



Haus 7: Gute Aufgaben

Worum geht es?

Gute Aufgaben für guten Unterricht

In einem Unterricht, der neben dem Erwerb inhaltsbezogener Kompetenzen insbesondere auch die Schulung prozessbezogener Kompetenzen anstrebt, spielen gute Aufgaben eine wesentliche Rolle. Im Rahmen bildungspolitischer Maßnahmen zur Implementierung der Bildungsstandards und Kernlehrpläne wird die Bedeutung der Aufgabenkultur als zentrales Element kompetenzorientierten Unterrichtens hervorgehoben. Die Qualität des Unterrichts hängt in erheblichem Maße von der Art der Aufgabenstellungen ab. Beispiele für gute Lernaufgaben finden sich von daher als Unterstützungsmaßnahmen sowohl in den Bildungsstandards als auch in den Begleitmaterialien der Kernlehrpläne. Sie illustrieren die prozessbezogenen Anforderungen und geben wichtige Anregungen für Unterrichtsentwicklung.

Was aber sind gute Lernaufgaben? Wodurch zeichnen sie sich aus? Wie lassen sie sich von „anderen“ Aufgaben, wie *Walther* sie bezeichnet (2004) abgrenzen?

Eigenschaften guter Lernaufgaben

In der Fachdidaktik besteht – mit einzelnen Nuancierungen - ein breiter Konsens darüber, was unter „guten Aufgaben“ zu verstehen ist. Auf eine kurze Formel gebracht formuliert *Walther*: „Gute Aufgaben sind Aufgaben, welche bei Schülern in Verbindung mit **grundlegenden mathematischen Begriffen und Verfahren** die Entwicklung **prozessbezogener Kompetenzen** unterstützen.“ (2004, S. 10). Dadurch unterscheiden sie sich von Aufgaben, die ausschließlich eine schematische Anwendung erworbener Kenntnisse, Fertigkeiten und Verfahren verlangen. Gute Aufgaben besitzen – im Gegensatz zu einfachen Übungsaufgaben - ein „hohes kognitives Aktivierungspotenzial“ (Hirt/Wälti, S.14). Sie fordern „jenseits einfacher Routine“ (Ruwisch 2003, S.6) zu einem aktiven Mathematiktreiben heraus, zu „Produktivität und Eigenaktivität“ (Rasch 2007, S. 8). Sie regen zur Auseinandersetzung mit problemhaltigen Fragestellungen sowie zur Erkundung grundlegender mathematischer Strukturen und Gesetzmäßigkeiten an und ermöglichen individuelle Denk- und Lernwege sowie Aufgabenlösungen auf verschiedenen Niveaus. Derartig herausfordernde Aufgaben zeichnen sich durch Komplexität und Offenheit aus. Sie bieten reichhaltige Anregungen sowohl für selbstständiges Lernen als auch für kooperativ-kommunikative Arbeitsprozesse.

Diese Anforderungen an gute Aufgaben sind keineswegs nur fachspezifisch. Fachübergreifend zielen herausfordernde Lernaufgaben auf das eigenständige, entdeckende und forschende Lernen ab, bei dem „Fehler im Lernprozess zugelassen und eigene Lösungswege beschritten werden können“ (MSW NRW, S. 13). In der Handreichung des Ministeriums von NRW zur Kompetenzorientierung sind Kriterien für Lernaufgaben aufgelistet, die sich zum Teil an die Charakterisierung „ergiebiger Aufgaben“ im Lehrplan Mathematik bzw. „großer Aufgaben“ in den Bildungsstandards anlehnen:

„Gute Lernaufgaben

- sind herausfordernd auf unterschiedlichem Anspruchsniveau
- fordern und fördern inhalts- und prozessbezogene sowie übergreifende Kompetenzen
- knüpfen an Vorwissen an und bauen das zu erwerbende Wissen kumulativ (vernetzt) auf
- sind in sinnstiftende Kontexte eingebunden
- sind vielfältig in den Lösungsstrategien und Darstellungsformen
- stärken das Könnensbewusstsein durch erfolgreiches Bearbeiten.“ (Handreichung S. 13,14).

Durch den Anspruch an Lernaufgaben, Schülerinnen und Schüler auf unterschiedlichem Niveau herauszufordern, wird der Leistungsheterogenität innerhalb einer Lerngruppe Rechnung getragen. Gute Aufgaben berücksichtigen die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen und -möglichkeiten der Schülerinnen und Schüler. Dies kann auf zweierlei Weise realisiert werden: Durch die Konstruktion von Teilaufgaben mit unterschiedlichen Anforderungen innerhalb eines einheitlichen inhaltlichen Kontextes („große Aufgaben“) sowie durch „offene Aufgaben“, wobei diese Unterscheidung als idealtypisch anzusehen ist.

„Große Aufgaben“: Aufgaben mit gestuften Anforderungsniveaus

In den Bildungsstandards werden derartige Aufgabenkomplexe, die zu einer Grundaufgabe Teilaufgaben auf unterschiedlichen Niveaustufen formulieren, als „große Aufgaben“ bezeichnet (Bildungsstandards S. 13).

Für die einzelnen Teilaufgaben werden 3 Niveaustufen (Anforderungsbereiche I – III) festgelegt:

- AB I: Reproduzieren: Das Lösen der Aufgabe erfordert Grundwissen und das Ausführen von Routinetätigkeiten
- AB II: Zusammenhänge herstellen: Das Lösen der Aufgabe erfordert das Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen

- AB III: Verallgemeinern und Reflektieren: Das Lösen der Aufgabe erfordert komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern.

Beispiele für Teilaufgaben zu unterschiedlichen Anforderungsbereichen zur Lernaufgabe „Umkehrzahlen“

1. Rechne aus.

(AB I)

73 – 37	95 – 59	52 – 25	63 – 36
65 – 56	42 – 24	31 – 13	91 – 19
83 – 38	87 – 78	42 – 24	53 – 35

2. Rechne aus.

(AB II)

a) Finde zu jedem Päckchen noch weitere Aufgaben.

43-34	53-35
65-56	64-46
54-45	42-24

b) Zu Aufgaben mit Umkehrzahlen gibt es noch 7 andere Ergebnisse.

(AB III)

Bilde noch weitere Aufgaben und versuche, möglichst alle Ergebnisse zu finden.
Schreibe auf, wie du vorgegangen bist.

Die Anforderungsbereiche sind in ihrem Abstraktionsgrad ansteigend. Es wird deutlich, dass die Bearbeitung von Aufgabenstellungen auf AB II und AB III prozessbezogene Kompetenzen erfordert. Zahlreiche Aufgabenbeispiele zu den einzelnen Anforderungsbereichen sind in dem Band „Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret“ (Cornelsen Scriptor) unter Leitung des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen zusammengestellt.

Bei der Einschätzung des Schwierigkeitsgrades einer Aufgabe ist allerdings zu berücksichtigen, dass diese nicht immer eindeutig vorzunehmen ist. So hängen die tatsächlichen Anforderungen z.B. auch von den Vorerfahrungen, vom Grad der Vertrautheit einer Aufgabenstellung und vor allem auch von den bereits praktizierten Formen des Lernens ab. Auch können Aufgaben auf sehr unterschiedlichen Niveaustufen gelöst werden, vom unsystematischen Ausprobieren bis hin zu abstrakt-strategischen, vorausschauenden Überlegungen.

„Offene Aufgaben“: Aufgaben mit Potenzial zur Selbstdifferenzierung

Die Berücksichtigung der spezifischen Leistungsfähigkeit der einzelnen Schülerinnen und Schüler kann auch durch sog. „offene Aufgaben“ (Rasch, 2007) bzw. „offene Lernangebote“ (Schütte, 2001) erfolgen. Im Gegensatz zu geschlossenen Aufgabenstellungen fordern offene Aufgaben zu Eigenproduktionen heraus. Offene Aufträge und Impulse bieten die Möglichkeit der Selbstdifferenzierung. Sie eröffnen individuelle Herangehensweisen und Lösungstiefen. Auch der Umfang der Bearbeitung sowie die Wahl des Zahlenraums sind den Kindern in der Regel freigestellt. „Offene Lernangebote sind Lernanlässe, die von einer motivierenden und für alle Kinder verständlichen Aktivität ausgehen. Sie [...] sind mathematisch ergiebig, d.h. alle Kinder, auch die „schwachen“ können zunächst einmal beginnen und es liegt bei den Kindern, wie weit sie das mathematische Arbeiten vorantreiben, [...]“ (Schütte 2001, S.4). Derartig selbstgesteuerte Aktivitäten stellen hohe Ansprüche an das eigenverantwortliche Arbeiten und an die Kreativität und die Selbstorganisation der Schülerinnen und Schüler.

Beispiele für offene Aufträge:

- Rechne mehrere Aufgaben mit dem Ergebnis 34 (67). Wie gehst du vor?
- Überlege dir eine Zahl zwischen 35 und 75. Rechne mit ihr 10 Aufgaben. Schreibe alles auf.
- Du bist ein Tier, das sehr gut springen kann. Wie viele Meter schaffst du mit einem Sprung? Merke dir die Zahl. Starte nun irgendwo auf dem Zahlenstrich und spring in deiner Sprunglänge weiter. Wie weit kommst du? Zeichne alles auf.
- Rechne 5 leichte Aufgabe, die 100 ergeben und 5 schwere Aufgaben, die 100 ergeben. Schreibe sie auf.
- Welche Aufgaben fallen dir leicht, welche schwer. Schreibe sie auf. Geh zu deiner Lehrerin und überlege, wie dir die schweren bald leichter fallen können!

Gute Aufgaben in Schulbüchern

Gute Aufgaben mit Denk- und Handlungsaufträgen, die produktive und offene Zugangsweisen ermöglichen, findet man in neueren Schulbüchern immer häufiger, wenn auch leider nicht durchgängig und in ausreichendem Maße. Insbesondere Aufträge und Fragestellungen, die zum Vermuten, Austauschen, Argumentieren und Begründen anregen, sind im Schülerbuch unterpräsentiert. Da sich derartige Impulse teilweise auch auf die Art und Weise der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragen beziehen und damit methodische Aspekte betreffen, finden sie sich zumeist eher „versteckt“ in den Unterrichtsanregungen im Lehrerband. Dies ist umso bedauerlicher, da Schulbücher als Leitmedium - insbesondere auch im Mathematikunterricht - wesentlich zur der Vermittlung eines bestimmten Bildes vom Mathematikunterricht und vor allem auch vom Fach Mathematik selbst beitragen: Bedeutet „Mathematiktreiben“ ein möglichst schnelles Nachvollziehen und

Beherrschen von Fertigkeiten und Verfahren oder eher eine aktive Auseinandersetzung mit Forschungsaufträgen und Problemstellungen?

Die eher behutsame Umstellung der Aufgabenkultur in manchen Schulbüchern ist sicherlich auch marktpolitischen Gründen geschuldet: Lehrerinnen und Lehrer erwarten von Schulbüchern oftmals, dass ihnen ausreichendes Übungsmaterial in Form von Aufgabenplantagen zur Verfügung gestellt wird. Zudem benötigt die konsequente Ausdifferenzierung von Aufgabenstellungen auf verschiedenen Niveaustufen auf einer Schulbuchseite Platz. Die Schulbücher würden schwerer, die Kosten würden steigen. Außerdem erfordern prozessbezogene Aufträge häufig ein höheres Maß an Lesekompetenz. Auch hiervor schrecken Lehrkräfte – insbesondere an sog. „Brennpunktschulen“ oftmals zurück.

Das Instrument der Aufgabenvariation

Dennoch finden sich in Schulbüchern Aufgaben, die im Kern gehaltvoll, im Sinne einer umfassenden Förderung prozessbezogener Kompetenzen allerdings nicht genügend ergiebig aufbereitet sind, das mögliche mathematische Lernpotenzial also nicht genügend „ausreizen“. Hier besteht die Möglichkeit, die Aufgaben abzuwandeln oder weiter zu entwickeln und durch derartige Variationen und Erweiterungen ein vertiefendes oder weiterführendes Mathematiktreiben anzuregen. Welche Parameter jeweils verändert werden können, hängt von der Aufgabe selbst ab. Lehrkräfte sollten ermutigt werden, derartige über die Anregungen des Schulbuchs hinausgehende Abwandlungen vorzunehmen.

Gute Aufgaben – guter Unterricht

Guter Unterricht bedarf guter Aufgaben. Gute Mathematikaufgaben sind jedoch umgekehrt noch keine Garantie für einen guten Mathematikunterricht. Entscheidend ist der Umgang des Lehrers und der Schüler mit den Aufgaben. Um das Aufgabenangebot in offenen Lernsituationen effektiv zu nutzen und kompetenzorientiert zu bewältigen bedürfen Kinder besonderer Hilfen und Unterstützungsmaßnahmen. In der Funktion eines Lernbegleiters unterstützt die Lehrkraft die Kinder dabei, ihre Arbeit selbstständig zu organisieren und zu strukturieren. Sie beobachtet das individuelle Lernen der Kinder, gibt weiterführende Impulse und berät bei der Auswahl differenzierter Teilaufgaben. Sie bahnt Gruppenprozesse an und organisiert einen ergiebigen, strukturierten Austausch der Kinder untereinander (vgl. MSW NRW S. 14). Das Wechselspiel zwischen Art der Aufgabenstellung und der Gestaltung des Unterrichts sind entscheidend für die Entwicklung fachbezogener Kompetenzen.

Welchen Beitrag kann das Modul hinsichtlich des Einsatzes „guter Aufgaben“ im Unterricht leisten?

Durch die eigene Bearbeitung des Aufgabenformats „Umkehrzahlen“ wird eine Auseinandersetzung mit den Qualitätsmerkmalen „guter Aufgaben“ angeregt, insbesondere mit deren Potenzial zur Förderung prozessbezogener Kompetenzen. Die Powerpoint im Fortbildungsmaterial (FM) stellt ergänzend die Qualitätsmerkmale des MSW vor. Der Vergleich von Aufgabenstellungen zu „Umkehrzahlen“ aus verschiedenen Schulbüchern sensibilisiert für die unterschiedliche Umsetzung der Qualitätsmerkmale in Lehrwerken.

Es besteht die Gelegenheit, mit der Formulierung von Teilaufgaben auf unterschiedlichem Niveau vertraut zu werden, indem zunächst einzelne Teilaufgaben des Aufgabenformats „Umkehrzahlen“ den beiden Anforderungsbereichen AB II bzw. AB III zugeordnet und dann zu anderen Aufgabenformaten eigene Teilaufgaben auf unterschiedlichem Niveau entwickelt werden sollen. Im Fortbildungsmaterial (FM) befinden sich mehrere Aufgabenbeispiele mit ausgearbeiteten Teilaufgaben. Schülerdokumente (Powerpoint in FM) veranschaulichen Aufgabenlösungen auf unterschiedlichem Niveau.

Anhand der Schülerlösungen zur Aufgabe „Rechnen mit Zahlenkarten“ werden die Lernchancen „offener Aufgaben“ veranschaulicht. Es wird deutlich, wie unterschiedlich sich die Kinder mit der Aufgabenstellung auseinander setzen. Die Unterschiede zeigen sich hinsichtlich des Umfangs der Bearbeitung, der Wahl des Zahlenraums, sowie der Vorgehensweisen. Im Unterrichtsmaterial (UM) finden sich – in Anlehnung an *Rasch* - zahlreiche weitere offene Aufgabenstellungen und Aufträge für alle vier Schuljahre.

