

Projektbeschreibung PIKAS

1 Konzept

1.1 Projektansatz

PIKAS ist ein Kooperationsprojekt der Universitäten Dortmund und Münster, des Schulministeriums NRW sowie der Deutsche Telekom Stiftung und gilt als ein Beispiel für erfolgreiches Public-Private-Partnership. Den Fokus bildet dabei die Umsetzung des in den KMK-Bildungsstandards und in den Lehrplänen zum Ausdruck kommenden Zusammenspiels von **Prozessbezogenen** (auch ‚allgemeine mathematische Kompetenzen‘ genannt) und **Inhaltsbezogenen Kompetenzen** durch die **Anregung** von fachbezogener **Schulentwicklung** (kurz **PIK AS**).

Aber auch andere wichtige Themen werden in den Blick genommen (vgl. 3.1). Zielstellung ist dabei ein Unterricht, der an die individuellen Kompetenzen und Defiziten sowie die unterschiedlich ausgeprägten Erfahrungen und Interessen der Schülerinnen und Schüler anknüpft und diese zielbewusst zur aktiven und zunehmend selbstverantwortlichen Weiterentwicklung ihres Potenzials und ihrer Motivation, ihres Interesses und ihres mathematischen Selbstkonzepts anregt sowie ihren Forschergeist im Rahmen mathematikhaltiger Sinnzusammenhänge weckt oder besser noch: lebendig erhält.

Das Teilprojekt PIK zielt auf die Bereitstellung von Unterstützungsleistungen und die Entwicklung von Unterstützungsmaterialien für die Vielzahl der an der Weiterentwicklung kompetenzorientierten Mathematikunterrichts beteiligten Akteure (vgl. 3.3).

Das Teilprojekt AS ergänzt die fachdidaktische Komponente durch Unterstützungsangebote für die fachbezogene Unterrichtsentwicklung. AS richtet sich damit primär an Schulleiterinnen und Schulleiter sowie Personen, die – wie Fachkonferenzleiter – mit der kollegialen Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in Einzelschulen oder Schulverbänden befasst sind.

Die Konzepte und Materialien werden über die Projekt-Website www.pikas.tu-dortmund.de veröffentlicht und stehen allen Interessenten kostenfrei zur Nutzung und zur Modifikation für die eigenen Zwecke in Unterricht und (Selbst-)Fortbildung zur Verfügung.

PIKAS konzentriert sich zwar auf die Weiterentwicklung des Unterrichts in der Primarstufe; eine ganze Reihe von Anregungen sind jedoch – ggf. mit kleineren Modifikationen – auch für die Elementarstufe und die untere Sekundarstufe I relevant und nutzbar. Die Übergänge von einer Bildungsinstitution in eine andere werden daher in PIKAS explizit thematisiert.

Ein wichtiger Bezugspunkt ist der Lehrplan Mathematik Grundschule des Landes NRW. Das Projekt ist jedoch von Anfang an so ausgelegt worden, dass eine Nutzung des Materials auch außerhalb von NRW uneingeschränkt möglich ist. Wie beispielsweise die Zugriffsstatis-

tiken der Website (19.000 Zugriffe auf die Startseite pro Monat) oder auch die Anfragen nach Projektveranstaltungen außerhalb von NRW aufzeigen, wird von dieser Möglichkeit reger Gebrauch gemacht.

1.2 Ziel ‚Kompetenzorientierter Mathematikunterricht‘

Wie die KMK-Bildungsstandards gehen auch die Mathematiklehrpläne für die Grundschule der einzelnen Bundesländer davon aus, dass Mathematiklernen mehr umfasst als die Aneignung von *Kenntnissen*, wie beispielsweise die auswendige Verfügbarkeit der Resultate der Einmaleinsaufgaben, und von *Fertigkeiten*, wie etwa die geläufige Beherrschung des Normalverfahrens der schriftlichen Addition. Im Mathematikunterricht sind neben solchen *inhaltsbezogenen* immer auch *prozessbezogene* Kompetenzen wie Argumentieren oder Darstellen zu entwickeln.

Erfahrungen aus dem Unterrichtsalltag und empirische Untersuchungen zeigen auf, dass sich jedoch insbesondere die prozessbezogenen Kompetenzen nicht von selbst entwickeln. Der Wandel hin zu einem Unterricht, der sowohl inhalts- als auch prozessbezogene Kompetenzen fördert, bedarf jedoch nicht nur auf Seiten der Kinder, sondern auch auf Seiten der Lehrpersonen erheblicher Unterstützung. Man denke nur daran, dass nicht wenige Mathematik unterrichtende Grundschullehrerinnen und -lehrer selbst nicht (in angemessenem Umfang) in Mathematik ausgebildet worden sind oder deren Ausbildung mehrere Jahrzehnte zurück liegt.

Unterrichtsentwicklung und Lehrerfortbildung sind in PIKAS daher von Anfang an integriert gedacht worden: Die Lehrerinnen und Lehrer sollen dabei unterstützt werden, die im Lehrplan bzw. in den Bildungsstandards formulierten Kompetenzerwartungen gezielt zu verfolgen. Hierzu waren Lehrpersonen bei der Entwicklung und Erprobung von Material von Anfang an gestaltend beteiligt. Praktische Erfahrungsweisheit und theoretische Distanz der Wissenschaft konnten sich so ergänzen und positiv beeinflussen.

1.3 Fachbezogene Schulentwicklung in Professionellen Lerngemeinschaften

Forschungsarbeiten zu subjektiven Theorien zeigen, dass Lehrerinnen und Lehrer im Laufe ihrer Berufsbiografie eigene grundlegende Überzeugungen entwickeln, die ihr Handeln im Alltag orientieren. Soll Unterrichtsentwicklung die Handlungsebene erreichen, so müssen neben dem Professionswissen auch Kognitionen und Überzeugungen als Bedingungsvariablen des Handelns berücksichtigt werden.

Die Aneignung neuen Wissens gelingt denjenigen Lehrkräften am besten, die hinreichende Nähe zwischen ihren eigenen Überzeugungen und ihrem bestehenden Wissen einerseits und den neuen Anregungen andererseits herstellen können. Dies gelingt eher, wenn Fortbildungen längerfristig ansetzen, Lehrkräfte an der Auswahl der Inhalte mitwirken können,

Fortbildungsphasen und schulische Praxisphasen sich abwechseln und Lehrkräfte in Kleingruppen zusammenarbeiten.

