Sachinformation Haus 2.1:

Summen aufeinander folgender Zahlen

Worum geht es?

Die Auseinandersetzung mit Aufgabenstellungen aus dem mathematisch substanziellen Problemfeld „Summen von aufeinander folgenden Zahlen“ ermöglicht Schülerinnen und Schülern, Muster und Strukturen auf unterschiedlichen Niveaus zu entdecken, zu benutzen, zu beschreiben und zu begründen.

Ausgehend von der Problemstellung „Finde möglichst alle Additionsaufgaben mit Reihenfolgezahlen, deren Ergebnis kleiner oder gleich 25 ist“ wird im Folgenden aufgezeigt, welche Auffälligkeiten und Gesetzmäßigkeiten beschrieben werden können und welche verschiedenen Aufgabenstellungen sich daraus für unterschiedliche Jahrgänge der Grundschule und der weiterführenden Schulen entwickeln lassen.

Die Tabelle gibt einen Überblick über alle möglichen Additionsaufgaben zur vorgegebenen Problemstellung:

1					
2					
3	1+2				
4					
5	2+3				
6		1+2+3			
7	3+4				
8					
9	4+5	2+3+4			
10			1+2+3+4		
11	5+6				
12		3+4+5			
13	6+7				
14			2+3+4+5		
15	7+8	4+5+6		1+2+3+4+5	
16					
17	8+9				
18		5+6+7	3+4+5+6		
19	9+10				
20				2+3+4+5+6	
21	10+11	6+7+8			1+2+3+4+5+6
22			4+5+6+7		
23	11+12				
24		7+8+9			
25	12+13			3+4+5+6+7	

Welche Auffälligkeiten lassen sich aus der Tabelle ablesen?

1. Die ungeraden Zahlen größer gleich 3 lassen sich als Summe zwei aufeinander folgender Zahlen erzeugen. Dabei wird –ausgehend von 1+2- jeder Summand jeweils um 1 erhöht (2. Spalte).
2. Nach dem Prinzip „Erhöhung der Summanden jeweils um 1“
    a. lassen sich alle durch drei teilbaren Zahlen größer gleich 6 als Summe drei aufeinander folgender Zahlen darstellen (3. Spalte).
    b. lässt sich beginnend mit 10 jede 4. Zahl ausdrücken (4. Spalte).
    c. gilt Entsprechendes ab 15 für jede 5. Zahl (5. Spalte), ab 21 für jede 6. Zahl (6. Spalte) usw.
3. Die Anzahl der Summanden kann gerade oder ungerade sein.
4. Die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, … (Zweierpotenzen) lassen sich nicht als Summe aufeinander folgender Zahlen darstellen.
5. Die Zahlen tauchen unterschiedlich oft als Summenwerte auf:
    a. Einmal: 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 19, 20, 22, 23, 24
    b. Zweimal: 9,18, 25
    c. Dreimal: 15, 21

Wie lassen sich die Auffälligkeiten erklären?

1. Bei der Addition zweier aufeinander folgender Zahlen werden immer eine gerade und eine ungerade Zahl addiert. Diese Addition liefert als Summe stets eine ungerade Zahl: $n + (n+1) = 2n +1$
2. Addtionen mit einer ungeraden Anzahl an Summanden:
    a. Dreiersummen: Dreiersummen sind immer durch 3 teilbar, da
    $(n-1) + n + (n+1) = 3n$.
    Beispiel: n=8 ➔ 7+8+9 = 3•8= 24
    Umgekehrt gilt: Jede durch 3 teilbare Zahl größer gleich 6 ist als Dreiersumme mit n als Mittelzahl darstellbar.
    Beispiel: 45 : 3 = 15 ➔ 14+15+16 = 45
    b. Fünfersummen lassen sich als Fünffaches der Mittelzahl n ausdrücken:
    $(n-2) + (n-1) + n + (n+1) + (n+2) = 5n$
    Beispiel für n=7: 5+6+7+8+9 = 5•7 = 35
    Umgekehrt gilt: Die Division durch 5 liefert die Mittelzahl n
    Beispiel: 20:5 = 4 ➔ 2+3+4+5+6 = 20

c. Analog lassen sich für Zahlen, die durch 7,9,11,.. teilbar sind, als Siebenersummen, Neunersummen, Elfersummen, ... darstellen.

3. Additionen mit einer geraden Anzahl an Summanden

Zahlen lassen sich als Summe mit einer geraden Anzahl von Summanden (g) wie folgt darstellen:
Die Division der Summe durch die gerade Zahl g lässt als Rest die Hälfte von g, also g/2. Die Division durch 2 (4,6,8,...) lässt also den Rest 1 (2,3,4, ...).
Beispiele:
Summe 14: Division durch 4 lässt den Rest 2 ➔ 2+3+4+5
Summe 36: Division durch 8 lässt den Rest 4 ➔ 1+2+3+4+5+6+7+8
Die Summe aus dem ersten und letzten, dem zweiten und vorletzten (...) Summanden ist gleich groß und ungerade.

4. Zweierpotenzen haben keine Zerlegungen:

Zweierpotenzen haben keine Zerlegung aus zwei Summanden, da hier die Summe immer ungerade ist. Zweierpotenzen haben in der Regel 2 als Faktor, sind also gerade Zahlen. Auch die 1, die ja eine Zweierpotenz ist (2^0), kann nicht als Summer zweier aufeinander folgender natürlicher Zahlen dargestellt werden.