Am Beispiel der „Umkehrzahlen“ wird verdeutlicht, wie durch das Instrument der Aufgabenvariation Kinder über die Schuljahre hinweg zu einer weiterführenden Auseinandersetzung mit Zahlenmustern, zu einem vernetzten Lernen und zur Anwendung erkannter Zusammenhänge angeregt und Erkenntnisse kumulativ aufgebaut werden können. Es wird aufgezeigt, welche Parameter des Aufgabenformats „Umkehrzahlen“ unter diesen Zielsetzungen verändert werden können (Powerpoint in FM). Im Unterrichtsmaterial (UM) werden entsprechend aufgearbeitete Aufgabenstellungen zu „Umkehrzahlen“ zur Verfügung gestellt und Hinweise zum angemessenen Einsatz im Unterricht gegeben.

Literatur:

Hirt, U./Wälti, B.: Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Seelze 2008

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW (2008):
Kompetenzorientierung – Eine veränderte Sichtweise auf Lehren und Lernen in der
Grundschule. Handreichung. Ritterbach Verlag

Rasch, Renate (2007): Offene Aufgaben für individuelles Lernen im
Mathematikunterricht der Grundschule 1 + 2 und 3 + 4. Lernbuchverlag bei Friedrich
in Velber

Ruwisch, Silke/Peter-Koop, Andrea (Hrsg.) (2003): Gute Aufgaben im
Mathematikunterricht der Grundschule. Mildenberger

Schütte, Sybille (2001): Offene Lernangebote – Aufgabenlösungen auf
verschiedenen Niveaus. In: Grundschulunterricht 11. Pädagogischer
Zeitschriftenverlag

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der
Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik
für den Primarbereich. Luchterhand

Ulm, Volker (Hrsg.) (2008): Gute Aufgaben Mathematik. Cornelsen Skriptor

Walther, Gerd (2004) Modul 1: Gute und andere Aufgaben. SINUS-Transfer
Grundschule, IPN Kiel

Walther, Gerd/van den Heuvel-Panhuizen, Marja/Granzer, Dietlinde/Köller, Olaf
(Hrsg.) (2008): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. IQB,
Cornelsen Scriptor



Sachinformation "Umkehrzahlen"

Zu zweistelligen Zahlen mit unterschiedlichen Ziffern werden durch Vertauschen der Ziffern auf der Zehner- und Einerstelle (z. B. $63 \Rightarrow 36$) die Umkehrzahlen (in der Literatur findet man auch den Begriff „Spiegelzahlen“) gebildet. Anschließend wird die kleinere von der größeren Zahl subtrahiert. Auf diese Weise lassen sich insgesamt 45 Subtraktionsaufgaben mit 9 unterschiedlichen Ergebnissen bilden:

9	18	27	36	45	54	63	72	81
98-89	97-79	96-69	95-59	94-49	93-39	92-29	91-19	90-09
87-78	86-68	85-58	84-48	83-38	82-28	81-18	80-08	
76-67	75-57	74-47	73-37	72-27	71-17	70-07		
65-56	64-46	63-36	62-26	61-16	60-06			
54-45	53-35	52-25	51-15	50-05				
43-34	42-24	41-14	40-04					
32-23	31-13	30-03						
21-12	20-02							
10-01								

Die Differenzen sind Vielfache von 9. Welches Vielfache die Ergebniszahl bildet ist abhängig von der Differenz der Stellenwerte.

Beispiel:

$$63 - 36 = 27$$

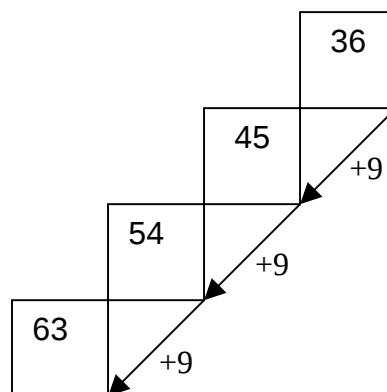
$$6 - 3 = 3$$

$$3 \cdot 9 = 27$$

Die Gesetzmäßigkeit kann mit Hilfe der Hundertertafel, der Stellentafel, dem halbschriftlichen Rechnen oder dem Rechenstrich eingesehen werden werden.

Hundertertafel:

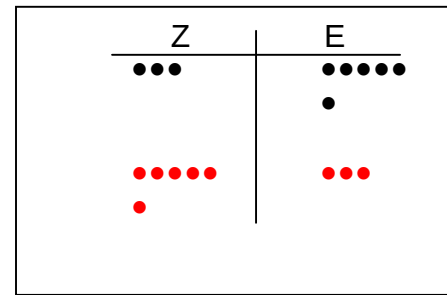
Die Zahlenpaare liegen auf der Hundertertafel „diagonal“. Man gelangt von der kleineren zur größeren Zahl, indem man jeweils auf der Hundertertafel ein Feld nach links (- 1) und anschließend ein Feld nach unten (+ 10), also diagonal + 9 schreitet. Der Unterschied der beiden Ziffern einer Ausgangszahl gibt jeweils an, wie viele Felder man in der jeweiligen Diagonalen überbrücken muss.



$$3 \cdot 9 = 27$$

Stellentafel:

Die Ausgangszahl wird mit Plättchen in der Stellentafel dargestellt. Beim Erzeugen der Umkehrzahl werden die Plättchen verschoben. Dadurch wird ein Einer entfernt (-1) und ein Zehner (+10) hinzugefügt. Dies entspricht einer Veränderung von +9. Die Differenz der beiden Ziffern einer Ausgangszahl gibt jeweils an, wie viele Plättchen man verschieben muss.

**Halbschriftliches Rechnen:**

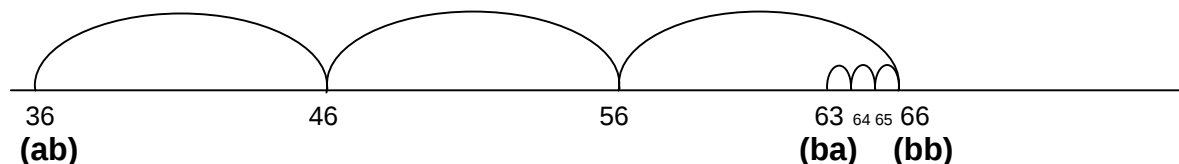
Eine weitere Möglichkeit zur Verdeutlichung bietet das halbschriftliche Rechenverfahren „Stellenwerte extra“:

$$\begin{array}{r} 63 - 36 = 30 - 3 = 27 \\ 60 - 30 \\ 3 - 6 \end{array}$$

Rechenstrich:

Der Rechenstrich stellt noch eine weitere, sehr anschauliche Möglichkeit dar, die Zusammenhänge aufzuzeigen.

Um von ab nach ba zu kommen ($a < b$), geht man $b - a$ Zehner nach vorne zur Zahl bb und dann $b - a$ Schritte zurück zu ba. Der Unterschied ist dann $(b-a) \cdot 10 - (b-a) = (b-a) \cdot 9$



Einfacher gesagt: Am Rechenstrich kann gezeigt werden, dass für jeden addierten Zehner jeweils ein Einer abgezogen werden muss. Beim Ziffernunterschied 3 ($63 - 36$) geht man also 3Z nach vorne und 3E zurück.

Immer 99:

Bildet man zur Ergebniszahl die Umkehrzahl und addiert diese beiden Zahlen ($27 + 72$), so erhält man immer 99 als Ergebnis.

Bei allen Vielfachen von 9, die kleiner oder gleich 90 sind, ergibt die Quersumme immer 9. Addiert man zwei Vielfache von 9, bildet man zweimal die Quersumme 9 – einmal bei den Einern und einmal bei den Zehnern.

Hinweise zu den Variationen:**a) Veränderung der Rechenvorschrift:**

Es gibt 17 verschiedene Ergebnisse zu den 45 Aufgaben. Die Ergebniszahlen sind Vielfache von 11. Welches Vielfach von 11 die Ergebniszahl bildet, ist abhängig von der Summe der Stellenwerte.

187	176	165	154	143	132	121	110	99	88	77	66	55	44	33	22	11
98+89	97+79	87+78	86+68	76+67	75+57	65+56	64+46	54+45	53+35	43+34	42+24	32+23	31+13	21+12	20+02	10+01
		96+69	95+59	85+58	84+48	74+47	73+37	63+36	62+26	52+25	51+15	41+14	40+04	30+03		
				94+49	93+39	83+38	82+28	72+27	71+17	61+16	60+06	50+05				
						92+29	91+19	81+18	80+08	70+07						
								90+09								

Die Gesetzmäßigkeit kann ähnlich zur Subtraktion mit dem Hunderterfeld oder der Stellentafel nachgewiesen werden.

b) Veränderung der Stellenzahl:

Dreistellige Umkehrzahlen sind Paare solcher Zahlen, bei denen die Hunderter- und die Einerstelle vertauscht werden ($645 \Rightarrow 546$). Es wird die kleinere von der größeren Zahl subtrahiert. Dies liefert insgesamt neun unterschiedliche Ergebniszahlen, die alle ein Vielfaches von 99 sind. Welches Vielfache von 99 die Ergebniszahl bildet, ist abhängig von der Differenz der Stellenwerte an der Einer- und Hunderterstelle.

Beispiel:

$$745 - 547 = 198$$

$$7 - 5 = 2$$

$$2 \cdot 99 = \mathbf{198}$$

Immer 1089:

Bildet man zur Ergebniszahl die Umkehrzahl und addiert diese beiden Zahlen, so erhält man 1089.

Der Nachweis kann analog zu zweistelligen Umkehrzahlen über die Stellentafel oder „Stellenwerte extra“ erbracht werden.

c) Veränderung des Zahlenmusters:

Das Zahlenmuster kann durch die Vorgabe: „Es werden 2 unterschiedliche Ziffern zur Bildung einer dreistelligen Zahl benutzt“, verändert werden. Dabei können die Zahlen aus z.B. 4 und 5 wie folgt gebildet werden: 454 oder 545 (IRI- oder AHA-Zahlen): Mit diesen Zahlen können ähnliche Überlegungen zur Subtraktion angestellt werden wie bei den Umkehrzahlen:

Es gibt insgesamt 45 Aufgaben. Die Differenzen sind Vielfache von 91. Welches Vielfach von 91 die Ergebniszahl bildet, ist abhängig von der Differenz der Stellenwerte.

Weiterführend können diese Überlegungen auch an diesem Muster 445 oder 554 (AAL – Zahlen) angewandt werden.

Kombiniert zwei zweistellige Umkehrzahlen entsteht zwei vierstellige Zahlen mit folgendem Muster: 6336 und 3663. Hierbei handelt es sich um „Palindrome“ (Spiegelzahlen), die wieder voneinander subtrahiert werden und weitere Entdeckungen ermöglichen.

d) Erweiterung des Aufgabenformats:

Eine verwandte Übung zu den „Umkehrzahlen“ stellen die sog. „Minus-Türme“ oder „Minus-Züge“ dar.

Minustürme werden nach folgendem Prinzip gebildet: Aus drei unterschiedlichen Ziffern wird eine dreistellige Zahl gebildet, bei der die Ziffern der Größe nach geordnet werden. Die Umkehrzahl wird gebildet und subtrahiert. Dieses Vorgehen wird so oft wiederholt bis die Rechnungen beim Ergebnis 495 enden. Es entstehen „Türme“ mit unterschiedlicher Anzahl von „Stockwerken“; der höchste Turm hat 5 Stockwerke.

Literatur:

Wittmann/Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1, 2. Auflage, Stuttgart, Düsseldorf, 1993

Wittmann/Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 2, 1. Auflage, Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig, 1992

Wittmann/Müller: Das Zahlenbuch 2, Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf 2008

Wittmann/Müller: Das Zahlenbuch 3, Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf 2009

Wittmann/Müller: Das Zahlenbuch 4, Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf 2009

Schütte, Sybille: Die Matheprofis 2, München, Düsseldorf, Stuttgart 2004

Schütte, Sybille: Die Matheprofis 3, München, Düsseldorf, Stuttgart 2005

Schütte, Sybille: Die Matheprofis 4, München, Düsseldorf, Stuttgart 2006

Aufgabenvariation: Zweistellige Umkehrzahlen

		Anzahl der Aufgaben	Anzahl der Ergebnisse	Auffälligkeiten bei den Ergebnissen			Wenn-dann-Beziehung	Plättchen-beweis
				Vielfaches	Quersumme	Muster		
Veränderung der Rechenvorschrift	Addition	45	17	Vielfache von 11 ≤ 187	18,16,...,4,2	Vom größten Ergebnis ausgehend vermindern sich Zehner – und Einerstelle jeweils um 1	Wenn die Summe der Stellenwerte a beträgt, ist die Summe der Umkehrzahlen $a \cdot 11$	x
Veränderung der Stellenanzahl	3 Stellen	360	9	Vielfache von 99 ≤ 891	18 $E + H = 9$	Die mittlere Ziffer der Ergebniszahl ist 9. Einer- und Hunderterstelle als Zahl gelesen, ergeben ein Vielfaches von 9. Dieses Vielfache von 99 ergibt die Differenz der dreistelligen Umkehrzahlen.	Wenn die Differenz zwischen der Einer- und der Hunderterstelle $1 \geq a \leq 9$ beträgt, ist die Differenz der Umkehrzahlen $a \cdot 99$.	x
Veränderung des Zahlenmusters	IRI - Zahlen	45	9	Vielfache von 91 ≤ 819	10, 11,..., 17	Die Hunderter- und Zehnerstelle (bei 91 die Zehnerstelle) ergeben als Zahl gelesen ein Vielfaches von 9. Die Einerstelle liefert jeweils den Faktor, mit dem man 9 multiplizieren muss, um dieses Vielfache zu erhalten. Die Hunderter- und die Einerstelle werden jeweils um 1 größer, die Zehnerstelle um 1 kleiner.	Wenn die Differenz zwischen den Stellenwerten $1 \geq a \leq 9$ beträgt, ist die Differenz der IRI-Zahlen $a \cdot 91$	x
	AAL-Zahlen	45	9	Vielfache von 99 ≤ 891	18 $E + H = 9$	Die mittlere Ziffer der Ergebniszahl ist 9. Einer- und Hunderterstelle als Zahl gelesen, ergeben ein Vielfaches von 9. Dieses Vielfache von 99 ergibt die Differenz der AAL-Zahlen.	Wenn die Differenz zwischen den Stellenwerten $1 \geq a \leq 9$ beträgt, ist die Differenz der AAL-Zahlen $a \cdot 99$	x

	ANNA-Zahlen	45	9	Vielfache von 891 ≤ 8019	18 $T + Z = 9$ $H + E = 9$	Vom kleinsten Ergebnis ausgehend werden Tausender- und Einerstelle immer um 1 größer und Hunderter- und Zehnerstelle immer um 1 kleiner. Tausender- und Zehnerstelle sowie Hunderter- und Einerstelle als Zahl gelesen stellen jeweils Vielfache von 9 dar.	Wenn die Differenz zwischen den Stellenwerten $1 \geq a \leq 9$ beträgt, ist die Differenz der ANNA-Zahlen $a \cdot 891$	x
	NANA-Zahlen	45	9	Vielfache von 909 ≤ 8181	18 $E + Z = 9$ $H + T = 9$	Die Differenzen sind wieder NANA-Zahlen. Vom größten Ergebnis ausgehend wachsen die Hunderter- und Einerstelle um 1, die Tausender – und Zehnerstelle werden jeweils um 1 kleiner.	Wenn die Differenz zwischen den Stellenwerten $1 \geq a \leq 9$ beträgt, ist die Differenz der NANA-Zahlen $a \cdot 909$	x
Erweiterung des Aufgabenformats	Minus-türme (3-stellig)	120	8	Vielfache von 99 Vielfache von 99 $198 \leq 891$	18 $E + H = 9$	Die mittlere Ziffer der Ergebniszahl ist 9. Die Einer nehmen jeweils ab Schritt 2 um 1 zu bis sie 5 erreichen. Jede Zahl führt spätestens nach 5 Schritten zu 495. Die Anzahl der Schritte ist Abhängig von der Differenz zwischen der größten und kleinsten Ziffer.	Wenn die Differenz zwischen der größten und kleinsten Ziffer $2 \geq a \leq 8$, ist die Differenz der Zahlen $a \cdot 99$	x



Darum geht es – Einige Begriffsklärungen vorab

Was sind eigentlich „Umkehrzahlen“?