Unterrichtsentwicklung lässt sich demnach im Rahmen von PIKAS besonders im Rahmen der Professionalisierung von Lehrkräften durch innerschulische Strukturen und kooperative Arbeitsweisen realisieren. Nicht zuletzt auch um den Transfer und die Nachhaltigkeit von traditionellen Fortbildungsangeboten zu erhöhen, ist die langfristige Einbindung von Lehrkräften in kooperativ arbeitende Lehrerteams und Lerngemeinschaften sinnvoll.

In Professionellen Lerngemeinschaften arbeiten Lehrerinnen und Lehrer in Teams an der Weiterentwicklung des Fachunterrichts zusammen. Merkmale solcher Lehrer-Lerngemeinschaften sind der gemeinsame reflektierende Dialog über Unterricht, eine „De-Privatisierung“ des eigenen Unterrichts, d.h. eine Öffnung des Unterrichts für Kolleginnen und Kollegen, eine gemeinsame Verständnisbasis sowie die Fokussierung der Kooperationsarbeit auf die Verbesserung des Lernens aller Schülerinnen und Schüler.

1.4 Projekt-Architektur, Governance und Zeitplanung

Für die Projektarbeit sind sechs Lehrpersonen – die sog. PIKAS-Lehrerinnen – vom Schulministerium mit 50% ihrer Arbeitszeit abgeordnet, zudem arbeiten vier wiss. Mitarbeiter (50% TV-L 13) im Projekt, die durch die Telekom Stiftung bzw. die beteiligten Universitäten finanziert werden. Konzipiert und initiiert wurde das Kooperationsprojekt von Christoph Selter, geleitet wird das Projekt kooperativ von den Professoren Selter, Bonsen und Bos. Strategische Entscheidungen werden im Lenkungskreis getroffen, der sich viermal pro Jahr trifft. Ihm gehören neben den Projektleitern jeweils zwei Angehörige des Schulministeriums sowie der Telekom Stiftung an.

Das Projekt ist dreiphasig angelegt. In der dreijährigen **Entwicklungsphase** (Feb 2009 bis Jan 2012) erfolgten die konzeptionelle Arbeit sowie der Großteil der Materialentwicklung, -erprobung und -überarbeitung. Die **Verbreitungsphase** (Feb 2014 bis Jul 2014) ist neben dem Abschluss der konzeptionellen und der Entwicklungsarbeit vorrangig der Ausweitung der Projektarbeit in Kooperation mit den fünf Bezirksregierungen sowie mit 21 der insgesamt 53 Schulämter in NRW gewidmet. Die **Implementationsphase** (ab Jul 2014) schließlich wird der Verstetigung sowie der Ausdehnung der Kooperationen auf weitere Schulämter in NRW dienen. Angestrebt wird außerdem die Zusammenarbeit mit Partnern in anderen Bundesländern.

2 Grundlagen

2.1 Konzeptionelle Basis

Dem Projekt liegt ein Verständnis von **Mathematik als Wissenschaft von den Mustern** zugrunde (Wittmann & Müller 2012). Ihre Ordnungen, Strukturen, Beziehungen, Zusammen-

hänge, Auffälligkeiten, Abhängigkeiten oder Regelmäßigkeiten kann man erforschen, fortsetzen, ausgestalten und selbst erzeugen. Mathematik ist eine Tätigkeit – etwas, das man tut (Freudenthal 1982).

Die Objekte der Mathematik sind aber theoretischer Natur (Steinbring 1999). Ein Beispiel: Die Zahl 5 selbst kommt in der Realität nicht vor, wohl aber deren Repräsentationen. Und es gibt auch Repräsentationen der 5, die nicht im Alltag vorkommen, etwa die 5 am Zahlenstrahl oder fünf Rechenplättchen. Insofern würde mathematische Bildung im Kontext einer wünschenswerten Allgemeinbildung Lernmöglichkeiten vergeben, würde sie sich allein auf die sinnstiftende Mathematik des Alltags beschränken. So formuliert Winter (1995, S. 37), mathematische Bildung solle anzielen, die folgenden drei, vielfältig miteinander verknüpften Grunderfahrungen zu ermöglichen:

- „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
- in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben.“

Diese prägnante Zusammenfassung des mathematischen Bildungsauftrags bietet den Bezugsrahmen für PIKAS. Auf dieser Grundlage beschreiben auch die Bildungsstandards (KMK 2004; 2005; 2012) mathematische Kompetenzen, die Schülerinnen und Schülern zum Abschluss bestimmter Bildungsstufen erreichen können sollen. Unterschieden wird zwischen **inhaltsbezogenen** (wie Zahlen und Operationen oder Raum und Form) und allgemeinen mathematischen Kompetenzen – wie sehr oft im mathematikdidaktischen Diskurs – hier **prozessbezogene Kompetenzen** genannt (wie Argumentieren oder Modellieren; vgl. für die Primarstufe etwa Walther, Selter & Neubrand 2008 oder Granzer, Köller, Reiss et al. 2008).

Bei aller Bedeutsamkeit einer stärkeren Betonung des Erforschens, Entdeckens, Beschreibens und Begründens im Mathematikunterricht der Primarstufe darf jedoch nicht aus dem Blick geraten, dass der Mathematikunterricht zu einem wesentlichen Anteil auch aus Prozessen des Übens besteht. In diesem Kontext ist es eine wesentliche Zielsetzung von PIKAS, das Konzept des **produktiven Übens** weiter zu verbreiten, bei dem mathematisch reichhaltige Aufgaben wie die Entdecker-Päckchen (siehe Anlage 2) sowohl Gelegenheiten zum Üben als auch zur Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen bieten (Müller, Selter & Wittmann 2012; Leuders 2009).

Aus Platzgründen kann an dieser Stelle nicht auf die konzeptionelle, themenspezifische Basis in Bezug auf das Material der zehn Häuser zu Themen wie etwa Rechenschwierigkeiten oder Leistungsfeststellung eingegangen werden.

