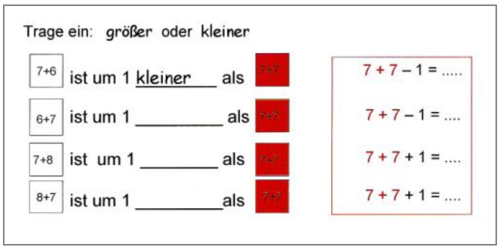

Abb. 9: Aufgabenbeziehungen untersuchen

Letzter Schritt: Aufgabenbeziehungen nutzen

Auf der Grundlage eines gesicherten Verständnisses der Aufgabenbeziehungen ist das Erschließen von Ergebnissen ‚kinderleicht'. Die Lehrerin nennt die Verdopplungsaufgabe 6 + 6. Wie aus der Pistole geschossen kommt die Antwort „Zwölf!" Fast genauso schnell wird das Ergebnis der Aufgabe 6 + 7 in die Klasse gerufen. Betül erklärt ihre Überlegung: **„**Wenn 6 + 6 gleich 12 ergibt, dann gibt 7 + 6 = 13**;** dann wird es nur 1 größer, dann ist das 13."

Die umgekehrte Aufgabenstellung – das Ableiten des Ergebnisses einer Nachbaraufgabe aus einer passenden Verdopplungsaufgabe - fällt nun nicht mehr schwer.

Wie geht es weiter?

Mit Sicherheit reicht es nicht aus, wenn das Nutzen von Nachbaraufgaben nur im Zusammenhang mit Verdopplungsaufgaben kurzfristig thematisiert wird. Die gewon-

nenen Erkenntnisse führen erst dann zu einer wirklichen Kompetenz, wenn sie kontinuierlich ausgebaut und auf weitere Bereiche übertragen werden können.
Die Behandlung der „Aufgaben mit der 9“ bietet eine vertiefende Lerngelegenheit und kann – wie Abb. 10 andeutet - ähnlich aufgebaut werden, wie die geschilderte Einheit.

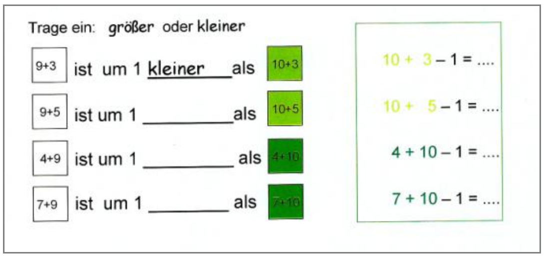

Abb. 10: Zahlbeziehungen nutzen bei den Aufgaben mit der 9

Abb. 11: Betül überträgt im dritten Schuljahr ihre Erfahrungen mit „Nachbaraufgaben“ auf größere Zahlen

Wenn die Kinder auch in den größeren Zahlenräumen Zahlbeziehungen erkennen und beim Rechnen nutzen, haben sie einen stabilen Lernzuwachs erzielt, so wie Betül (Abb. 11), die ihren Rechenweg für die Aufgabe 536 + 298 wie folgt erklärt:
„536 + 300 ist leichter als 536 + 298. Dann rechne ich erstens die 536 + 300, sind 836, und 536 + 298 ist 2 weniger als 300, darum ist das 834.“

Das Verständnis für vorteilhafte Rechenwege wird im ersten Schuljahr mit der Betrachtung von Beziehungen an der Einspluseinstafel grundgelegt.

Natürlich werden in der Folge auch das Zerlegen und Zusammensetzen von Zahlen („Teilschrittverfahren“) sowie weitere geschickte Rechenwege im Unterricht behandelt. Aufgaben werden nach typischen Eigenschaften sortiert und die verschiedenen Rechenwege diesen Merkmalen zugeordnet. Dadurch wird der Zahlenblick geschult und die Flexibilität und Adäquatheit bei der Auswahl von Rechenstrategien gefördert.

Fazit

Vorteilhaftes Rechnen kann nur dann erfolgreich gelernt werden, wenn die Kinder, die nicht von sich aus entsprechende Vorgehensweisen entwickeln, schrittweise an das gedankliche Herstellen von Zahlbeziehungen herangeführt werden. Die beziehungshaltige Betrachtungsweise von Zahlen und Aufgaben muss ausführlich und anschaulich aufgebaut werden. Dabei unterstützen die allgemeinen Kompetenzen den verständigen Erwerb vorteilhafter Rechenwege. Es gilt, die Kinder immer wieder aufzufordern, erkannte mathematische Zusammenhänge zu versprachlichen und ihre Vorgehensweisen zu beschreiben. Durch stummes Agieren können keine Beziehungen – welcher Art auch immer – aufgebaut werden!

Anmerkung: Dieses ist die Vorversion eines Artikels von Lilo Verboom; der Artikel erscheint in der Zeitschrift „Grundschule Mathematik“ (Friedrich-Verlag, Seelze) im Dezember 2012