Zweierpotenzen haben keine Zerlegung mit einer ungeraden Anzahl von Summanden. Die Zahlen, die man in eine ungerade Anzahl von Summanden zerlegen kann, lassen sich als Produkt einer ungeraden Zahl (Anzahl der Summanden) und einer weiteren Zahl schreiben (siehe 2a bis 2c). Zweierpotenzen haben aber nur gerade Teiler (mit Ausnahme von 1).

Zweierpotenzen können auch keine Zerlegung mit einer geraden Anzahl von Summanden größer 2 haben (siehe 3). Die Zahlen, die man in eine gerade Anzahl von Summanden zerlegen kann, lassen sich als Produkt einer ungeraden Zahl (Summe der jeweiligen Summenpaare, z. B. aus 1. und letztem Summanden) und einer weiteren Zahl schreiben (siehe 3). Zweierpotenzen haben aber nur gerade Teiler (mit Ausnahme von 1).

5. Es gilt der Satz von Sylvester:

Eine Zahl besitzt genauso viele Zerlegungen in aufeinander folgende Zahlen, wie diese Zahl ungerade Teiler verschieden von 1 hat.
Beispiel 27: Ungerade Teiler verschieden von 1 sind: 3, 9, 27 ➔
3 Zerlegungen in aufeinander folgende Zahlen, nämlich:

13+14

8+9+10

2+3+4+5+6+7

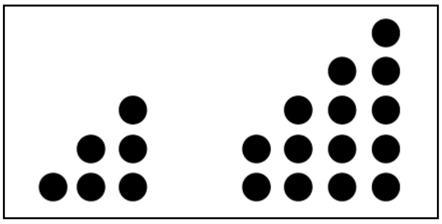
Die Zerlegungen können entsprechend der Hinweise im Abschnitt „Wie lassen sich die Auffälligkeiten erklären?“ erzeugt werden:

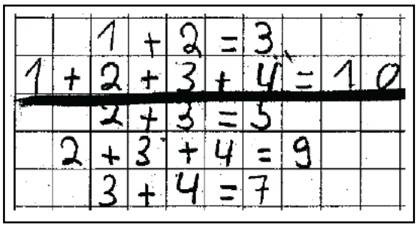
- Als ungerade Zahl kann 27 in zwei Summanden zerlegt werden:
  13+14 (Punkt 1)
- Die Division durch 3 liefert die Mittelzahl 9 für die Dreiersumme:
  7+8+9 = 3•9 (Punkt 2a)
- Die Division durch 6 lässt den Rest 3 (Hälfte von 6):
  2+3+4+5+6+7 (Punkt 3)

Welche Aufgabenstellungen für unterschiedliche Schuljahre lassen sich aus diesen Überlegungen entwickeln?

1.Schuljahr:

Anzahl von Plättchenmengen / Einbettung in den Kontext „Entdeckerpäckchen“





1+2 = ____

2+3 = ____

3+4 = ____

2. Schuljahr:

Was fällt auf? - Verknüpfung zum Einmaleins

1+2+3 = _____

2+3+4 = _____

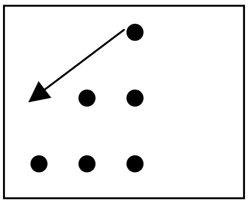
3+4+5 = _____

3·2= ______

3·3= ______

3·4= ______

„Plättchenbeweis“



3./4. Schuljahr:

Addiere immer 5 aufeinander folgende Zahlen.
Finde mehrere Aufgaben.

Was fällt dir an den Ergebnissen auf? Kannst du das erkären?

Untersuche auch Plusaufgaben mit 7 oder 9 aufeinander folgenden Zahlen.

4.-6. Schuljahr:

Finde möglichst viele Plusaufgaben mit Reihefolgezahlen. Das Ergebnis soll nicht größer als 25 sein.
Wie bist du vorgegangen?

Bist du sicher, dass du alle Aufgaben gefunden hast?

Wie kannst du das überprüfen?

6.-8. Schuljahr:

Warum ist die Summe von 3,5,7, ... Reihefolgezahlen immer durch 3,5,7, ... teilbar?
Welche Auffälligkeit ergibt sich bei Summen von 2,4,6, ... Reihenfolgezahlen?

Ausführliche Hinweise zur Unterrichtsdurchführung und ausgearbeitete Materialien für die Schüler befinden sich im Unterrichtsmaterial zu Haus 2.

Literatur:

Schwätzer, Ulrich / Selter, Christoph: Plusaufgaben mit Reihenfolgezahlen – eine Unterrichtsreihe für das 4. bis 6. Schuljahr, in: Mathematische Unterrichtspraxis, H.2, 2000, S. 28-37 (als Pdf-Dokument im Informationsmaterial zu Haus 2)

Summen aufeinander folgender Zahlen, in: Selter, Christoph / Spiegel, Hartmut: Wie Kinder rechnen, Leipzig 1997, S. 140 – 143

Schelldorfer, Rene: Summendarstellungen von Zahlen, in: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 17/Oktober 2007, S. 25- 27 (als Link im Informationsmaterial zu Haus 2)