2.2 Lehr-/Lernforschung

Erkenntnisse der Lehr-/Lernforschung sind auf vielfältige Weise in das PIKAS-Konzept eingeflossen und lassen sich in drei Punkten bündeln.

Aktiv-entdeckendes Lernen: Das PIKAS-Konzept sieht die Schülerinnen und Schüler als aktive Lerner und Gestalter des Erwerbs mathematischer Kompetenzen (Reinmann-Rothmeier & Mandl 2001), die über eine selbstständige und eigenaktive Beteiligung des Lernenden am Lernprozess erworben und in die bereits vorhandenen Wissensstrukturen eingebaut und auf der Basis individueller Erfahrungen interpretiert werden. Lernen ist aber auch ein sozialer Prozess, da der Erwerb von Kompetenzen in der Interaktion mit anderen geschieht. Lernen ist schließlich ein situativer Prozess; der Erwerb von Kompetenzen ist an einen spezifischen Kontext oder an eine Situation gebunden (Gräsel & Parchmann 2004a). Reichhaltigen Lernanregungen kommt bei der Entwicklung mathematischer Kompetenzen eine entscheidende Bedeutung zu. Die Kinder nutzen und gestalten diese Lernanregungen. Vor diesem Hintergrund ist die Passung zwischen den Lernvoraussetzungen und den Lernanregungen als außerordentlich wichtig anzusehen (Siegler, De Loache & Eisenberg 2005; Weinert, Doil & Frevert 2008).

Diagnosegeleitete Förderung: Vor dem Hintergrund der großen Heterogenität der Schülerschaft (Prenzel & Burba 2006) haben die Leitprinzipien der Diagnose und individuellen Förderung (DiF) in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung in den bildungspolitischen, didaktischen und professionstheoretischen Diskussionen und Entwicklungsbemühungen gewonnen (vgl. Becker et al. 2006). Studien in der Unterrichtsforschung haben gezeigt, dass Lehr-/Lernprozesse effektiv und nachhaltig gestaltet werden können, wenn sie an individuelle Lernstände der Schülerinnen und Schüler anknüpfen und diese adaptiv weiterentwickeln (Helmke 2012). Denn Unterstützung von Autonomie einerseits und Zielorientierung andererseits stellen keinen Widerspruch dar. Qualitätvoller Unterricht, so wie in PIKAS angezielt, lebt vom produktiven Spannungsverhältnis von Offenheit und Struktur.

Herausfordernde Lernumgebungen: Fasst man die Qualitätskriterien des Mathematikunterrichts aus der Fachliteratur zusammen (vgl. z.B. Helmke 2012, Seidel & Shavelson 2007; Baumert et al. 2004), so lassen sich drei Merkmale identifizieren, die in PIKAS kontinuierlich thematisiert werden: (1) eine fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung (mit reichhaltigen Gelegenheiten zum Erwerb von Kompetenzen und reichhaltigen Vernetzungen innerhalb und außerhalb der Mathematik, (2) eine permanente kognitive Aktivierung der Lernenden sowie (3) eine effektive und schülerorientierte Unterrichtsführung („Classroom Management“).

2.3 Schulentwicklungsforschung

Gute und innovative Schulen unterscheiden sich von weniger guten und weniger innovativen Schulen vor allem durch unterrichtsbezogene Gespräche, gegenseitige Unterrichtsbeobachtung und -kritik, gemeinsame Erarbeitung von Unterrichtsmaterialien und ein gemeinsames Bemühen um die Verbesserung der didaktischen Kompetenz der Lehrpersonen (Little 1982). Studien verdeutlichen, dass ein qualitativ hochwertiger Unterricht, der zu guten Lernergebnissen der Schülerinnen und Schüler führt, von kompetenten Lehrkräften erteilt wird, deren professionelle Entwicklung von einer unterstützenden Schulleitung sowie positiven Arbeitsbeziehungen und Kooperation im Kollegium abhängt (Bryk et al. 2010; Prenzel, Friedrich & Stadler 2008). Ein mittlerweile gut erforschtes Modell für effektive Unterrichtsentwicklung bietet der Ansatz der Professionellen Lerngemeinschaften (Lomos, Hofman & Bosker 2011). Typische Strategien zur Unterrichtsentwicklung in Professionellen Lerngemeinschaften umfassen unterrichtsbezogene Kooperation (Planung, Vorbereitung und Auswertung von Unterrichtsstunden), gegenseitige Unterrichtsbesuche, ein reflektierender Dialog über Unterricht sowie die Begleitung neuer Lehrkräfte (Bonsen, Hübner & Mitas 2013). Das Konzept der Professionellen Lerngemeinschaft wird in PIKAS als Modell für innerschulische Strukturen der Unterrichtsentwicklung genutzt und in Fortbildungen als Anregung für fachbezogene Unterrichtsentwicklung aufbereitet.

2.4 Lehrerfortbildungsforschung

Auf der Grundlage von Desimone (2009) oder Lipowsky und Rzejak (2012) dienen die folgenden fünf Leitideen als Grundlagen für das PIKAS-Fortbildungskonzept.

Teilnehmerorientierung: Fortbildungen sollten die heterogenen individuellen Voraussetzungen der Teilnehmenden zielgerichtet aufgreifen und sie bedarfsorientiert im Hinblick auf ihre konkreten Aufgaben weiter entwickeln (Krainer 1998). Fortbildungen sollten keine Einweg-Kommunikation darstellen, sondern partizipativ gestaltet sein und eigenverantwortliche Teilhabe der Teilnehmenden in Gestaltung und Durchführung (Selter 2006).

Kooperationsanregung: Die Teilnehmenden sollten gemeinsam an Problemstellungen und an der Umsetzung des Gelernten in der eigenen Praxis arbeiten können. Dadurch wird die Kooperation der Teilnehmenden gefördert und eine nachhaltigere Zusammenarbeit angeregt (Garet et al. 2010; Kennedy 1999).

Fallorientierung: Der Bezug auf Alltagssituationen („Fälle“) aus dem Unterricht dient sowohl als Ausgangspunkt als auch als Anwendungsfeld für das Lehren und das Lernen im Kontext der Veranstaltungen. Dabei bildet insbesondere die Orientierung an den Praxiserfahrungen der Teilnehmenden einen wesentlichen Bezugspunkt für die Gestaltung der Fortbildungen (Timperley et al. 2007).