In der **Sachinformation** zu Umkehrzahlen (vgl. IM-Sachinfo-Umkehrzahlen) sind alle wichtigen Hintergrundinformationen zu diesem Aufgabenformat beschrieben.

Was ist eine „Schnipselaufgabe“?

Wir bezeichnen Aufgaben, die auf einem „Schnipsel“ Papier stehen und ins Matheheft eingeklebt werden können, als „Schnipselaufgaben“. Im Schulalltag hat sich herausgestellt, dass dies ein eingängiger Begriff für die Kinder ist.

Schnipselaufgaben enthalten Aufträge, die zum Nachdenken und Problemlösen anregen sollen und in einem späteren Dialog erörtert werden. Kinder sollen insbesondere angeregt werden, Lösungen und Entdeckungen zu den Aufträgen zu notieren und aufzuzeichnen.

Methodisch kann man so vorgehen, dass alle Schülerinnen und Schüler zunächst denselben „Schnipsel“ erhalten und eine Einstiegsaufgabe lösen. Die Kinder kehren mit einer Lösung zur Lehrerin oder zu einem Expertenkind zurück und erhalten eine individuelle Rückmeldung. Die Lehrerin kann zum Beispiel auch einen individuellen Tipp oder eine Bemerkung ins Heft des Schülers schreiben und ihn durch die schriftliche Korrespondenz zur Weiterarbeit oder zum Überarbeiten seiner Ergebnisse anregen (vgl. Gallin/ Ruf 1990, 107ff). Des Weiteren kann eine Folgeaufgabe (handschriftlich oder durch einen weiteren Schnipsel) als Aufgabenvariation an den Schüler verteilen werden.

Durch diese Art der Rückmeldung können sich individuelle Aufgabenstellungen zur Weiterarbeit ergeben, die individuell auf die Schülerinnen und Schüler zugeschnitten sind. Sie erhalten so die Möglichkeit, in ihrem eigenen Tempo und entsprechend ihrer individuellen Möglichkeiten und Lernvoraussetzungen zu arbeiten.

Im Verlauf der Stunde/ Reihe arbeiten die Schülerinnen und Schüler unter Umständen am selben Thema (hier „Umkehrzahlen“), jedoch auf unterschiedlichen Niveaus. Zu bestimmten Zeiten können Reflexionen mit der gesamten Lerngruppe oder einem Teil der Kinder stattfinden, die dieselben Teilaufgaben bereits gelöst haben (Mathekonferenz, Reflexionsgespräch mit der Lehrerin...).

Die einzelnen Schnipsel sind mit „Forscherpunkten“ versehen, die in etwa den Anforderungsbereichen der Bildungsstandards entsprechen (vgl. IM-Sachinformation-Gute Aufgaben).



So kann es gehen – Skizzierung einer möglichen Reihenplanung

1. Startaufgabe für alle

2a. Weiterarbeit Folgeschnipsel (Forscherpunkte 2 und 3)

Zeit für individuelle oder gemeinsame
Zwischenreflexionen

2b. Evt. arbeiten einzelne Kinder noch an der Startaufgabe weiter

Zeit für individuelle oder gemeinsame
Zwischenreflexionen

3. Reflexion mit allen Kindern

Folgende „Entdeckungen“ sollen besprochen werden:

- Ergebniszahlen
- Ziffernunterschiede
- Anzahl der Aufgaben zu einer Ergebniszahl
- Zusammenhang zur 9er Reihe (vgl. Sachinfo Umkehrzahlen)

4a. Zusatzangebote

4b. Zeit für „Beweisführungen“ mit interessierten Kindern (Kleingruppen)

ENDE Einheit 1

Mögliche Weiterarbeit mit **Aufgabenvariationen** (vgl. UM-Schülermaterial)

Für die Weiterarbeit bieten sich Aufgabenvariationen (Umkehrzahlen dreistellig, Minustürme, IRI-Zahlen) an, in denen Kinder ihre erworbenen Kompetenzen auf erweiterte Aufgabenformate übertragen können. Hier können sie auf die erarbeiteten Kriterien zu Aufgaben mit Zahlenmustern zurückgreifen und zunehmend selbstständiger forschen. Hierzu gibt es keine ausführliche Unterrichtsplanung mehr, da der methodisch-didaktische Teil im Wesentlichen gleich bleibt. In der Sachinformation zu Umkehrzahlen sind die wichtigsten Hintergründe zu den genannten Aufgabenformaten notiert.



Zu den Forscheraufträgen für die Schülerinnen und Schüler

Um einen Überblick über die „Schnipselaufgaben“ für die Schülerinnen und Schüler zu erhalten, ist im Folgenden das Angebot der aufbereiteten Forscheraufträge dargestellt. (Hinweise zum methodisch-didaktischen Einsatz im Unterricht vgl. UM-Lehrermaterial-Unterrichtsplanung).

Startaufgabe

Mit dieser Aufgabe starten **alle** Kinder.

Folgaufträge: Forscherauftrag 1, Forscherauftrag 2, Forscherauftrag 3, Forscherauftrag 4

Mit diesen Aufträgen arbeiten die Kinder weiter, die die Startaufgabe gelöst haben. Dabei können die Kinder auswählen, ob sie Forscherauftrag 1-4 der Reihe nach bearbeiten oder durcheinander. Es müssen nicht alle Aufgaben von jedem Kind bearbeitet werden. Alle Aufträge beziehen sich auf die Erforschung der „Geheimnisse“ der Umkehrzahlen und sollen auf dem Weg zur gemeinsamen Reflexion stärker auf mögliche Entdeckungen hinweisen (Stichwort Ergebniszahlen, Ziffernunterschied, ...).

Zusatzaufgaben: Zusatzaufgabe 1, Zusatzaufgabe 2, Zusatzaufgabe 3, Zusatzaufgabe 4

Die Zusatzaufgaben bieten eine Differenzierung für schnelle und interessierte Kinder und für solche, die ihre Entdeckungen vertiefen und auf erweiterte Aufgabenformate übertragen wollen.

Ende der 1. Einheit/ Selbsteinschätzungsbogen für Schülerinnen und Schüler (vgl. UM-Schülermaterial)

Mögliche Weiterarbeit an Aufgabenvariationen

Umkehrzahlen dreistellig, Minustürme, IRI-Zahlen (vgl. UM-Schülermaterial)



Darum geht es - Häufig gestellte Fragen

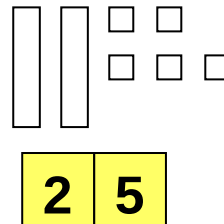
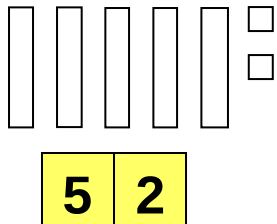
Was tue ich mit Kindern, die häufig noch Zahlendreher haben?

Einige Kinder haben Schwierigkeiten, Zehner- und Einerzahlen in der richtigen Reihenfolge aufzuschreiben. Dahinter steckt häufig nicht nur ein Zahlendreher, sondern auch eine Unklarheit über die Bezeichnungen und Wertigkeiten der Zehner- und Einerzahlen.

Es stellt sich generell die Frage, ob die Forschung zu den Umkehrzahlen nicht zu komplex für solche Kinder ist, die noch große Schwierigkeiten haben das Stellenwertsystem zu durchdringen und im Zahlenraum bis 100 zu subtrahieren.

Viele Kinder subtrahieren die größere von der kleineren Zahl (Beispiel: $28 - 82 = _$). Was kann ich da tun?

Diese Kinder sollten die Zahl und ihre Umkehrzahl unbedingt visualisieren. Das Kind legt zunächst eine Zahl (Beispiel 52) mit Ziffernkarten vor sich auf den Tisch. Zehnerstäbe und Einerklötzchen (*Mehrsystemblöcke*) können hier hilfreich sein, um die „Wertigkeit“ der Zahl darzustellen. Das Kind vertauscht dann die Ziffernkarten und legt die Umkehrzahl (hier 25) ebenfalls mit Material daneben. Dann kann es beide Zahldarstellungen vergleichen und die größere Zahl zuerst aufschreiben. Davon subtrahiert es die kleinere Zahl. Beispiel:



Die Markierung der Umkehrzahlen auf dem Zahlenstrahl kann ebenfalls eine Hilfe darstellen.



Meine Schülerinnen und Schüler können keine Entdeckungen aufschreiben! Wie kann ich sie dabei unterstützen?

Haben Schüler Schwierigkeiten, ihre Entdeckungen aufzuschreiben und zu erklären, kann es hilfreich sein, mit einem Wortplakat zu arbeiten (vgl. UM-Schülermaterial-Folgaufträge). Dort sind einige Begriffe oder Satzmuster vermerkt, die man zur Beschreibung der Entdeckungen benutzen kann. Außerdem kann ein zweites Plakat entstehen, das die Kinder selbst mit Begriffen füllen. Sprachlich starke Kinder können hier auch Satzmuster für andere Kinder aufschreiben. Weitere Tipps zum Beschreiben von Entdeckungen finden sich im Haus 4, das sich gezielter mit dem Aspekt der Sprachförderung im Mathematikunterricht befasst.

Zum Strukturieren und Markieren von Entdeckungen kann man mit den Kindern folgende Tipps geben:

„Beim Aufschreiben deiner Entdeckungen kannst du deine Ideen nummerieren. Schreibe so auf:

1. Mir ist aufgefallen, dass... .
2. Ich habe entdeckt, dass... .
3. ...

Du kannst sie dann mit unterschiedlichen Farben einkreisen (markieren). Dann sieht man gleich deutlicher, wo du in der Aufgabe etwas entdeckt hast!“

Beispiel:

$$\begin{array}{l} 85 - 58 = 27 \\ 82 - 28 = 54 \\ 73 - 37 = 45 \\ 21 - 12 = 9 \\ 32 - 23 = 9 \\ 63 - 36 = 27 \\ 96 - 69 = 27 \\ \dots \end{array}$$

1. Mir ist aufgefallen, dass einige Aufgaben dieselben Ergebnisse haben.

2. Immer wenn die Aufgabe ein gleiches Ergebnis hat, haben die Ziffern in der Aufgabe denselben Unterschied. Bei dem Ergebnis 9 ist der Unterschied zum Beispiel immer 1.

3. Die Ergebnisse, die ich bisher gefunden habe, sind immer aus der 9er Reihe.

4. ...

Es hat sich gezeigt, dass die Motivation der Schülerinnen und Schüler steigt, wenn sie Tipps zum strukturierten Aufschreiben ihrer Entdeckungen erhalten. Das „Sammeln“ von Entdeckungen macht dann augenscheinlich mehr Spaß. Sie lassen sich auch besser mit einem Partner vergleichen.



Wie tauschen die Kinder ihre Ergebnisse aus?

Der gemeinsame Austausch von „Forscherergebnissen“ nimmt in dieser Reihe einen wichtigen Schwerpunkt ein.

In der Schuleingangsphase können bereits Formen des Austausches gefunden werden, die eine spätere eigenständige „Forscherkonferenz“ (in Anlehnung an die „Schreibkonferenz“ nach Gudrun Spitta, mittlerweile in der Literatur häufig auch „Mathekonferenz“ genannt) anbahnen.

Einige Beispiele für einen „strukturierten Austausch“:

1. IM PLENUM: Ein Unterrichtsgespräch, das zunächst noch die Lehrerin durch Impulse leitet.
2. IN DER KLEINGRUPPE: Ein Reflexionsgespräch in einer Kleingruppe, das die Lehrerin oder ein älteres Kind begleitet.
3. IM TANDEM: Ein Austausch unter Partnern zu einer bestimmten Aufgabe.
4. ALLEIN MIT DER LEHRERIN: Eine „Kindersprechzeit“ zwischen der Lehrerin und einem Kind, in der ein bestimmter Aspekt gemeinsam beleuchtet wird.

Weiterführende Literatur

Gallin/ Ruf: Sprache und Mathematik in der Schule. Zürich/ Schweiz 1990.

Gallin/ Ruf: Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Bd 2. Spuren legen – Spuren lesen. Seelze 1998.

Rasch, Renate: „Offene Aufgaben für individuelles Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule. 1/ 2 und 3/ 4. Seelze 2008.

Ulm, Volker (Hrsg.): Gute Aufgaben Mathematik. Berlin 2008.

Walther, G. (u. a.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Berlin 2008.



Ziele für die „Startaufgabe“

- Umkehrzahlen kennen lernen (und ggf. visualisieren)
- Zweistellige Umkehrzahlen finden und voneinander subtrahieren (im Kopf, halbschriftlich oder mit Material)
- Entdeckungen beschreiben (und begründen)

Zeit

etwa 1-3 Unterrichtseinheiten (in der die Schüler auch schon an Folgeaufträgen arbeiten)

So kann es gehen

Start

Für die inhaltliche **Einführung** zeigt die Lehrerin den Kindern den ersten Aufgabenschnipsel. Dort steht etwas von so genannten „Umkehrzahlen“. „Was sind eigentlich Umkehrzahlen?“, diese Frage sollte zunächst erörtert werden. Es kann unterschiedlich begonnen werden:

- Kreisgespräch: „Was sind eigentlich Umkehrzahlen?“ Die Kinder kommen ins Gespräch (direkt im Plenum oder aber zunächst „murmelnd“ mit dem Partner) und äußern ihre Vermutungen. Daraufhin werden einige Beispiele gesammelt, die aufgeschrieben und aufgehängt werden können ($85 - 58$, $73 - 37$, ...). Im Laufe des Gesprächs kann auch wiederholt werden, was eine Zahl und was eine Ziffer ist.
- Stummer Impuls: Die Lehrerin hat verschiedene zweistellige Zahlen auf Karten geschrieben, die im Kreis verteilt liegen. Darunter befinden sich Umkehrzahlenpaare und andere Zahlen. „Findet jemand Zahlen, die Umkehrzahlen sein könnten? Versuche deine Auswahl zu begründen!“ Die gefundenen Paare werden aufgehängt.
- Zahlen würfeln: Im Kreis liegen zwei große Würfel. Zwei Kinder würfeln und nennen durch die Zusammensetzung der Ziffern eine zweistellige Zahl. „Welche Zahl kannst du daraus bilden? Kannst du auch noch eine andere Zahl dazu finden?“ Die Lehrerin erklärt anhand des Beispiels was eine Zahl und ihre Umkehrzahl ist. Es werden weitere Beispiele gewürfelt und aufgeschrieben.

Im Anschluss daran kann gemeinsam PIKO' s erste Forscheraufgabe vorgestellt werden:

- **Wähle nun selbst eine zweistellige Zahl. Schreibe ihre Umkehrzahl dazu. Ziehe die kleinere von der größeren Zahl ab. Rechne mindestens 12 weitere Aufgaben. Beispiel: $85 - 58 = \underline{\quad}$**
- **Was fällt dir (bei den Ergebnissen) auf? Beschreibe das in deinem Heft.**

Schuljahr

2, 3

Lehrplanbezug

Inhaltlichsbezogene

Kompetenzen

Zahlen und

Operationen, Schwerpunkt

Zahlenrechnen

Prozessbezogene Kompetenzen

kreativ sein, argumentieren,
darstellen

Material

Schüler

Matheheft

Klebestift

Material zur Visualisierung
(Rechenrahmen, Dienes, ...)

Lehrer

Aufgabe als „Schnipsel“ zum
Einkleben vorbereiten (siehe
Kopiervorlage)

Papierstreifen (z.B. A4
Längsformat), ggf.
Packpapierrolle oder
Tapetenrolle, um sortierte
Aufgaben aufzukleben.



An einem Beispiel kann geklärt werden, was es heißt, „die kleinere von der größeren Zahl abzuziehen“. Die Kinder beginnen dann mit der Arbeit. Sie kleben zunächst den Auftrag in ihr Heft und beginnen Aufgaben zu finden und auszurechnen (analog zur Einführung können sie dazu als Differenzierung auch am Platz Ziffernkarten oder Würfel benutzen).

Die Kinder, die noch Fragen haben, verweilen im Kreis und rechnen weitere Beispiele gemeinsam.

Arbeitsphase

Die Schüler arbeiten zunächst in Einzelarbeit. Die Lehrerin steht für individuelle Fragen zur Verfügung. Sie stellt auch Material zur Differenzierung bereit (vgl. „Häufig gestellte Fragen“ – Basisinformation zur Unterrichtsplanung). Wer den ersten Forscherpunkt bearbeitet hat, kann zum zweiten Forscherpunkt übergehen und versuchen, seine Entdeckungen zu beschreiben (Tipps zum „Beschreiben“ siehe Basisinfo Unterrichtsplanung).

•• Was fällt dir (bei den Ergebnissen) auf? Beschreibe das in deinem Heft.

Je nachdem, wie lang die Arbeitsphase ist, können sehr schnelle Kinder auch hier schon an einem neuen Forscherauftrag (Folgeaufträge) weiterarbeiten.

Differenzierung

Die Startaufgabe bietet die Chance, dass Kinder in ihrem Tempo und auf unterschiedlichen Niveaus zu Lösungen und Entdeckungen kommen können.

Voraussichtlich werden sich Lösungen der Kinder grob in drei Bearbeitungsniveaus unterscheiden lassen. Die Kinder benötigen dann unterschiedliche Anregungen zur Weiterarbeit:

A)

Es gibt vielleicht Kinder, die beim Lösen der Aufgaben bereits Probleme haben. Vielleicht ergeben sich auch Schwierigkeiten, da sie die größere von der kleineren Zahl abziehen und dadurch unter Umständen nicht zum richtigen Ergebnis kommen. Anregungen:

- Die Aufgaben mit Anschauungsmaterial lösen lassen. Das Ergebnis prüfen.
- Die Anzahl der Aufgaben reduzieren (von 12 auf 6 bspw.), um die Motivation beizubehalten.

B)

Es gibt vielleicht Kinder, die schnell 12 Aufgaben gefunden haben, jedoch keine Entdeckungen machen. Anregung:

- Die Aufgaben auf Kärtchen (Papierstreifen) schreiben und sortieren lassen.
- Mit einem Partner die gefunden Aufgaben vergleichen und gemeinsam nach Entdeckungen suchen.

C)

Kinder, die schnell 12 Aufgaben und mehr gefunden haben und erste Entdeckungen beschrieben haben. Anregung:

- Die Lehrerin kann im Hinblick auf die Beschreibungen der Kinder individuelle Tipps geben.

Startschnipsel:

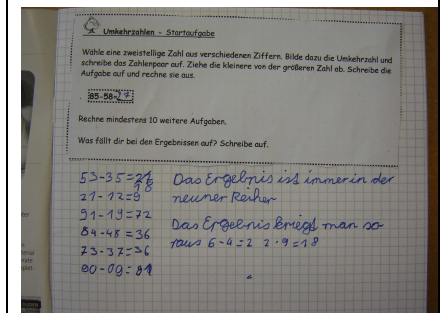
UMKEHRZAHLEN - Startaufgabe

PIKO sagt:
Wenn du bei einer Zahl ihre Ziffern vertauschst, erhältst du ihre UMKEHRZAHLE.
Die Umkehrzahl von 85 ist dann 58.

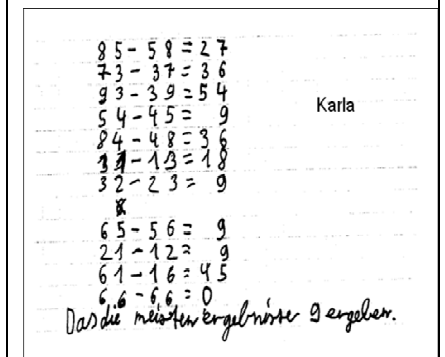
Wähle nun selbst eine zweistellige Zahl. Schreibe ihre Umkehrzahl dazu.
Ziehe die kleinere von der größeren Zahl ab.
Rechne mindestens 12 weitere Aufgaben. Beispiel: $85 - 58 =$ _____

•• Was fällt dir (bei den Ergebnissen) auf? Beschreibe das in deinem Heft.

Schülerdokumente zur Startaufgabe:



Eintrag eines Schülers ins Heft



Karla beschreibt eine erste Beobachtung



(Hat das Kind seine Entdeckungen ausführlich beschrieben? Ist es hilfreich, wenn das Kind unterschiedliche Entdeckungen mit unterschiedlichen Farben markiert? Ist seine Erklärung plausibel? Ist seine Erklärung vollständig? Vgl. Sachanalyse.)

- Anschließend kann das Kind an den Folgeaufträgen weiterarbeiten (siehe Folgeaufträge).

Reflexion

Am Ende der Mathestunde/ Einheit bieten sich verschiedene Möglichkeiten zur Reflexion an. Diese hängen davon ab, wie viele Entdeckungen die Kinder bereits gemacht haben.

- A) Eine Teilreflexion mit den Kindern, die bereits 12 Aufgaben gefunden und Entdeckungen dazu aufgeschrieben haben. Die restlichen Kinder arbeiten zunächst weiter.
- B) Die erste Stunde/ Einheit endet ohne gemeinsame Abschlussreflexion. Die Lehrerin möchte zunächst die Arbeitsergebnisse in den Heften der Kinder ansehen und dort individuelle Rückmeldungen vermerken.
- C) Die Lehrerin teilt am Ende der Arbeitsphase an jedes Kind einige Papierstreifen aus, auf denen sie einige ihrer Aufgaben notieren sollen (pro Papierstreifen nur 1 Aufgabe). Die Kinder legen ihre Aufgaben auf den Boden in den Kreis. Doppelte Aufgaben werden übereinander gelegt. Reflexionsimpulse der Lehrerin:
 - Aspekt Ordnen/ Sortieren: „Hat jemand eine Idee, wie man die Aufgaben sortieren kann?“ (unter Umständen kommt dieser Impuls bereits von den Schülern selbst). Kinder äußern ihre Vermutungen, einzelne Schüler sortieren daraufhin exemplarisch im Kreis (bestmöglich nach dem Ergebnis).
 - Aspekt Vollständigkeit: „Haben wir alle möglichen Aufgaben gefunden?“ Je nachdem, zu welchem Zeitpunkt diese Reflexion stattfindet, kann diese Frage einen Ausblick auf die Weiterarbeit bieten („... dann suchen wir beim nächsten Mal die restlichen Aufgaben“). Haben die Schüler jedoch an dieser Stelle alle Aufgaben gefunden, schließen sich weitere Reflexionsfragen an:

„Welche Entdeckungen habt ihr beim Forschen mit den Umkehrzahlen gemacht?“

Dabei ist wichtig, dass folgende Punkte angesprochen werden (Hintergründe vgl. Sachanalyse):

1. Wie viele Aufgaben gibt es insgesamt? Warum bist du sicher, dass das alle sind?
2. Was haben die Ergebnisse miteinander zu tun?
3. Wenn wir die sortierten Aufgaben betrachten, entdecken wir ein „Muster“. Erkennst du es? Versuche es zu beschreiben (Treppe). Warum ist das so? (Jede Ergebniszahl hat unterschiedlich viele dazugehörige Aufgaben).
4. Warum gibt es zu jedem Ergebnis unterschiedliche viele Aufgaben? Kannst du das erklären?

Nir ist aufgefallen das ich 2mal die Umkehraufgabe gefunden habe. Damit meine ich bei 2 Ergebnissen die sind einmal 54 und 45 und bei der anderen 26 und 63. Nir ist außerdem noch aufgefallen das 2mal 27 und 2mal 9 rausgekommen ist. 2 Mal 48 auch. Annika

Annika beschreibt die gefundenen Ergebnisse, zieht aber noch keine Rückschlüsse zur 9er Reihe.



Erste Beobachtungen werden gemeinsam besprochen und festgehalten.



5. Schau dir die Aufgaben zu einer Ergebniszahl genau an. Fällt dir bei den einzelnen Ziffern der Aufgaben etwas auf? (Zusammenhang Ziffernunterschied und Ergebnis.)

Wichtig festzuhalten ist: Eine Reflexion mit allen Kindern, die sich rund um die möglichen Entdeckungen dreht, sollte nicht zu früh durchgeführt werden. Es sollten viele Kinder bereits an den Schnipselaufgaben mit zwei/ drei Forscherpunkten (siehe Folgeaufträge) gearbeitet haben, da sonst die individuellen Entdeckungen vorweg genommen werden.

Weiterarbeit

Die Schüler arbeiten individuell weiter. Wer den Startschnipsel fertig hat, kann sich aus den „Folgeaufträgen“ weitere Schnipsel aussuchen. Diese können sie auch in Partnerarbeit bearbeiten (jeder klebt aber einen eigenen Schnipsel in sein Heft und schreibt mit eigenen Worten die Entdeckungen auf).

Die Lehrerin unterstützt weiterhin individuell und kann Teilreflexionen anbieten, wenn bestimmte Gruppen von Kindern ähnliche Entdeckungen gemacht haben oder aber vor ähnlichen Problemen stehen und nicht weiter kommen.

Reflexion zu den Aspekten Ordnen und Vollständigkeit:



Im Kreis sortieren die Kinder ihre Aufgaben.



Anschließend hängen sie die sortierten Ergebnisse aus und stellen fest, dass die Aufgaben zu einem Ergebnis noch fehlen!



Ziele

- Möglichst alle Ergebniszahlen und die dazugehörigen Aufgaben finden (z. B. durch system. Probieren oder Anwenden einer Strategie)
- Entdeckungen schriftlich beschreiben (begründen)
- Rückschlüsse ziehen und sich folgenden Fragen nähern:
 1. Wie viele Aufgaben gibt es insgesamt? Warum bist du sicher, dass das alle sind?
 2. Was haben die Ergebnisse miteinander zu tun?
 3. Wenn wir die sortierten Aufgaben betrachten entdecken wir ein „Muster“. Erkennst du es? Versuche es zu beschreiben (Treppe). Warum ist das so? (Jede Ergebniszahl hat unterschiedlich viele dazugehörige Aufgaben).
 4. Warum gibt es zu jedem Ergebnis unterschiedlich viele Aufgaben? Kannst du das erklären?
 5. Schau dir die Aufgaben zu einer Ergebniszahl genau an. Fällt dir bei den einzelnen Ziffern der Aufgaben etwas auf? (Zusammenhang Ziffernunterschied und Ergebnis.
- Im Austausch mit anderen Kindern Lösungen vergleichen
- Lösungswege anderer nachvollziehen lernen

Zeit

1-3 Einheiten

So kann es gehen

Start

Der methodisch-didaktische Ablauf der Folgestunden läuft im Wesentlichen so ab, wie es in der Unterrichtsplanung zur Startaufgabe beschrieben ist. Im Folgenden gibt es zusätzliche Hinweise zu den einzelnen Forscheraufträgen.

Arbeitsphase/ Differenzierung

Die Schüler arbeiten entweder an der Startaufgabe oder an einem der Folgeaufträge weiter. Diese müssen nicht chronologisch aufeinander folgen, sondern können je nach Interesse ausgewählt werden.

Während der Arbeitsphase kann die Lehrerin individuell unterstützen und einige Kinder zu einer Zwischenreflexion treffen (Ideen siehe Reflexion).

Schuljahr

2, 3

Lehrplanbezug

Inhaltsbezogene Kompetenzen
Zahlen und Operationen

Prozessbezogene Kompetenzen
kreativ sein, argumentieren,

Material

Schüler
Matheheft
Klebestift
Material zur Visualisierung

Lehrer

Aufgabe als „Schnipsel“ zum Einkleben vorbereiten (siehe Kopiervorlage)

Papierstreifen (z.B. A4 Längsformat), ggf. Packpapierrolle oder Tapetenrolle, um sortierte Aufgaben aufzukleben.



Die einzelnen Aufträge sind durch die Forscherpunkte sichtbar differenziert. Zur Verschriftlichung von Entdeckungen kann es für einige Kinder hilfreich sein, die so genannten Wortplakate (vgl. Schüler_Folgeaufgaben) einzuführen und auszuhängen (vgl. Basisinfo).

Hinweise zu den Folgeaufträgen

Zu Forscherauftrag 1

Es geht darum festzustellen, dass es bestimmte Ergebnisse (9er Reihe) gibt, die eine bestimmte Anzahl von Aufgaben enthalten.

In Teilaufgabe 3 können sich die Schüler mit einem Partner oder in einer kleinen Gruppe zusammenfinden, um ihre Entdeckungen zu vergleichen. Sind die Schüler nicht geübt darin, in Partner- oder Gruppenarbeit im Sinne einer „Mathekonferenz“ zusammen zu arbeiten, wäre es sinnvoll, ein mögliches Vorgehen zuvor mit der Kleingruppe oder im Plenum zu erörtern (Vorschlag dazu siehe Schülermaterial Folgeaufträge).

Die Kinder können PIKO's Tipp nutzen. Dazu kann die Lehrerin (bunte) Karten zur Visualisierung der Ergebnisse (z.B. grüne Karten) und der dazu gehörigen Aufgaben (z.B. gelbe Karten) zur Verfügung stellen. Die Kinder können aber auch eine eigene Möglichkeit der Visualisierung wählen (z. B. Ergebnisse sortiert auf ein Plakat schreiben, Darstellung in einer selbst entworfenen Tabelle).

Mögliche Impulse für eine Teilreflexion oder eine Einzelrückmeldung:

„Hast du alle möglichen Ergebniszahlen gefunden? Beschreibe, warum du sicher bist, dass es alle sind.“

„Was fällt dir genau bei den Ergebnissen auf? Kommen dir die Zahlen irgendwie bekannt vor? Vielleicht kannst du sie der Größe nach ordnen?“

Zu Forscheraufgabe 2

Es geht darum, die Gemeinsamkeiten der Aufgaben zu dem Ergebnis 27 heraus zu finden. Ihr Ziffernunterschied ist nämlich immer 3. Und $3 \times 9 = 27$. Wenn man das weiß, kann man „ohne zu rechnen“ das Ergebnis schnell ermitteln. Damit kann die Lehrerin die Kinder verblüffen und zusätzlich motivieren, den Trick heraus zu finden!