Methodenvielfalt: PIKAS-Fortbildungsangebote ermöglichen es den Teilnehmern, die Angebote selbst mit zu gestalten, Selbstwirksamkeit zu erleben und Transferleistungen zu erbringen (Carpenter et al. 1989). Der Mix aus von ihrerseits methodisch vielseitig gestalteten Präsenzphasen, Selbststudium, kollaborativem Arbeiten zu zweit oder in der Kleingruppe und E-Learningphasen dient der Verschränkung von Input-, Erprobungs- und Reflexionsphasen (Kennedy 1999).

Reflexionsförderung: Die Teilnehmenden werden zur gemeinsamen Reflexion und Selbstreflexion über behandelte Themen sowie über die eigene Unterrichtspraxis angeregt (Putnam & Borko 2000; Boyle et al. 2005).

3 Konkretisierung

3.1 Themenschwerpunkte

Wie in 1.1 dargelegt, hat PIKAS den Anspruch, Lehrpersonen bei der Umsetzung zeitgemäßen Mathematikunterrichts zu unterstützen, der die Schüler als aktive Lerner versteht, ihre individuellen Lernstände und unterschiedlichen Lernmöglichkeiten als Ausgangspunkte kompetenzorientierten Unterrichts ernst nimmt und die Strukturzusammenhänge und Wirklichkeitsbezüge der Mathematik in Form von sinnstiftenden Kontexten als Motor von deren Lernentwicklungen begreift.

Die Themenschwerpunkte des Projekts kommen durch die Anordnung der Materialien auf der Website in zehn „Häusern“ (H1 bis H 10) zum Ausdruck, die jeweils einem zentralen Thema der Unterrichtsentwicklung gewidmet sind (<http://pikas.tu-dortmund.de/pik>). Zielvorstellung ist ein Mathematikunterricht, der ...

- sowohl prozessbezogene als auch inhaltsbezogene Kompetenzen fördert (H 1),
- den langfristigen Kompetenzaufbau von der Vorschule bis in der Sekundarstufe im Blick hat (H 2),
- eine unterrichtsintegrierte Prävention, Diagnose und Förderung im Kontext von Rechenschwierigkeiten realisiert (H 3),
- Sprachförderung als eine zentrale Aufgabe auch des Mathematikunterrichts ansieht (H 4),
- eine Balance zwischen eigenen Denkwegen und vorgegebenen Kompetenzerwartungen hält (H 5),
- die Heterogenität der Lernstände von Schülerinnen und Schülern durch Konzepte wie das der ‚natürlichen Differenzierung‘ produktiv nutzt (H 6),
- ergiebige Aufgaben verwendet, die Schülerinnen und Schüler herauszufordern statt lediglich zu beschäftigen (H 7),

- es Schülerinnen und Schülern ermöglicht, den Unterricht und ihren Lernprozess aktiv und selbstverantwortlich mit zu gestalten (H 8),
- eine kontinuierliche und immer auch stärkenorientierte Lernstandsfeststellung als unverzichtbare Grundlage individueller Förderung ansieht (H 9) sowie
- prozessorientierte Leistungsbeurteilung und dialogische Leistungsrückmeldung auch im Fach Mathematik realisiert (H 10).

Hierbei wurden sowohl die Rahmensetzungen der KMK-Bildungsstandards und aktueller Mathematiklehrpläne als auch die Erkenntnisse aktueller Fachdidaktik, Bildungsforschung und Grundschulpädagogik herangezogen und konkretisiert. Zudem erfolgten – vorwiegend in der Anfangsphase des Projekts – mehrere Expertenbefragungen (Lehrpersonen, Multiplikatoren) zur Erhebung von Unterstützungsbedarf.

3.2 Umsetzung

Im Teilprojekt PIK wurden drei, miteinander verwobene Typen von Material entwickelt. Zum Zeitpunkt der Antragstellung ist die Materialentwicklung bis auf wenige Ausnahmen abgeschlossen. Das Material ist auf der Website frei verfügbar; eine ‚Guided Tour‘ informiert potenzielle Interessenten in fünf Minuten über den Aufbau und Nutzungsmöglichkeiten der Website (<http://pikas.tu-dortmund.de/141>).

Bei den **Fortbildungsmaterialien** handelt es sich um Hintergrund-Informationen, Power Point-Präsentationen, Moderationspfade sowie Teilnehmermaterialien zu zentralen Themen wie Prävention von Rechenschwäche, Umgang mit Heterogenität im Anfangsunterricht oder Beurteilung prozessbezogener Kompetenzen. Genutzt und für die eigenen Zwecke modifiziert werden können diese Materialien zum einen durch Moderatorinnen und Moderatoren, die Fortbildungen durchführen. Denkbar ist aber auch – via Website – die Nutzung des Materials zur Selbstfortbildung von Lehrpersonen. Organisiert wurden die Fortbildungsmaterialien in insgesamt 35 Modulen.

Die **Unterrichtsmaterialien** – Sachinformationen, Unterrichtsplanungen, Arbeitsblätter, Mathe-Plakate, etc. zu 54 Lernumgebungen – stehen ebenfalls zum Download zur Verfügung. Das vom PIK-Team entwickelte Material wurde an Projektschulen mehrfach erprobt und kontinuierlich weiterentwickelt.

Die **Informationsmaterialien** schließlich ermöglichen das Selbststudium durch Texte und Links zu verschiedenen fachdidaktischen Themen. Des weiteren wurden im Projekt 16 Informationsfilme erstellt, die in qualitativ hochwertiger Weise adressatenbezogen illustrieren, wie kompetenzorientierter Mathematikunterricht gelingen kann (<http://pikas.tu-dortmund.de/152>). Auch Materialien für die Elternarbeit (wie Elternbriefe oder Elternratgeber) zu verschiedenen Bereichen des Mathematikunterrichts stehen dort zur Verfügung.