Mögliche Impulse für eine Teilreflexion oder eine Einzelrückmeldung:

„Betrachte einmal genau die Ziffern.“

„Betrachte genau den Unterschied zwischen den Ziffern.“

„Was hat der Unterschied zwischen den Ziffern mit dem Ergebnis zu tun?“

Einige Schülerdokumente zu den Folgeaufträgen:

Forscherauftrag 1:

Die Ergebnisse sind: 9, 8, 5, 4, 3, 2, 1

65-56 97-79 77-77 53-35 66-66 99-99

81-78 67-76 51-45 27-12

Thomas

Thomas hat verschiedene Ergebniszahlen gefunden, die er noch unsortiert notiert.

Forscherauftrag 2:

96-69=27

85-58=27

52-25=27

41-14=27

69-96=27

Bei der ersten Zahl ist der ~~Unterschied~~ Unterschied immer 3.

Lukas

Lukas hat herausgefunden, dass der Ziffernunterschied immer 3 ist.



Zu Forscheraufgabe 3

Es geht darum, herauszufinden wie alle Aufgaben zu einem Ergebnis (hier 9) geschickt gefunden werden können. Der Schüler findet dann alle Aufgaben, wenn er bemerkt hat, dass der Ziffernunterschied bei den Umkehrzahlen 1 beträgt, wenn das Ergebnis 9 ist. Sortiert er zusätzlich die Aufgaben der Größe nach, so wird er keine Aufgabe vergessen.

Auch in Absprache mit einem Partner sollen die Schüler versuchen aufzuschreiben, wie sie vorgegangen sind, um alle Lösungen zu finden (systematisches Probieren, Beschreiben der Zehner- Einerverschiebung...).

Mögliche Impulse für eine Teilreflexion oder eine Einzelrückmeldung:

- „Betrachte genau die Ziffern.“
- „Betrachte genau den Unterschied zwischen den Ziffern.“
- „Was hat der Unterschied zwischen den Ziffern mit dem Ergebnis zu tun?“
- „Warum gibt es 9 Aufgaben und keine mehr?“

Zu Forscheraufgabe 4

Hier geht es darum, die Zusammenhänge zwischen den Ergebniszahlen und den Ziffernunterschieden gezielt zu sammeln und zu sortieren.

Mögliche Impulse für eine Teilreflexion oder eine Einzelrückmeldung:

„Kannst du/ könnt ihr versuchen, deine/ eure Entdeckungen in einer Tabelle zu sortieren?“

Unterschied zwischen den Ziffern	Ergebnis	So viele Umkehraufgaben gibt es dazu:
2		...
3	27	7
4		...
...	...	...

Die Schüler können selbst eine Tabelle erstellen oder aber eine Vorlage des Lehrers benutzen.

Reflexion für alle

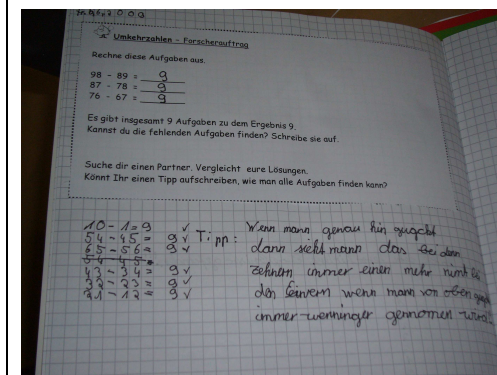
Anregungen zur Reflexion der einzelnen Forscheraufträge sind oben beschrieben.

Es sollte am Ende dieser Einheit aber eine Reflexion mit der ganzen Lerngruppe erfolgen. Auch und besonders für die Kinder, die unter Umständen bisher noch nicht so viele Entdeckungen machen konnten.

$96 - 69 = 27$	Es ist ganz einfach zu rechnen, weil man einfach nur für den Zehner und von dem einen einmal abzieht.
$85 - 58 = 27$	
$47 - 14 = 27$	
$96 - 69 = 27$	
$52 - 25 = 27$	
$74 - 47 = 27$	
$63 - 36 = 27$	
$20 - 02 = 27$	

Jan erläutert seinen Trick, mit dem er alle Aufgaben zum Ergebnis 27 gefunden hat.

Forscherauftrag 3:



Darstellung des eingeklebten „Schnipsels“ im Matheheft des Schülers.



Dabei ist wichtig, dass folgende Punkte angesprochen werden (Hintergründe vgl. Sachanalyse):

1. Wie viele Aufgaben gibt es insgesamt? Warum bist du sicher, dass das alle sind?
2. Was haben die Ergebnisse miteinander zu tun?
3. Wenn wir die sortierten Aufgaben betrachten, entdecken wir ein „Muster“. Erkennst du es? Versuche es zu beschreiben (Treppe). Warum ist das so? (Jede Ergebniszahl hat unterschiedlich viele dazugehörige Aufgaben).
4. Warum gibt es zu jedem Ergebnis unterschiedliche viele Aufgaben? Kannst du das erklären?
5. Schau dir die Aufgaben zu einer Ergebniszahl genau an. Fällt dir bei den einzelnen Ziffern der Aufgaben etwas auf? (Zusammenhang Ziffernunterschied und Ergebnis.)

Weiterarbeit

Wie in der Reihenübersicht (vgl. Basisinformationen zur Unterrichtsreihe) beschrieben, kann die Weiterarbeit folgendermaßen aussehen:

A) Kinder arbeiten auch nach der gemeinsamen Reflexion an den oben beschriebenen **Folgeaufträgen** weiter. Sie können die angesprochenen Entdeckungen nun noch einmal alleine oder mit einem Partner nachvollziehen und wiederholen.

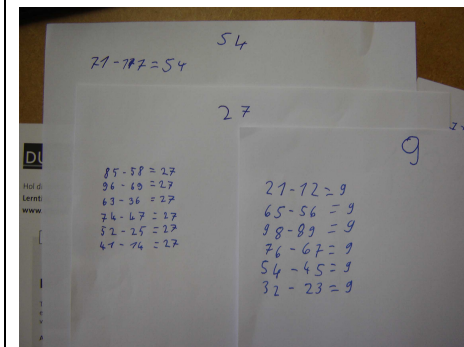
B) Kinder arbeiten an **Zusatzaufgaben** weiter (vgl. Schüler_Zusatzaufgaben).

C) Kinder versuchen gemeinsam mit der Lehrerin „**Beweise**“ darüber anzustellen, warum die Ergebniszahlen immer aus der Neunerreihe kommen. Durch die Visualisierung an der Hundertertafel oder am Zahlenstrich können Kinder die Zusammenhänge erkennen oder Beweisführungen gemeinsam mit der Lehrerin zumindest nachvollziehen.

Weiterarbeit mit den Zusatzaufgaben (B):

Die methodisch-didaktischen Zusammenhänge und Durchführungen der Schnipselaufgaben sind in der Startaufgabe und hier bei den Folgeaufträgen hinreichend beschrieben. Die Zusatzaufgaben können nun in ähnlicher Weise bearbeitet werden.

Forscherauftrag 4:



Bevor das Kind seine Entdeckungen in einer Tabelle notiert, hat es die Aufgaben zu dem jeweiligen Ergebnis auf unterschiedlichen Blättern notiert.

Reflexion für alle:



Die Kinder versammeln sich mit der Lehrerin zur Reflexion am Besprechungstisch.



Weiterarbeit mit „Beweisen“ (C):

Der Beweis an der Hundertertafel:

Es geht darum, dass alle Paare von Umkehrzahlen auf der Hundertertafel symmetrisch zu den 11er Zahlen liegen. Von 12 nach 21 zum Beispiel ist ein 9er Schritt immer ein Schritt nach unten und einen Schritt nach links, was bedeutet: +10 und -1. Die Kinder können versuchen diese Wege zu beschreiben und sich selbst Wegrätsel zu stellen. (Vgl. Sachanalyse)

Mögliche Impulse für eine Teilreflexion oder eine Einzelrückmeldung:

Überlege:

1. Warum ist die Ergebniszahl immer eine Zahl aus der Neunerreihe?
2. Hole dir bei deiner Lehrerin eine Hundertertafel.
3. Markiere die Felder der Paare aller Umkehrzahlen in der Hundertertafel.
4. Was fällt dir dabei auf? Versuche zu beschreiben.

PIKO's Tipp:

Betrachte zuerst alle Aufgaben zu einem Ergebnis und markiere jeweils die Umkehrzahlen in einer Farbe auf der Hundertertafel.

Der Beweis am Zahlenstrich:

Der Rechenstrich stellt noch eine weitere, sehr anschauliche Möglichkeit dar, die Zusammenhänge aufzuzeigen. Für jeden addierten Zehner muss jeweils ein Einer abgezogen werden. Beim Ziffernunterschied 3 (63 – 36) geht man also 3Z nach vorne und 3E zurück.

Gemeinsam mit den Schülern können gemeinsam einige Sprünge (vor und zurück) am Zahlenstrich visualisiert werden. Anschließend können die Schüler dann versuchen, in ihrem Heft eigene Sprünge zu zeichnen und farbig zu markieren.

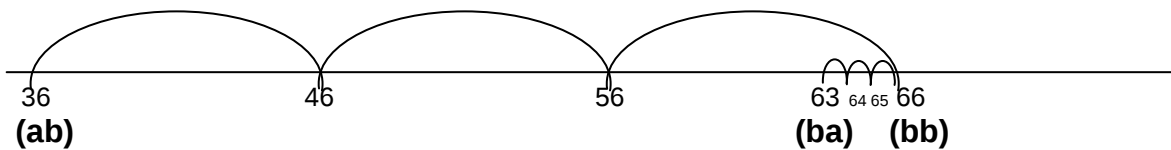


Kinder markieren die Umkehrzahlen mit unterschiedlichen Plättchen.

Anschließend können sie diese auf einer eigenen Hundertertafel mit unterschiedlichen Farben markieren.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(Quelle: Hengartner, Hirt, Wälti 2006)



Der Beweis an der Stellentafel:

Die Ausgangszahl wird mit Plättchen in der Stellentafel dargestellt. Beim Erzeugen der Umkehrzahl werden die Plättchen verschoben. Dadurch wird ein Einer entfernt (-1) und ein Zehner (+10) hinzugefügt. Dies entspricht einer Veränderung von +9. Die Differenz der beiden Ziffern einer Ausgangszahl gibt jeweils an, wie viele Plättchen man verschieben muss.

Eine weitere Möglichkeit zur Verdeutlichung bietet das halbschriftliche Rechenverfahren „Stellenwerte extra“:

$$\begin{array}{r} 63 - 36 = 30 - 3 = 27 \\ 60 - 30 \\ 3 - 6 \end{array}$$

Z	E
•••	•••••
•••••	•
•	•••

An dieser Stelle endet die 1. Einheit zu den Umkehrzahlen.

Es besteht die Möglichkeit einen Reflexionsbogen mit den Schülern durchzuführen, der als Selbsteinschätzungsbogen zur Überprüfung erreichter Kompetenzen eingesetzt werden kann.

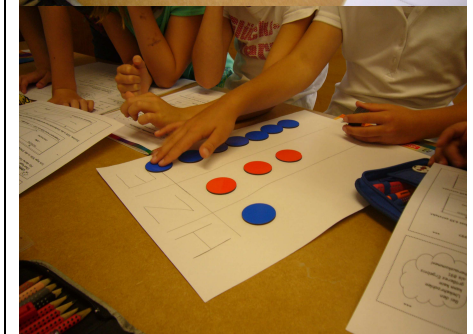
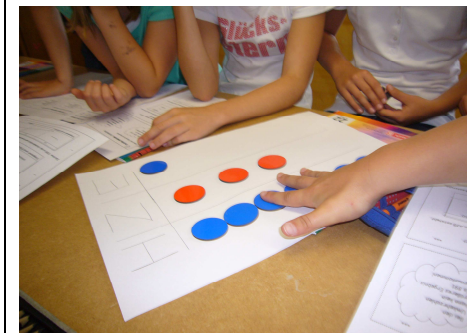
Ausblick:

Nach Einführung des Algorithmus der schriftlichen Subtraktion kann im 3. und 4. Schuljahr weiter an Aufgaben mit Zahlenmustern gearbeitet werden. Dabei können die Kinder Kriterien zum erforschen zunehmend selbstständig anwenden (vgl. Schüler_dreistellig/IRI/Minustürme, Lehrer_Schülerdokumente).

Schülerdokumente zum Beweis an der Stellentafel:



Die Schüler arbeiten zusammen.



Schüler „verschieben“ 731 zu 137



Ziele für die Startaufgabe

- Umkehrzahlen kennen lernen (und ggf. visualisieren)
- Zweistellige Umkehrzahlen finden und voneinander subtrahieren (im Kopf, halbschriftlich oder mit Material)
- Entdeckungen beschreiben (und begründen)

Zeit

etwa 1-3 Unterrichtseinheiten (in der die Schüler auch schon an Folgeaufträgen arbeiten)

So kann es gehen

Start

„Was sind eigentlich Umkehrzahlen?“ Für die inhaltliche **Einführung** werden zunächst gemeinsam einige Beispiele gefunden, um deutlich zu machen, was eine Zahl und ihre Umkehrzahl ist. Dies kann unterschiedlich angeregt werden:

- A) Kreisgespräch: Vermutungen äußern, was Umkehrzahlen sind. Beispiele finden und aufschreiben.
- B) Impuls: Im Kreis werden Zahlen und ihre Umkehrzahl aus einer Vielzahl von Zahlenkarten heraus gesucht und ausgehängt.
- C) Zahlen würfeln: Es wird mit 2 Würfeln gewürfelt und daraus eine Zahl und ihre Umkehrzahl ermittelt.

Im Anschluss daran kann gemeinsam PIKO' s erste Forscheraufgabe vorgestellt werden. An einem Beispiel kann geklärt werden, was es heißt, „die kleinere von der größeren Zahl abzuziehen“.

Arbeitsphase/ Differenzierung

Die Schüler versuchen zunächst in EA Umkehraufgaben zu finden und zu berechnen, bzw. Entdeckungen zu beschreiben (Tipps zum Beschreiben siehe Basisinfo Unterrichtsplanung). Die Lehrerin unterstützt individuell.

Voraussichtlich werden sich Lösungen der Kinder grob in drei Bearbeitungsniveaus unterscheiden lassen. Die Kinder benötigen dann unterschiedliche Anregungen zur Weiterarbeit:

- A) Beim Rechnen helfen, damit das Kind durch das richtige Ergebnis überhaupt Entdeckungen machen kann.
- B) Beim Beschreiben der Entdeckungen unterstützen, Tipps geben (evt. in PA weiterarbeiten, gemeinsam gefundene Aufgaben auf Karten schreiben, sortieren und dann Entdeckungen beschreiben, vgl. Basisinfo)
- C) Bei „vollständiger“ Entdeckung soll der Schüler an den Folgeaufträgen weiter arbeiten.

Reflexion

Zur Reflexion bietet sich an, dass sich Schüler, die ähnlich weit gearbeitet haben, treffen, um ihre Ergebnisse auszutauschen und ggf. zu ergänzen, aber auch über Entdeckungen zu reflektieren: Ergebniszahlen, Ziffernunterschiede, Anzahl der Aufgaben zu einer Ergebniszahl, Zusammenhang zur 9er Reihe (vgl. Sachinfo Umkehrzahlen).

Schuljahr

2, 3

Lehrplanbezug

Inhaltsbezogene

Kompetenzen

Zahlen und
Operationen

Prozessbezogene

Kompetenzen

kreativ sein, argumentieren,
darstellen

Material

Schüler

Matheheft

Klebestift

Material zur Visualisierung
(Rechenrahmen, Dienes, ...)

Lehrer

Aufgabe als „Schnipsel“
zum Einkleben vorbereiten
(siehe Kopiervorlage)

Papierstreifen (z.B. A4
Längsformat), ggf. Packpapierrolle
oder Tapetenrolle, um sortierte
Aufgaben aufzukleben.



Ziele für die Folgeaufgaben und Zusatzaufgaben

- Möglichst alle Ergebniszahlen und die dazugehörigen Aufgaben finden (z. B. durch system. Probieren oder Anwenden einer Strategie)
- Entdeckungen schriftlich beschreiben (begründen)
- Rückschlüsse ziehen und sich folgenden Fragen nähern:
 1. Wie viele Aufgaben gibt es insgesamt? Warum bist du sicher, dass das alle sind?
 2. Was haben die Ergebnisse miteinander zu tun?
 3. Wenn wir die sortierten Aufgaben betrachten entdecken wir ein „Muster“. Erkennst du es? Versuche es zu beschreiben (Treppe). Warum ist das so? (Jede Ergebniszahl hat unterschiedlich viele dazugehörige Aufgaben).
 4. Warum gibt es zu jedem Ergebnis unterschiedliche viele Aufgaben? Kannst du das erklären?
 5. Schau dir die Aufgaben zu einer Ergebniszahl genau an. Fällt dir bei den einzelnen Ziffern der Aufgaben etwas auf? (Zusammenhang Ziffernunterschied und Ergebnis.
- Im Austausch mit anderen Kindern Lösungen vergleichen
- Lösungswege anderer nachvollziehen lernen

Zeit

etwa 1-3 Unterrichtseinheiten

So kann es gehen

Start

Der methodisch-didaktische Ablauf der Folgestunden läuft im Wesentlichen so ab, wie es in der Unterrichtsplanung zur Startaufgabe beschrieben ist. Zusätzliche Hinweise zu den einzelnen Forscheraufträgen sind in der Unterrichtsplanung - Langfassung beschrieben.

Arbeitsphase/ Differenzierung

Die Schüler arbeiten entweder an der Startaufgabe oder an einem der Folgeaufträge weiter. Diese müssen nicht chronologisch aufeinander folgen, sondern können je nach Interesse ausgewählt werden. Während der Arbeitsphase kann die Lehrerin individuell unterstützen und einige Kinder zu einer Zwischenreflexion treffen (Ideen siehe Reflexion).

Die einzelnen Aufträge sind durch die Forscherpunkte sichtbar differenziert. Zur Verschriftlichung von Entdeckungen kann es für einige Kinder hilfreich sein, die so genannten Wortplakate (vgl. Schüler_Folgeaufgaben) einzuführen und auszuhängen (vgl. Basisinfo).

Reflexion für alle

Anregungen zur Reflexion der einzelnen Forscheraufträge sind oben beschrieben.

Es sollte am Ende dieser Einheit aber eine Reflexion mit der ganzen Lerngruppe erfolgen. Auch und besonders für die Kinder, die unter Umständen bisher noch nicht so viele Entdeckungen machen konnten. Dabei ist wichtig, dass folgende Punkte angesprochen werden (Hintergründe vgl. Sachanalyse):



1. Wie viele Aufgaben gibt es insgesamt? Warum bist du sicher, dass das alle sind?
2. Was haben die Ergebnisse miteinander zu tun?
3. Wenn wir die sortierten Aufgaben betrachten, entdecken wir ein „Muster“. Erkennst du es? Versuche es zu beschreiben (Treppe). Warum ist das so? (Jede Ergebniszahl hat unterschiedlich viele dazugehörige Aufgaben).
4. Warum gibt es zu jedem Ergebnis unterschiedliche viele Aufgaben? Kannst du das erklären?
5. Schau dir die Aufgaben zu einer Ergebniszahl genau an. Fällt dir bei den einzelnen Ziffern der Aufgaben etwas auf? (Zusammenhang Ziffernunterschied und Ergebnis.)

Weiterarbeit

Wie in der Reihenübersicht (vgl. Basisinformationen zur Unterrichtsreihe) beschrieben, kann die Weiterarbeit folgendermaßen aussehen:

A) Kinder arbeiten auch nach der gemeinsamen Reflexion an den oben beschriebenen **Folgeaufträgen** weiter. Sie können die angesprochenen Entdeckungen nun noch einmal alleine oder mit einem Partner nachvollziehen und wiederholen.

B) Kinder arbeiten an **Zusatzaufgaben** weiter (vgl. Schüler_Zusatzaufgaben).

C) Kinder versuchen gemeinsam mit der Lehrerin „**Beweise**“ darüber anzustellen, warum die Ergebniszahlen immer aus der Neunerreihe kommen. Durch die Visualisierung an der Hundertertafel oder am Zahlenstrich können Kinder die Zusammenhänge erkennen oder Beweisführungen gemeinsam mit der Lehrerin zumindest nachvollziehen.

An dieser Stelle endet die 1. Einheit zu den Umkehrzahlen.

Es besteht die Möglichkeit einen Reflexionsbogen mit den Schülern durchzuführen, der als Selbsteinschätzungsbogen zur Überprüfung erreichter Kompetenzen eingesetzt werden kann.

Ausblick:

Nach Einführung des Algorithmus der schriftlichen Subtraktion kann im 3. und 4. Schuljahr weiter an Aufgaben mit Zahlenmustern gearbeitet werden. Dabei können die Kinder Kriterien zum Erforschen zunehmend selbstständig anwenden (vgl. Schüler_dreistellig/IRI/Minustürme, Lehrer_Schülerdokumente).



Schülerdokumente zu dreistelligen Umkehrzahlen

Eigenproduktionen zur Startaufgabe:

$$\begin{array}{r}
 541 \\
 - 145 \\
 \hline
 396
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 852 \\
 - 258 \\
 \hline
 594
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 937 \\
 - 139 \\
 \hline
 892
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 756 \\
 - 657 \\
 \hline
 099
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 427 \\
 - 424 \\
 \hline
 396
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 803 \\
 - 368 \\
 \hline
 495
 \end{array}$$

Mir ist aufgefallen das es ganz schön schwer ist sich immer neue Zahlen auszuendenken. Es gibt nur 8 verschiedene Ergebnisse und zwar: 495, 099, 693, 792, 198, 297, 000, 594. Mehr habe ich auch gefunden es kann auch sein das es mehr gibt. Bei fast allen Ergebnissen kommt eine 9 in der Mitte vor. 891 und 396 gibts noch.

$ \begin{array}{r} 853 \\ - 258 \\ \hline 495 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 691 \\ - 196 \\ \hline 495 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 716 \\ - 617 \\ \hline 799 \end{array} $	Wenn man immer mit dem Ergebnis weiter rechnet, kommt irgendwann 95, 009, 891, 693, 297, 395 heraus.
$ \begin{array}{r} 594 \\ - 495 \\ \hline 099 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 594 \\ - 495 \\ \hline 099 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 991 \\ - 199 \\ \hline 792 \end{array} $	
$ \begin{array}{r} 990 \\ - 099 \\ \hline 891 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 990 \\ - 099 \\ \hline 891 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 792 \\ - 297 \\ \hline 495 \end{array} $	Es gibt nur diese Ergebniszahlen:
$ \begin{array}{r} 891 \\ - 198 \\ \hline 693 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 891 \\ - 198 \\ \hline 693 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 594 \\ - 495 \\ \hline 099 \end{array} $	
$ \begin{array}{r} 693 \\ - 296 \\ \hline 297 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 693 \\ - 296 \\ \hline 297 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 990 \\ - 099 \\ \hline 891 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 891 \\ 792 \\ 693 \\ 594 \\ 495 \\ 396 \\ 297 \\ 198 \\ 099 \\ 000 \end{array} $
$ \begin{array}{r} 792 \\ - 297 \\ \hline 395 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 792 \\ - 297 \\ \hline 395 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 891 \\ - 198 \\ \hline 693 \end{array} $	



Schülerdokumente zu dreistelligen Umkehrzahlen

Aufgaben ausrechnen, Ergebnisse nach der Größe ordnen

$$\begin{array}{r}
 541 \\
 - 1445 \\
 \hline
 396
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 852 \\
 - 2518 \\
 \hline
 694
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 756 \\
 - 657 \\
 \hline
 099
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \cancel{756} \\
 - \cancel{657} \\
 \hline
 \cancel{099}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 931 \\
 - 1319 \\
 \hline
 792
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 421 \\
 - 1214 \\
 \hline
 297
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 863 \\
 - 3618 \\
 \hline
 495
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 432 \\
 - 2314 \\
 \hline
 198
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 950 \\
 - 059 \\
 \hline
 891
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 861 \\
 - 1618 \\
 \hline
 693
 \end{array}$$

1. Bei jedem Ergebnis
ist in der Mitte eine
Neun

2. Es stehen 2 Einsen
vorne. Die man
dazu rechnen
kann muss.

3. Wenn die Sachen
nicht die Bedinuen
Nunmer 1,2, haben
ist die Aufgabe
falsch

4. Mitte 9

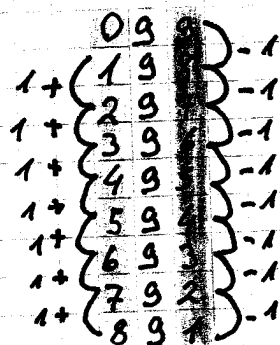
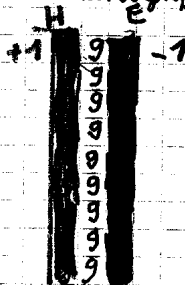
411 → Ergebnis 297

oft 495 als Ergebnis

9 verschiedene Ergebnisse

Handwerker einer

wird größer wird kleiner



Immer +1

Immer -1



Schülerdokumente zu dreistelligen Umkehrzahlen

Aufgaben zum vorgegebenen Ergebnis

Wenn der Unterschied zwischen dem Hunderter und dem Einer mehr als 0 ist ist das Ergebnis 99 oder 198 oder 297 und immer so weiter bis 891.

Aber wenn der Unterschied 1 ist ^{ist es} kommt 99 heraus, wenn er 2 ist 198, wenn ^{ist es} 3 ist 297 und so weiter bis er 9 ist und das Ergebnis 891.

Wenn das Ergebnis 297 ^{ist} muss die Aufgabe +101 gerechnet werden dann wird auch wieder 297.

$$\begin{array}{r} 630 \\ - 336 \\ \hline 594 \end{array} \quad \begin{array}{r} 620 \\ - 026 \\ \hline 594 \end{array} \quad \begin{array}{r} 670 \\ - 076 \\ \hline 594 \end{array} \quad \begin{array}{r} 650 \\ - 056 \\ \hline 594 \end{array} \quad \begin{array}{r} 660 \\ - 066 \\ \hline 594 \end{array} \quad \begin{array}{r} 670 \\ - 076 \\ \hline 594 \end{array} \quad \begin{array}{r} 680 \\ - 086 \\ \hline 594 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 690 \\ - 096 \\ \hline 594 \end{array}$$

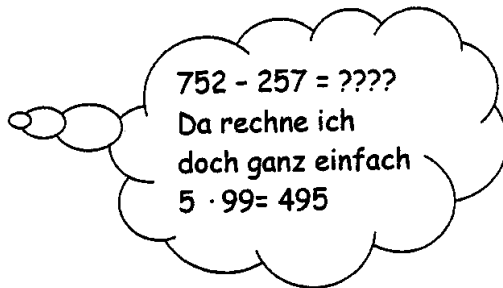
Wir haben den Zehner
verändert.

Begründung: Es ist immer egal welcher Zehner in der Mitte steht.
Aber beim Hunderter und beim Einer ist es nicht egal was es für eine Ziffer ist. Bei der Hunderter und Einerstelle ist der Unterschied immer 6. sechs.



Schülerdokumente zu dreistelligen Umkehrzahlen

Stimmt das? Überprüfe und begründe!



Man kann mit Malaufgaben den Unterschied berechnen.

Wir haben heraus gefunden dass wenn man den Unterschied der Zahlen berechnet, kann ich mit Malaufgaben die Ergebnis-Zahl finden.

$$\begin{array}{r} 392 \\ - 293 \\ \hline 099 \end{array}$$

$$1. \quad 99 = 99$$

$$\begin{array}{r} 694 \\ - 496 \\ \hline 198 \end{array}$$

$$2. \quad 99 = \cancel{489} 198$$

$$\begin{array}{r} 895 \\ - 598 \\ \hline 297 \end{array}$$

$$3. \quad 99 = \cancel{99} 297$$

$$\begin{array}{r} 975 \\ - 579 \\ \hline 396 \end{array}$$

$$4. \quad 99 = 396$$

$$\begin{array}{r} 752 \\ - 257 \\ \hline 495 \end{array}$$

$$5. \quad 99 = 495$$

$$\begin{array}{r} 872 \\ - 278 \\ \hline 594 \end{array}$$

$$6. \quad 99 = 594$$

$$\begin{array}{r} 962 \\ - 269 \\ \hline 693 \end{array}$$

$$7. \quad 99 = 693$$

$$\begin{array}{r} 981 \\ - 189 \\ \hline 792 \end{array}$$

$$8. \quad 99 = 792$$

$$\begin{array}{r} 910 \\ - 119 \\ \hline 891 \end{array}$$

$$9. \quad 99 = 891$$



Die Schülerdokumente zur Variation „IRI-Zahlen“ verdeutlichen, dass die Schülerinnen und Schüler die Kriterien zum Erforschen von Aufgaben mit Zahlenmustern zunehmend selbstständig nutzen, ihre Entdeckungen ausführlicher beschreiben und insgesamt eine Entwicklung in der Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen gemacht haben.

Beispiel 1

IRI Zahlen

$\begin{array}{r} 858 \\ - 585 \\ \hline 273 \end{array}$	$\begin{array}{r} 313 \\ - 131 \\ \hline 182 \end{array}$	$\begin{array}{r} 414 \\ - 141 \\ \hline 273 \end{array}$	$\begin{array}{r} 515 \\ - 151 \\ \hline 364 \end{array}$	$\begin{array}{r} 616 \\ - 161 \\ \hline 455 \end{array}$	Wenn man die Hunderter und die Einerzahl um 1 erhöht erhöht sich die Einerzahl und die Hunderterzahl bei den Ergebnissen auch um 1.
$\begin{array}{r} 421 \\ - 212 \\ \hline 209 \end{array}$	$\begin{array}{r} 212 \\ - 121 \\ \hline 91 \end{array}$	$\begin{array}{r} 543 \\ - 454 \\ \hline 89 \end{array}$			
die Ergebnisse kommen aus der 91-teile.					

Die kleinste Quersumme ist 10 danach wird sie immer um 1 größer.

Wenn der Unterschied zwischen der Hunderter und Zehnerzahl 1 ist das Ergebnis 91 bei 2 muss man $2 \cdot 91 = 182$ bei 3 $3 \cdot 91 = 273$

Montz



Beispiel 2:

11.2.09 JRD-Zahlen

Jana

$$\begin{array}{r} 258 \\ - 285 \\ \hline 273 \end{array} \quad \begin{array}{r} 373 \\ - 337 \\ \hline 182 \end{array} \quad \begin{array}{r} 272 \\ - 227 \\ \hline 91 \end{array}$$

Wenn man mit kleinen Zahlen anfängt und dann immer größer wird sind die Quersummen vom Ergebnis erst 10, 11, 12,

Am Ende der Ergebniszahlen sind also die Einer sind alle erst kommt 1, 2, 3, 4,

Bei den Zehnern werden es immer 10 weniger, also erst: 90, 80, 70, 60,

Bei den Hunderten werden es immer 100 mehr, also erst 100, 200, 300, 400,

Bei den Aufgaben, die man minus rechnet werden immer bei den Einern immer erst einen dann zwei dann drei und so weiter, also immer größer.