Im Teilprojekt AS wurde Informations- und Anregungsmaterial für Schulleitungen, Fachgruppen und weitere an der Unterrichtsentwicklung Interessierte bereit gestellt. Illustriert wurden die Themen „Kollegiale Hospitation“ und „Professionelle Lerngemeinschaften“ beispielsweise durch die filmische Dokumentation gemeinsamer Unterrichtsplanung, -durchführung und -reflexion im Team (<http://pikas.tu-dortmund.de/159>).

Der Transfer in die Unterrichts- und Fortbildungspraxis ist ein zentrales Kennzeichen von PIKAS. Das bedeutet, dass die empiriegestützte Materialentwicklung sich in ein umfassendes Transferkonzept einbettet, welches in Kap. 3 umrissen wird.

3.3 Systemische Unterrichtsentwicklung durch Lehrer(selbst)fortbildung

Der Projektarbeit basiert auf einer systemischen Sichtweise auf die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: Ziel ist es, verschiedene Akteure durch Konzeptionen und Material für Unterricht und Fortbildung zu unterstützen.

Eine Hauptzielgruppe sind die **Lehrpersonen**, die das PIK-Unterrichtsmaterial nutzen und durch die Planung, Durchführung und angeregte Reflexion von Unterrichtsversuchen ihre professionelle Kompetenz weiter entwickeln können. Einerseits können die Lehrpersonen vom webbasierten Fortbildungs- und -Informationsangebot, andererseits von Fortbildungsveranstaltungen, die mit PIKAS-Unterstützung durchgeführt werden, profitieren (<http://pikas.tu-dortmund.de/156>). Ohne zu trivialisieren werden auch Personen durch ein niederschwelliges Angebot (Unterrichtsfilme, dokumentierte Unterrichtsbeispiele, Anregungen zur unmittelbaren Umsetzbarkeit, ...) angesprochen, die nicht in Mathematik ausgebildet worden sind bzw. deren Ausbildung längere Zeit zurück liegt.

Adressaten von PIKAS sind zudem **Lehrerteams** sowie **Schulleitungen** und **Fachgruppenleitungen**, die Unterrichtsentwicklung im Kollegium systematisch auf eine breite Ebene stellen und zu den Themen „Kooperation“, „Kollegiale Hospitation“ sowie „Leitung und Führung“ arbeiten wollen (<http://pikas.tu-dortmund.de/as>).

Eine weitere Hauptzielgruppe sind **Multiplikatoren** (z.B. Fachberaterinnen und -berater, Fortbildnerinnen und Fortbildner, Angehörige der Schulaufsicht oder in der Lehrerausbildung Tätige), denen PIKAS ausgearbeitete Fortbildungsmodule bietet (s. o.), die ebenfalls zur freien Nutzung und Modifikation für die eigenen Zwecke zur Verfügung stehen.

Da Unterrichtsentwicklung besser gelingen kann, wenn man auch die **Eltern** (und in gleichem Atemzug auch die interessierte Öffentlichkeit) als ‚Verbündete‘ sehen kann, wurden in PIKAS zudem eine Reihe von Materialien für Eltern entwickelt (<http://pikas.tu-dortmund.de/129>). Zudem finden Lehrerinnen und Lehrer ergänzende Materialien, die sie zur Unterstützung zum Beispiel bei Elternabenden oder für Elterngespräche nutzen können (vgl. z. B. <http://pikas.tu-dortmund.de/157>).

Auch wenn sie in der Regel nicht auf das PIKAS-Material zugreifen werden, stellen natürlich die **Schülerinnen und Schüler** eine weitere zentrale Zielgruppe dar, die vom PIKAS-Angebot profitieren kann. Angedacht, aber gegenwärtig noch nicht leistbar, ist auch ein direkteres Angebot in Form einer PIKAS-Schülerseite.

Insgesamt bietet PIKAS ein Rahmenkonzept mit exemplarischen Unterrichts-, Fortbildungs- und Informationsmaterialien. PIKAS ersetzt also weder das Leitmedium des Unterrichts (in der Regel das Schulbuch) noch die Lehrer(aus)bildung, aber das PIKAS-Angebot bietet eine Grundlage für reflektierte Unterrichts- und Fortbildungspraxis, die flexibel auf die jeweils spezifischen Umsetzungsbedingungen vor Ort bezogen werden kann.

Gegenwärtig stellt das Fachpersonal im Elementarbereich sowie im Ganztagsbereich nicht die primäre Zielgruppe von PIKAS dar. Derzeit laufen Gespräche mit der Stiftung ‚Haus der kleinen Forscher‘ über eine Nutzung oder Adaption von PIKAS-Konzeptionen bzw. -Material.

4 Erprobung und Transfer

4.1 Mehrfaches Wechselspiel von Entwicklung und Erprobung

Alle Unterrichts- und Fortbildungsmaterialien sind in enger Kooperation von Mathematikdidaktikern, Bildungsforschern, der abgeordneten PIKAS-Lehrerinnen und Lehrpersonen der Projektschulen entwickelt sowie in der Regel zwei- oder dreimal erprobt und überarbeitet worden.

Die Überarbeitungen erfolgten auf der Grundlage von Beobachtungen der Unterrichtsstunden bzw. der Fortbildungsveranstaltungen, der Analysen der schriftlichen Schülerergebnisse bzw. Auswertung der eingesetzten Evaluationsfragebögen sowie der Resultate gemeinsamer Nachbesprechungen der beteiligten Akteure im Anschluss an jede Erprobung. Auch das Informationsmaterial wurde in der Regel mehrfach potenziellen Adressaten mit der Bitte um kritische Rückmeldung vorgelegt und in Verwendungssituationen erprobt.

4.2 Evaluation des Projekts

Auch wenn diese streng genommen auf die Wirksamkeit von Lehrerfortbildungen bzw. Professionalisierungsmaßnahmen angelegt sind und PIKAS ein viel breiter angelegtes Projekt ist, sollen im weiteren vier Ebenen der Wirksamkeit (vgl. Lipowsky) als Strukturierungshilfe dienen.