Bei den Zehnern werden es erst 1 dann 2 dann 3 und so weiter also immer weniger.

~~Bei den Hunderten werden es immer größer also erst 1~~

weil bei den Hunderten immer eine 1 geschrieben wird, werden es erst 1, dann 2, dann 3, also immer größer. Die Zehner und Einer beim Ergebnis sind auf der neuer-Reihe nur die Einer beim Ergebnis

sind immer 1 größer als in der alten Reihe.

Die 270 und die 180 und die 90 da muss man einfach die 0 wegrechnen und man hat ein Ergebnis aus der alten Reihe.



UMKEHRZAHLEN - Startaufgabe



PIKO sagt:

Wenn du bei einer Zahl ihre Ziffern vertauschst, erhältst du ihre **UMKEHRZAHL**.
Die Umkehrzahl von **85** ist dann **58**.



- Wähle nun selbst eine zweistellige Zahl. Schreibe ihre Umkehrzahl dazu.
Ziehe die kleinere von der größeren Zahl ab.
Rechne mindestens 12 weitere Aufgaben. Beispiel: $85 - 58 = \underline{\quad}$
- Was fällt dir (bei den Ergebnissen) auf? Beschreibe das in deinem Heft.

UMKEHRZAHLEN - Startaufgabe



PIKO sagt:

Wenn du bei einer Zahl ihre Ziffern vertauschst, erhältst du ihre **UMKEHRZAHL**.
Die Umkehrzahl von **85** ist dann **58**.



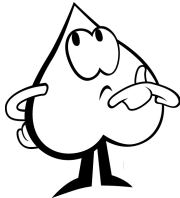
- Wähle nun selbst eine zweistellige Zahl. Schreibe ihre Umkehrzahl dazu.
Ziehe die kleinere von der größeren Zahl ab.
Rechne mindestens 12 weitere Aufgaben. Beispiel: $85 - 58 = \underline{\quad}$
- Was fällt dir (bei den Ergebnissen) auf? Beschreibe das in deinem Heft.



Hallo Kinder!

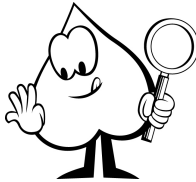
Schaut bei den Aufgaben immer genau, was ich euch sagen will.

Manchmal sehe ich nämlich so aus...



PIKO stellt dir eine knifflige Aufgabe!

oder so...



PIKO hat sich etwas überlegt, das du erforschen musst!

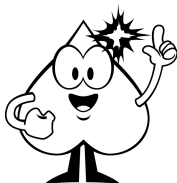
(Dafür brauchst du ein bisschen Zeit und Geduld!!)

oder so...



**PIKO hat eine Information für dich!
Mach dich schlau!**

oder so...



PIKO hat einen Tipp für dich!

Viel Spaß beim Forschen!



UMKEHRZAHLEN - Forscherauftrag 1

- • Überlege weiter:

1. Wie viele unterschiedliche Ergebnisse hast du gefunden?
2. Wie viele Aufgaben hast du zu den unterschiedlichen Ergebnissen gefunden?
3. Suche dir einen Partner. Versucht dann gemeinsam die Ergebnisse zu sortieren.
Überlegt: Habt ihr alle Aufgaben gefunden? Gibt es noch andere?



Pikos Tipp zu 3.: Schreibt jede Aufgabe und jedes Ergebnis auf eine Karte.
Sortiert dann die Aufgabenkarten zu den Ergebniskarten!



UMKEHRZAHLEN - Forscherauftrag 2

- • Rechne die Aufgaben aus.

$$96 - 69 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$85 - 58 = \underline{\hspace{2cm}}$$

- • Kannst du noch mehr Umkehraufgaben zu diesem Ergebnis finden?
Schreibe sie auf!

- • • Erkläre, wie du die Aufgaben gefunden hast!



UMKEHRZAHLEN - Forscherauftrag 3

- Rechne diese Aufgaben aus.

$$98 - 89 = \underline{\quad\quad\quad} \quad 54 - 45 = \underline{\quad\quad\quad} \quad 76 - 67 = \underline{\quad\quad\quad}$$

- • PIKO verrät dir, dass es insgesamt 9 Aufgaben zu dem Ergebnis 9 gibt. Kannst du die fehlenden Aufgaben finden? Schreibe sie auf.
- • • Erkläre, wie du die Aufgaben gefunden hast!

Extraaufgabe:

- • Suche dir einen Partner. Vergleicht eure Lösungen.
Könnt ihr einen Tipp aufschreiben, wie man alle Aufgaben finden kann?

UMKEHRZAHLEN - Forscherauftrag 4



Betrachte die Zahl 74. Der Unterschied zwischen den Ziffern 7 und 4 beträgt 3! Man sagt dann: „Der Ziffernunterschied bei der Zahl 74 beträgt 3.“



- • Wähle andere Zahlen, bei denen der Ziffernunterschied **3** beträgt. Bilde nun wieder ihre Umkehrzahl und ziehe voneinander ab ($74 - 47 = \underline{\quad\quad}$). Beschreibe, was dir auffällt!
- • Wähle dann Zahlen aus, bei denen der Ziffernunterschied **5** beträgt. Rechne wieder mit den Umkehrzahlen. Beschreibe, was dir auffällt!
- • Wähle nun einen eigenen Ziffernunterschied. Rechne wie zuvor. Beschreibe, was dir auffällt.



Wortsammlung zu Umkehrzahlen

Einer und Zehner vertauschen

85

58

abziehen heißt subtrahieren

Ergebnis

Ziffer

Unterschied

Eigene Ideen



Hilfen zum Beschreiben von Entdeckungen:

Der Einer wird immer um ____ kleiner
____ wird immer um ____ größer

Wenn der Unterschied zwischen den Ziffern ____
ist, dann ist das Ergebnis ____.

Der Einer ____ wird immer um ____ kleiner.
Der ____ wird immer um ____ größer.

Eigene Ideen



UMKEHRZAHLEN - Zusatzaufgabe 1

- • • Stimmt das? Überprüfe und versuche zu begründen!

1.

$$72 - 27 = \text{????}$$

Da rechne ich
doch ganz einfach
 $5 \cdot 9 = 45$

2.

Bei den
Umkehrzahlen
kann **kein**
größeres Ergebnis
als 81
herauskommen!

UMKEHRZAHLEN - Zusatzaufgabe 2



Piko sagt: „Ich weiß was!

Wenn du zu einer Ergebniszahl (also 9, 18, 27...) die Umkehrzahl bildet und diese beiden Zahlen addiert, so ist das Ergebnis dieser Rechnung immer 99.“



- • Suche dir einen Partner. Überprüft gemeinsam Pikos „Schlau-mach-Satz“ an einigen Ergebniszahlen.
- • • Könnt Ihr eine Erklärung dafür finden?



UMKEHRZAHLEN - Zusatzaufgabe 3

PIKO hat einen weiteren tollen Forscherauftrag für dich ausgedacht! Los geht's!!!

Überprüfe jetzt, was passiert, wenn man die Umkehrzahlen addiert (also: $85 + 58 = \underline{\quad}$)

- • Probiere aus und überlege:
 1. Wie viele unterschiedliche Ergebnisse gibt es?
 2. Wie viele Aufgaben gehören zu jeder Ergebniszahl?
 3. Beschreibe, was dir bei den Ergebniszahlen auffällt!



Umkehrzahlen - Zusatzaufgabe 4

PIKO findet, dass du bei den Minusaufgaben zu den zweistelligen Umkehrzahlen schon sehr viel entdeckt hast. Er fragt dich nun: Kannst du das auch mit größeren Zahlen???

- • Überprüfe jetzt, was passiert, wenn man dreistellige Umkehrzahlen subtrahiert.
(Zum Beispiel: $735 - 537 = \underline{\quad}$)
- • Suche dir einen Partner.
Überlegt gemeinsam: Wie viele unterschiedliche Ergebnisse gibt es?
Beschreibt, was euch bei den Ergebnissen auffällt!



Name: _____

Datum: _____

1. In dieser Tabelle stehen alle Aufgaben, die wir gefunden haben:

9	18	27	36	45	54	63	72	81
98-89=9	97-79=18	96-69=27	95-59=36	94-49=45	93-39=54	92-29=63	91-19=72	90-09=81
87-78=9	86-68=18	85-58=27	84-48=36	83-38=45	82-28=54	81-18=63	80-08=72	
76-67=9	75-57=18	74-47=27	73-37=36	72-27=45	71-17=54	70-07=63		
65-56=9	64-46=18	63-36=27	62-26=36	61-16=45	60-06=54			
54-45=9	53-35=18	52-25=27	51-15=36	50-05=45				
43-34=9	42-24=18	41-14=27	40-04=36					
32-23=9	31-13=18	30-03=27						
21-12=9	20-02=18							
10-01=9								

Überlege nun genau, welche Sätze zutreffen.

Kreuze so an:  richtig  falsch **?** ich weiß nicht recht

			?
Es gibt insgesamt 45 Aufgaben.			
Die Ergebniszahlen gehören zur 9er-Reihe.			
Es gibt insgesamt 10 verschiedene Ergebnisse.			
Die Ergebniszahl 9 hat die meisten Aufgaben.			
Es gibt keine größere Ergebniszahl als 81.			
90 ist die größte Ergebniszahl.			
Man findet weitere Aufgaben zu einer Ergebniszahl, wenn man den Zehner verkleinert und den Einer vergrößert.			
Man findet weitere Aufgaben zu einer Ergebniszahl, wenn man den Zehner verkleinert und den Einer verkleinert.			
Man findet weitere Aufgaben zu einer Ergebniszahl, wenn man den Zehner vergrößert und den Einer vergrößert.			
Wenn der Unterschied zwischen den Ziffern 7 beträgt, ist das Ergebnis der Aufgabe 63.			
72 - 27 = ??? Da rechne ich doch ganz einfach: $5 \cdot 9 = 45$			
Die Ergebniszahlen sind auch wieder Umkehrzahlen.			
Wenn man die Ergebniszahlen zusammenzieht (addiert), so erhält man 99.			



★ Kannst du noch weitere Sätze finden?

2. Schätze dich selbst ein:

				
Ich hatte keine Schwierigkeiten, die Minusaufgaben zu rechnen.				
Ich habe die Startaufgabe und _____ Forscheraufträge alleine geschafft.				
Ich weiß jetzt, wie ich zu Ergebnissen Aufgaben mit Umkehrzahlen finden kann.				
Ich konnte meine Entdeckungen beschreiben.				
Beim Beschreiben von Entdeckungen hat mir besonders geholfen:				

Das meint meine Lehrerin dazu:

--



Schülermaterial Startaufgabe

DREISTELLIGE UMKEHRZAHLEN - Startaufgabe



- Dies sind Umkehrzahlen, die aus Hundertern, Zehnern und Einern bestehen. Schreibe die Aufgaben in dein Heft und rechne sie aus.

853	694	716
<u>-358</u>	<u>-496</u>	<u>-617</u>

Bilde selbst eigene Aufgaben mit Umkehrzahlen und rechne sie aus.



Pikos Tipp: Benutze deine Ziffernkärtchen zum Bilden der Aufgaben!

- • Kannst du schon etwas über die Ergebnisse sagen?

DREISTELLIGE UMKEHRZAHLEN - Startaufgabe



- Dies sind Umkehrzahlen, die aus Hundertern, Zehnern und Einern bestehen. Schreibe die Aufgaben in dein Heft und rechne sie aus.

853	694	716
<u>-358</u>	<u>-496</u>	<u>-617</u>

Bilde selbst eigene Aufgaben mit Umkehrzahlen und rechne sie aus.



Pikos Tipp: Benutze deine Ziffernkärtchen zum Bilden der Aufgaben!

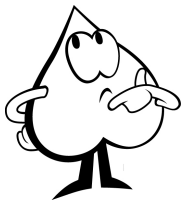
- • Kannst du schon etwas über die Ergebnisse sagen?



Hallo Kinder!!!

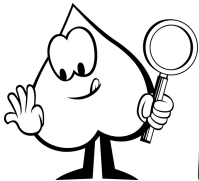
**Schaut bei den Aufgabenschnipseln immer genau,
was ich euch sagen will!**

Manchmal sehe ich nämlich so aus...



PIKO stellt dir eine knifflige Aufgabe!

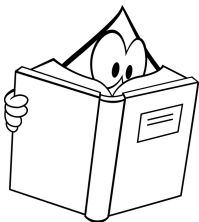
oder so...



**PIKO hat sich etwas überlegt, das du erforschen
musst!**

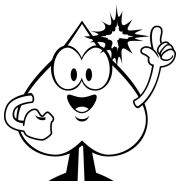
(Dafür brauchst du ein bisschen Zeit und Geduld!!)

oder so...



**PIKO hat eine Information für dich!
Mach dich schlau!**

oder so...



PIKO hat einen Tipp für dich!

VIEL SPAß BEIM FORSCHEN!



„Wir forschen zu dreistelligen Umkehrzahlen“ Schülermaterial Folgeaufträge

DREISTELLIGE UMKEHRZAHLEN - Forscherauftrag 1



- Rechne diese Aufgaben in deinem Heft aus:
$$\begin{array}{r} 541 \\ -145 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 852 \\ -258 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 756 \\ -657 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 931 \\ -139 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 421 \\ -124 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 863 \\ -368 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 432 \\ -234 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 950 \\ -59 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 861 \\ -168 \\ \hline \end{array}$$
- Ordne die Ergebnisse nach der Größe und beschreibe, was dir auffällt.



Pikos Tipp:

Diese Wörter können dir bei der Beschreibung helfen:

Hunderter - Zehner - Einer - Quersumme - Unterschied

DREISTELLIGE UMKEHRZAHLEN - Forscherauftrag 2



- Diese Aufgaben haben dasselbe Ergebnis. Schreibe sie in dein Heft und rechne aus

$$\begin{array}{r} 953 \\ -359 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 741 \\ -147 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 862 \\ -268 \\ \hline \end{array}$$

Kannst du noch mehr Aufgaben zu diesem Ergebnis finden?



Pikos Tipp:

Beachte den Unterschied zwischen der Hunderter- und der Einerstelle!



DREISTELLIGE UMKEHRZAHLEN - Forscherauftrag 3



- Rechne diese Aufgaben aus.

$$\begin{array}{r} 754 \\ -457 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 481 \\ -184 \\ \hline \end{array}$$

Der Unterschied zwischen der Hunderter- und der Einerstelle beträgt ____.
Die Ergebniszahl heißt dann 297.

$$\begin{array}{r} 917 \\ -719 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \\ -163 \\ \hline \end{array}$$

Der Unterschied zwischen der Hunderter- und der Einerstelle beträgt ____.
Die Ergebniszahl heißt dann ____.

- Untersuche weitere dreistellige Umkehrzahlen. Beachte den Unterschied zwischen Hunderter- und Einerstelle.



DREISTELLIGE UMKEHRZAHLEN - Forscherauftrag 4



Bei den dreistelligen Umkehrzahlen habt ihr schon viele Entdeckungen gemacht. Hier kannst du deine Entdeckungen und andere Forschersätze aufschreiben. Kreuze die richtigen Aussagen an.

☐ Die mittlere Ziffer in der Ergebniszahl ist immer eine 9.

☐ Die Ergebniszahlen sind Umkehrzahlen.