Einschätzungen der Adressaten: Die durchgeführten Fortbildungsveranstaltungen wurden anhand von Fragebögen, Feedbackrunden mit den Teilnehmern sowie kollegiale Hospitationen der Projektmitglieder systematisch im Hinblick auf Weiterentwicklungspotenzial evaluiert. In Bezug auf das Unterrichts- und Informationsmaterial wurden in der Entwicklungsphase zunächst mit den Schulleitungen aller Kooperationsschulen leitfadengestützte Telefoninterviews zur Nutzung des PIK-Materials geführt. Im Rahmen der Evaluationsbefragung im Jahr

2011 (s. u.) hatten die Lehrkräfte zudem die Möglichkeit, die PIK-Materialien hinsichtlich ihres Unterstützungspotenzials zu bewerten. Die Daten sprechen dafür, dass das Projekt den Unterricht erreicht.

Erweiterung der Lehrerkognitionen: Außerdem wurden zwei standardisierte Repräsentativbefragungen durchgeführt. An der ersten Befragung im Jahr 2010 beteiligten sich 1502 Lehrkräfte und 208 Schulleitungen aus 219 Grundschulen. Die Zielgruppe für die Folgebefragung 2011 waren nur diejenigen Lehrkräfte, die bereits an der ersten Befragung teilgenommen hatten. An der Folgebefragung 2011 beteiligten sich 806 Lehrkräfte aus 180 Grundschulen. Zusätzlich wurden die Lehrerinnen und Lehrer der PIKAS-Kooperationsschulen befragt (N=58). Unter anderem zeigte sich, dass Lehrkräfte der Kooperationsschulen in allen Items zur Messung der Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts höhere Werte als die Lehrkräfte der übrigen Schulen aufweisen. Diese deutet auf eine stärkere Umsetzung des Lehrplans an den Kooperationsschulen und damit auf eine erfolgreiche Projektarbeit hin. Im Rahmen des BMBF-Projekt ‚Lehrerfortbildung zur Unterstützung von Innovation im Mathematikunterricht (LIMa; Leitung Gräsel und Selter) wurden zudem an 25 Grundschulen die Wirksamkeit unterschiedlicher Fortbildungskonzeptionen (u. a. PIKAS) auf der Ebene der Lehrerkognitionen untersucht. Erste Ergebnisse zeigen, dass das PIKAS-Konzept erfolgreich war.

Unterrichtspraktisches Handeln: Diese Ebene konnte aus Kapazitätsgründen bislang nur in zwei noch nicht abgeschlossenen Qualifikationsarbeiten ansatzweise untersucht werden.

Effekte auf Schülerinnen und Schüler: Entsprechende Daten sind im LIMa-Projekt für etwa 2.000 Dritt- und Viertklässler erhoben worden. Die Auswertungen sind aber gegenwärtig noch nicht abgeschlossen. Geplant ist zudem eine Einbindung von PIKAS-Klassen an die Erhebung der Kompetenzen deutscher Viertklässlerinnen und Viertklässler anlässlich von TIMSS 2015.

4.3 Integration in die Lehrerbildung

In der Lehrerbildung an den Universitäten in Dortmund und Münster sind die PIKAS-Materialien zentraler Bestandteil der Ausbildungskonzeption – wie die Resultate der universitätsweiten Evaluationen zeigen, erfolgreich im Hinblick sowohl auf Akzeptanz als auch Lernentwicklung. Wie Anfragen zu Video-Passwörtern oder sonstige Rückmeldungen zeigen, nutzt auch eine Reihe weiterer Kolleginnen und Kollegen der 1. Ausbildungsphase in NRW (und darüber hinaus, sogar in Österreich und der Schweiz) das Material für die Ausbildung. Zudem verwenden auch zahlreiche Lehrerbildner in der 2. Phase die PIKAS-Materialien. Auch hier beschränkt sich die Nutzung nicht auf NRW.

4.4 Integration in die Lehrerfortbildung und Transferkonzept NRW

Das Projekt PIKAS ist bereits seit der **Entwicklungsphase** (2009-2012) und gegenwärtig auch in der Verbreitungsphase in unterschiedlichen Fortbildungsfeldern tätig gewesen (<http://pikas.tu-dortmund.de/157>) und dabei etwa 15.000 Personen erreicht.

Die **Verbreitungsphase** (2012-2014) soll nun vermehrt dazu dienen, mit den fünf Bezirksregierungen in NRW sowie exemplarisch mit 21 der insgesamt 53 Schulämter in NRW zu kooperieren. In erster Linie geht es darum, Strukturen und Konzeptionen zu unterstützen bzw. neu zu entwickeln, die zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Primarstufe beitragen. Ein integraler Bestandteil der Kooperation ist die Nutzung des PIKAS-Materials zur Unterrichtsentwicklung (in Lehrerteams). Da es natürlich auch außerhalb von PIKAS förderliches Material und tragfähige Konzepte gibt, ist das Ziel der Zusammenarbeit, vorhandene Ressourcen aufeinander abzustimmen und zu bündeln sowie auf diesem Weg zu nachhaltigen Unterrichtsentwicklungs-Strukturen zu kommen (für einen Überblick, vgl. <http://pikas.tu-dortmund.de/163>).

In der **Implementationsphase** (ab 2014) soll auf dieser Grundlage ein „Netzwerk Mathematikunterricht Grundschule NRW“ aufgebaut werden, welches auf verschiedenen Ebenen agiert (NRW, Bezirksregierung X, Schulamt Y) und die unterschiedlichen Akteure zusammenbringt, die für die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts verantwortlich sind (Lehrerausbilder aller dreier Phasen, Mitglieder der Kompetenzteams für Lehrerfortbildung, Ministerium, Bezirksregierungen, Schulamtsdirektorinnen, Schulleiter, Lehrerinnen etc.).

4.5 Transfer außerhalb NRW

Das Projekt ist im Rahmen der vorhandenen Kapazitäten offen für Kooperationen außerhalb von NRW. So ist das PIKAS-Material- und Veranstaltungs-Angebot ein Grundpfeiler der Arbeit des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik (DZLM). Die PIK-Angebote werden intensiv für Kooperations-Maßnahmen vorwiegend im Bereich der Grundschule genutzt; das AS-Angebot bildet die Grundlage für den DZLM-Arbeitsbereich ‚Anregung von kollegialer Konzeptentwicklung bzw. kollegialer Hospitation‘.