☐

☐

☐

☐

☐

☐



„Wir forschen zu dreistelligen Umkehrzahlen“ Schülermaterial Zusatzaufgaben

DREISTELLIGE UMKEHRZAHLEN - Zusatzaufgabe 1



... Stimmt das? Überprüfe und begründe!

$$752 - 257 = \text{????}$$

Da rechne ich doch
ganz einfach
 $5 \cdot 99 = 495$

Bei den
Umkehrzahlen kann
kein größeres
Ergebnis als 891
herauskommen!

DREISTELLIGE UMKEHRZAHLEN - Zusatzaufgabe 2



... Überlege: Warum ist die Ergebniszahl immer ein Vielfaches von 99?
Für deine Forschungen brauchst du die Stellentafel und Plättchen.

Ich lege 536 in die Stellentafel und verschiebe ein Plättchen so, das 635 entsteht.

H	Z	E
ooooo	ooo	oooooo
+100		-1
ooooooo		ooooo
Insgesamt wird 536 um $100-1=99$ größer.		

Zeichne 538 in die Stellentafel und verschiebe die Plättchen so, dass 835 entsteht.

H	Z	E
+ _____		- _____
Insgesamt wird 835 um _____ größer.		



DREISTELLIGE UMKEHRZAHLEN - Zusatzaufgabe 3



Mache dich schlau:

Wenn du zu einer Ergebniszahl die Umkehrzahl bildest und diese beiden Zahlen addierst, so ist das Ergebnis dieser Rechnung immer 1089.

- Suche dir einen Partner.
Überprüft gemeinsam Pikos „Schlau-mach-Satz“ an einigen Ergebniszahlen.

Begründet, warum das Ergebnis immer 1089 ist.



Schülermaterial Startaufgabe

IRI-ZAHLEN - Startaufgabe



- Das sind ganz besondere Minusaufgaben:

727	858	313	212
<u>-272</u>	<u>-585</u>	<u>-131</u>	<u>-121</u>

Kannst du erklären, warum diese Zahlen „IRI-Zahlen“ heißen?

IRI-ZAHLEN - Startaufgabe



- Das sind ganz besondere Minusaufgaben:

727	858	313	212
<u>-272</u>	<u>-585</u>	<u>-131</u>	<u>-121</u>

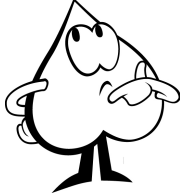
Kannst du erklären, warum diese Zahlen „IRI-Zahlen“ heißen?



Hallo Kinder!

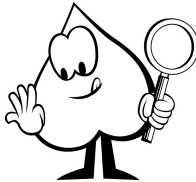
Schaut bei den Aufgaben immer genau, was ich euch sagen will.

Manchmal sehe ich nämlich so aus...



PIKO stellt dir eine knifflige Aufgabe!

oder so...



PIKO hat sich etwas überlegt, das du erforschen musst!

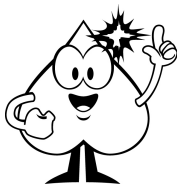
(Dafür brauchst du ein bisschen Zeit und Geduld!!)

oder so...



**PIKO hat eine Information für dich!
Mach dich schlau!**

oder so...



PIKO hat einen Tipp für dich!

Viel Spaß beim Forschen!



Schülermaterial Folgeaufträge

IRI-ZAHLEN - Forscherauftrag 1



- 1) Rechne die Aufgaben aus der Startaufgabe in deinem Heft aus.

2) Bilde zu diesen Zahlen jeweils die zweite Zahl und rechne die Minusaufgaben in deinem Heft aus.

939

414

565

- Kannst du schon etwas über die Ergebnisse sagen?

IRI-ZAHLEN - Forscherauftrag 2



- Bilde selbst 12 Minusaufgaben mit IRI-Zahlen und rechne sie in deinem Heft aus.
- Sieh dir die Ergebnisse an: Was fällt dir auf?



Pikos Tipps:

- * Dies kann dir bei deinen Forschungen helfen:
Quersumme, Einer-Zehner-Hunderter, ____ wird immer um ____ kleiner,
____ wird immer um ____ größer
- * Benutze farbige Stifte um einzuzeichnen, was dir auffällt.



IRI-ZAHLEN - Forscherauftrag 3



- Schreibe die Aufgaben in dein Heft und rechne sie aus.
Kannst du noch jeweils eine weitere Aufgabe finden?

a) $\begin{array}{r} 545 \\ -454 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 878 \\ -787 \\ \hline \end{array}$

b) $\begin{array}{r} 868 \\ -686 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 424 \\ -242 \\ \hline \end{array}$

c) $\begin{array}{r} 414 \\ -141 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 747 \\ -474 \\ \hline \end{array}$

- Kannst du erklären, wie man passende Aufgaben zu den Ergebniszahlen finden kann?



IRI-ZAHLEN - Forscherauftrag 4



Bei den IRI-Zahlen habt ihr schon viele Entdeckungen gemacht. Hier kannst du deine Entdeckungen überprüfen.

Kreuze die richtigen Antworten an:

- ☐ Das größte Ergebnis ist 819.
- ☐ Zu jedem Ergebnis gibt es mehrere Aufgaben.
- ☐ Zur kleinsten Ergebniszahl gibt es die meisten Aufgaben.
- ☐ Die Ergebnisse sind wieder IRI-Zahlen.
- ☐ Es hängt von der Differenz der Ziffern in den IRI-Zahlen ab, welches Ergebnis man erhält.
- ☐ Die Quersumme jeder Ergebniszahl beträgt 18.
- ☐ Die Ergebnisse wachsen nicht immer um dieselbe Zahl.
- ☐ Es gibt 9 verschiedene Ergebnisse.
- ☐ Das kleinste Ergebnis ist 91. Das nächste Ergebnis ist genau um 91 größer (182).

- ☐ _____
- ☐ _____
- ☐ _____



Schülermaterial Zusatzaufgaben

IRI-ZAHLEN - Zusatzaufgabe 1



... Überlege: Warum ist die Ergebniszahl immer ein Vielfaches von 91?
Für deine Forschungen brauchst du die Stellentafel und Plättchen.

Zeichne 232 in die Stellentafel und zeige, wie 323 entsteht.

H	Z	E
oo	ooo	oo
+100	-10	+1
ooo	oo	ooo
Insgesamt wird 232 um $100 - 10 + 1 = 91$ größer.		

Zeichne 353 in die Stellentafel und zeichne ein, wie 535 entsteht.

H	Z	E
+ _____	- _____	+ _____
Insgesamt wird 353 um _____ größer.		



IRI-ZAHLEN - Zusatzaufgabe 2



... Bei den IRI-Zahlen habt ihr schon viele Entdeckungen gemacht.

Überprüft jetzt, was passiert, wenn man Minusaufgaben mit AAL-Zahlen
($775 - 557 = \underline{\quad}$) rechnet.

Wie viele unterschiedliche Ergebnisse gibt es?

Welche Besonderheiten fallen bei den Ergebnissen auf?

Kannst du deine Entdeckungen erklären?



Schülermaterial Startaufgabe

MINUSTÜRME- Startaufgabe



- Minustürme werden mit besonderen Minusaufgaben gebaut. Wähle 3 Ziffern zwischen 0 und 9, zum Beispiel

5	7	9
---	---	---

 und bilde aus ihnen die größte und die kleinste Zahl. Subtrahiere die kleinere von der größeren Zahl. Aus dem Ergebnis bildest du wieder die kleinste und die größte Zahl. Rechne so weiter, bis das Ergebnis die gleichen Ziffern hat wie das vorherige Ergebnis.

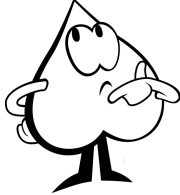
5	7	9
975 -579 396		
963 -369 594		
954 -459 495		



Hallo Kinder!

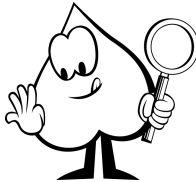
Schaut bei den Aufgaben immer genau, was ich euch sagen will.

Manchmal sehe ich nämlich so aus...



PIKO stellt dir eine knifflige Aufgabe!

oder so...



PIKO hat sich etwas überlegt, das du erforschen musst!

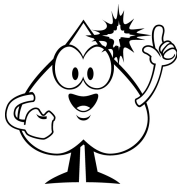
(Dafür brauchst du ein bisschen Zeit und Geduld!!)

oder so...



**PIKO hat eine Information für dich!
Mach dich schlau!**

oder so...



PIKO hat einen Tipp für dich!

Viel Spaß beim Forschen!



Schülermaterial Folgeaufträge

MINUSTÜRME - Forscherauftrag 1



- Bilde zu diesen Ziffern jeweils die größte und die kleinste Zahl und rechne die Minustürme in deinem Heft aus.

a)

9	3	7
---	---	---

b)

5	2	3
---	---	---

c)

5	6	4
---	---	---

- Kannst du schon etwas über die Ergebnisse sagen?

MINUSTÜRME- Forscherauftrag 2



- Wähle eigene Zahlen und rechne mit ihnen die Minustürme aus.
- Betrachte und beschreibe die Ergebnisse innerhalb des Turmes genau.

Wie viele verschiedene Ergebnisse hast du gefunden?



Pikos Tipp:

Du kannst die Besonderheiten in deinen Minustürmen auch mit Buntstiften markieren.



MINUSTÜRME - Forscherauftrag 3



- Betrachte deine gefundenen Minustürme und ordne sie nach der Anzahl ihrer Stockwerke.

Wie viele unterschiedlich hohe Minustürme hast du gefunden?

- Kannst du einen Tipp geben, wie man die Ziffern wählen muss, damit der Turm 5 Stockwerke hat?



Schülermaterial Zusatzaufgabe

MINUSTÜRME - Zusatzaufgabe



...

Überlege: Warum ist die Ergebniszahl immer ein Vielfaches von 99?
Für deine Forschungen brauchst du die Stellentafel.

Zeichne 764 in die Stellentafel und zeige, wie 467 entsteht.

H	Z	E
ooooo oo	ooooo o	oooo
-300		+3
oooo	ooooo o	ooooo oo
Insgesamt wird 764 um $300 - 3 = 297$ kleiner.		

Zeichne 842 in die Stellentafel und zeichne ein, wie 248 entsteht.

H	Z	E
- _____		+ _____
Insgesamt wird 842 um _____ kleiner.		



Schülermaterial Startaufgabe

ANNA-ZAHLEN - Startaufgabe



- Das sind ganz besondere Minusaufgaben:

7227	8558	3113	2112
<u>-2772</u>	<u>-5885</u>	<u>-1331</u>	<u>-1221</u>

Kannst du erklären, warum diese Zahlen „ANNA-Zahlen“ heißen?

ANNA-ZAHLEN - Startaufgabe



- Das sind ganz besondere Minusaufgaben:

7227	8558	3113	2112
<u>-2772</u>	<u>-5885</u>	<u>-1331</u>	<u>-1221</u>

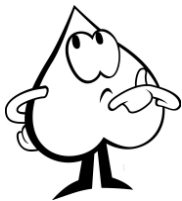
Kannst du erklären, warum diese Zahlen „ANNA-Zahlen“ heißen?



Hallo Kinder!!!

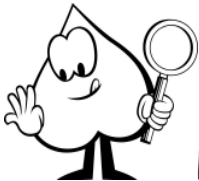
**Schaut bei den Aufgabenschnipseln immer genau,
was ich euch sagen will!**

Manchmal sehe ich nämlich so aus...



PIKO stellt dir eine knifflige Aufgabe!

oder so...



**PIKO hat sich etwas überlegt, das du erforschen
musst!**

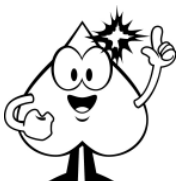
(Dafür brauchst du ein bisschen Zeit und Geduld!!)

oder so...



**PIKO hat eine Information für dich!
Mach dich schlau!**

oder so...



PIKO hat einen Tipp für dich!

VIEL SPAß BEIM FORSCHEN!



ANNA-ZAHLEN - Forscherauftrag 1



- 1) Rechne die Aufgaben aus der Startaufgabe in deinem Heft aus.
- 2) Bilde zu diesen Zahlen jeweils die zweite Zahl und rechne die Minusaufgaben in deinem Heft aus.

9339

4114

5665

- Kannst du schon etwas über die Ergebnisse sagen?

ANNA-ZAHLEN - Forscherauftrag 2



- Bilde selbst 12 Minusaufgaben mit ANNA-Zahlen und rechne sie in deinem Heft aus.
- Sieh dir die Ergebnisse an: Was fällt dir auf?



Pikos Tipps:

- * Dies kann dir bei deinen Forschungen helfen:
Quersumme, Einer-Zehner-Hunderter-Tausender , ____ wird immer um ____ kleiner, ____ wird immer um ____ größer
- * Benutze farbige Stifte um einzuzeichnen, was dir auffällt.



ANNA-ZAHLEN - Forscherauftrag 3



- Schreibe die Aufgaben in dein Heft und rechne sie aus.
Kannst du noch jeweils eine weitere Aufgabe finden?

a) 5445 8778
 -4554 -7887

b) 8668 4224
 -6886 -2442

c) 4114 7447
 -1441 -4774

- Kannst du erklären, wie man passende Aufgaben zu den Ergebniszahlen finden kann?



ANNA-ZAHLEN - Forscherauftrag 4



Bei den ANNA-Zahlen habt ihr schon viele Entdeckungen gemacht. Hier kannst du deine Entdeckungen überprüfen.

Kreuze die richtigen Antworten an:

- ☐ Das kleinste Ergebnis ist 891.
- ☐ Zu jedem Ergebnis gibt es mehrere Aufgaben.
- ☐ Von Ergebnis zu Ergebnis werden es immer 891 mehr.
- ☐ Die Ergebnisse sind wieder ANNA-Zahlen.
- ☐ Man findet weitere Aufgaben zu einer Ergebniszahl, wenn die Ziffern in der ANNA-Zahl den gleichen Unterschied haben.
- ☐ Die Quersumme jeder Ergebniszahl beträgt 27.
- ☐ Die Ergebnisse wachsen nicht immer um dieselbe Zahl.
- ☐ Es gibt 20 verschiedene Ergebnisse.

- ☐ _____
- ☐ _____
- ☐ _____



„Wir forschen zu ANNA-Zahlen“ Schülermaterial Zusatzaufgaben

ANNA-ZAHLEN - Zusatzaufgabe 1



... Überlege: Warum ist die Ergebniszahl immer ein Vielfaches von 891?
Für deine Forschungen brauchst du die Stellentafel und Plättchen.

Zeichne 2332 in die Stellentafel und zeige, wie 3223 entsteht.

T	H	Z	E
OO	OOO	OOO	OO
+1000	-100	-10	+1
OOO	OO	OO	OOO
Insgesamt wird 2332 um $1000 - 100 - 10 + 1 = 891$ größer			

Zeichne 3553 in die Stellentafel und zeichne ein, wie 5335 entsteht.

T	H	Z	E
+____	-____	-____	+____
Insgesamt wird 3553 um _____ größer			



ANNA-ZAHLEN - Zusatzaufgabe 2



- Bei den ANNA-Zahlen habt ihr schon viele Entdeckungen gemacht.

Überprüft jetzt, was passiert, wenn man Minusaufgaben mit NANA-Zahlen ($7575 - 5757 = \underline{\quad}$) rechnet.

Wie viele unterschiedliche Ergebnisse gibt es?

Welche Besonderheiten fallen bei den Ergebnissen auf?

Kannst du deine Entdeckungen erklären?