Angehörige von PIKAS haben das Projekt anlässlich von wissenschaftlichen Vorträgen, Qualifizierungsangebote für Multiplikatoren oder im Rahmen von Veranstaltungen der Lehrerfortbildung in diversen Bundesländern wie etwa Bayern, Baden-Württemberg, Hessen, Schleswig-Holstein oder Thüringen sowie im Ausland (Österreich, Schweiz) vorgestellt und beraten lokale Akteure bei der Umsetzung vor Ort.

PIKAS ist zudem aktiv im Bereich ‚Marketing‘. Im Abstand von drei Monaten wird beispielsweise ein PIKAS-Newsletter an gegenwärtig 1.800 Abonnenten verschickt, der über neue Entwicklungen im Projekt informiert.

4.6 Transfer auf andere Fächer

Die Projektansatz, viele themengebundene Konzeptionen und Materialien für den Unterricht sind auch für andere Fächer sinnvoll, auf diese übertragbar und teilweise sogar direkt nutzbar. Dies betrifft etwa Konzeptionen und Materialien zur Sprachförderung im Fachunterricht, zum individuellen und gemeinsamen Lernen oder zur Leistungsfeststellung – und last but not least die Erkenntnisse und Produkte des Teilprojekts AS zu Themen wie Leitung und Führung, Kooperation oder Feedback und Hospitation (Professionelle Lerngemeinschaften).

5 Publikation der Lehr- und Lernmaterialien

Die Materialien stehen auf der Website kostenfrei zur Nutzung zur Verfügung. Lediglich die Informationsvideos (<http://pikas.tu-dortmund.de/152>) wurden aus rechtlichen Gründen mit einem Passwort versehen, welches aber beispielsweise allen Grundschulen in NRW mitgeteilt wurde und bei Nachweis der Tätigkeit in der Lehreraus- oder -fortbildung bzw. in der Unterrichtspraxis auch darüber hinaus auf Anfrage für eben diese Zwecke mitgeteilt wird.

Eine Übersicht über alle Materialien des Projekts PIK bietet die URL <http://pikas.tu-dortmund.de/pik>, eine Übersicht über das Material von AS findet man unter <http://pikas.tu-dortmund.de/as>. Hierbei ist zu beachten, dass sich die Materialien beider Teilprojekte PIK und AS eng aufeinander beziehen. Teilweise sind sie in enger Zusammenarbeit entstanden und dann auf einer der beiden Seiten veröffentlicht worden, beispielsweise das Material zu Qualitätskriterien guten Mathematikunterrichts oder zur kollegialen Hospitation (<http://pikas.tu-dortmund.de/159>).

Die Website von PIK bietet auf der genannten URL eine Übersicht über das vorhandene Unterrichts-, Fortbildungs- und Informationsmaterial. Darüber hinaus gibt es dort Übersichten über die vorhandenen Informationsvideos, die Informationen für Eltern sowie zum Thema ‚Umgang mit Heterogenität‘.

Im Cornelsen-Verlag ist Anfang 2013 das Buch ‚Mathe ist Trumpf‘ erschienen, welches ausgewählte Unterrichtsmaterialien aus PIKAS enthält und an alle Grundschulen in NRW kostenlos versendet worden ist. Weitere Exemplare sind zum Selbstkostenpreis von 5 Euro beim Verlag erhältlich. Diverse Projekt-Publikationen sind zudem in Zeitschriften und Büchern erschienen (<http://pikas.tu-dortmund.de/158>).

Literatur

- Baumert, J., Blum, W. & Neubrand, M. (2004). Drawing the lessons from PISA-2000: Long term research implications. In D. Lenzen, J. Baumert, R. Watermann & U. Trautwein (Hg.): PISA und die Konsequenzen für die erziehungswissenschaftliche Forschung. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, S. 143-157.
- Becker, G., Horstkemper, M., Risse, E., Stäudel, L., Werning, R., & Winter, F. (2006). Diagnostizieren und Fördern. Stärken entdecken – können entwickeln. *Friedrich Jahresheft* 24.

- Bonsen, M. (2010). Schulleitung als Unterrichtsentwickler. In H.-G. Rolff (Hg.), *Führung, Steuerung, Management*. Seelze: Kallmeyer, S. 99-132.
- Bonsen, M. (2011). *PIKAS: Ausgewählte Ergebnisse der Evaluationsbefragung*. Vortrag auf der fünften PIKAS Multiplikatoren-tagung. TU Dortmund, 17.01.2012.
- Bonsen, M., Hübner, C. & Mitas, O. (2013). Teamqualität in der Schule - Lehrerkooperation als Ausgangspunkt für Schul- und Unterrichtsentwicklung. In M. Keller-Schneider, S. Albisser & J. Wissinger (Hg.), *Professionalität und Kooperation in Schulen*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, S. 105-122.
- Boyle, B., Lamprianou, I. & Boyle, T. (2005). A longitudinal study of teacher change: What makes professional development effective? Report of the second year of study, *School Effectiveness and School Improvement*, 16, S. 1-26.
- Bryk, A. S., Sebring, P. B., Allensworth, E., Luppescu, S. & Easton, J. Q. (2010). *Organizing Schools for Improvement: Lessons from Chicago*: University of Chicago Press.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C. P. & Loef, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching. An experimental study. *American Educational Research Journal*, (4), S. 499-531.
- Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher*, 38 (3), S. 181-199.
- Devlin, K. (2000): *Das Mathe-Gen*. Stuttgart: Klett-Cotta.
- Freudenthal, H. (1982). Mathematik – eine Geisteshaltung. *Grundschule*, (4), S. 140-142.
- Garet, M. S., Porter, A. C., Desimone, L., Birman, B. F. & Yoon, K. S. (2001). What Makes Professional Development Effective? Results From a National Sample of Teachers. *American Educational Research Journal*, 38(4), 915-945.
- Granter, D., Köller, O., Reiss, K., Robitzsch, A., Walther, G. & Winkelmann, H. (2008). *Bildungsstandards: Kompetenzen überprüfen und fördern. Grundschule Mathematik 3. und 4. Schuljahr*. Berlin: Cornelsen.
- Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from the learning design perspective. In: J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Hg.): *Educational design research*. Routledge, London, S. 17-51.
- Helmke, A. (2012). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts*. Seelze: Kallmeyer.
- Horster, L. & Rolff, H.-G. (2001). *Unterrichtsentwicklung. Grundlagen, Praxis, Steuerungsprozesse*. Weinheim, Basel: Beltz.
- Kennedy, M. M. (1999). Form and substance in mathematics and science professional development. *NISE Brief Vol.3, No.2*: National Institute for Science Education, University of Wisconsin-Madison.
- KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss*. München: Wolters.
- KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. München: Wolters.
- KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Hochschulreife*. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf (Abruf am 13.08.13).
- Krainer, K. (1998). Some considerations on problems and perspectives of mathematics teacher in-service education. In Alsina, C., Alvarez, J. M., Hodgson, B. Laborde, C. & Perez, A. (Hg.), *The 8th International Congress on Mathematical Education*. Sevilla: Thales, S. 303-321.
- Gräsel, C. & Parchmann, I. (2004). Implementationsforschung – oder: der steinige Weg, Unterricht zu verändern. *Unterrichtswissenschaft* 32, S. 196-214.
- Gräsel, C. & Parchmann, I. (2004a). Die Entwicklung und Implementation von Konzepten situierter, selbstgesteuerten Lernens. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 7 (3. Beiheft), S. 171-184.
- Leuders, T. (2009): Intelligent üben und Mathematik erleben. In: T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker, & H.-G. Weigand (Hg.): *Mathemagische Momente*. Berlin: Cornelsen, S. 130-143.
- Little, J.W. (1982). Norms of collegiality and experimentation. Workplace conditions of school success. *American Educational Research Journal*, Jg. 19 (3), S. 325-340.
- Lomos, C., Hofman, R. H. & Bosker, R. J. (2011). Professional communities and student achievement - a meta-analysis. *School Effectiveness and School Improvement*, 22(2), 121-148.
- MSW NRW (2008). *Lehrplan Mathematik für die Grundschulen des Landes NRW*. http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/upload/lehrplaene_download/grundschule/grs_faecher.pdf (Abruf am: 11.08.2013).
- Müller, G. N., Selzer, Ch. & Wittmann, E. Ch. (2012, Hg.). *Zahlen, Muster und Strukturen*. Stuttgart: Klett.
- Prediger, S. & Link, M. (2012). Fachdidaktische Entwicklungsforschung – Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. In: Bayrhuber, H., Harms, U., Muszynski, B., Ralle, B., Rothgangel, M., Schön, L.-H., Vollmer, H. J. & Weigand, H.-G.

- (Hg.): *Formate Fachdidaktischer Forschung. Empirische Projekte – historische Analysen – theoretische Grundlegungen. Fachdidaktische Forschungen, Band 2.* Waxmann, Münster, S. 29-46.
- Prenzel, M., & Burba, D. (2006). PISA-Befunde zum Umgang mit Heterogenität. In G. Opp, T. Hellbrügge & L. Stevens (Hg.), *Kindern gerecht werden. Kontroverse Perspektiven auf Lernen in der Kindheit.* Bad Heilbrunn: Klinkhardt, S. 23-33.
- Prenzel, M. & Fischer, C. (2009). Lehrkräfte lernen in Gruppen und Organisationen. In O. Zlatkin-Troitschanskaia, K. Beck, D. Sembill, R. Nickolaus & R. Mulder (Hrsg.), *Lehrerprofessionalität. Bedingungen, Genese, Wirkungen und ihre Messung.* Weinheim, Basel: Beltz, S. 577-588.
- Prenzel, M., Friedrich, A. & Stadler, M. (2008). Von Sinus lernen. Wie Unterrichtsentwicklung gelingt. Seelze: Kallmeyer.
- Putnam, R. T. & Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational Researcher*, 29(1), 4-15.
- Reinmann-Rothmeier, G. & Mandl, H. (2001). Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In A. Krapp & B. Weidenmann (Hg.), *Pädagogische Psychologie.* Weinheim: Beltz, S. 601-646.
- Seidel T. & Shavelson R. J. (2007): "Teaching effectiveness research in the last decade: Role of theory and research design in disentangling meta-analysis results". *Review of Educational Research*. 77 (4), S. 454-499.
- Selter, Ch. (2006). Adressaten- und Berufsbezug in der Lehrerbildung. Konzeptionelles und Beispiele aus der Mathematik. *Journal für Lehrerbildung* (2), 57-64.
- Siegler, R. S., DeLoache, J. & Eisenberg, N. (2005). *Entwicklungspsychologie im Kindes- und Jugendalter.* München: Spektrum Akademischer Verlag.
- Snyder, J., Bolin, F. & Zumwalt, K. (1992). Curriculum implementation. In: P. W. Jackson (Hg.): *Handbook of research on curriculum.* New York: MacMillan, S. 402-435.
- Steinbring, H. (1999). Die künstlichen Objekte der Mathematikdidaktik und ihr theoretischer Charakter. In: Ch. Selter & G. Walther (Hg.): *Mathematikdidaktik als design science,* Leipzig: Klett, S. 226–233.
- Timperley, H., Wilson, A., Barrar, H., and Fung, I. (2007). *Teacher professional learning and development. Best Evidence Synthesis Iteration.* Wellington, New Zealand: Ministry of Education.
- Walther, G., Selter, Ch. & Neubrand, J. (2008). Die Bildungsstandards Mathematik. In: Walther, G., Granzer, D., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Köller, O. (2008): *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret.* Berlin, Cornelsen Scriptor, S. 16-38.
- Weinert, S., Doil, H. & Frevert, S. (2008). Kompetenzmessungen im Vorschulalter: eine Analyse vorliegender Verfahren. In H.-G. Rossbach & S. Weinert (Hg.), *Kindliche Kompetenzen im Elementarbereich: Förderbarkeit, Bedeutung, Messung.* Berlin: BMBF, S. 89-209.
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.* (61), S. 37- 46.
- Wittmann, E. Ch. & G. N. Müller (2012). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept des Mathematikunterrichts in der Grundschule. In: G. N. Müller, Ch. Selter & E. Ch. Wittmann (Hg.): *Zahlen, Muster und Strukturen.* Stuttgart: Klett, S. 61-79.