Basisinformation:

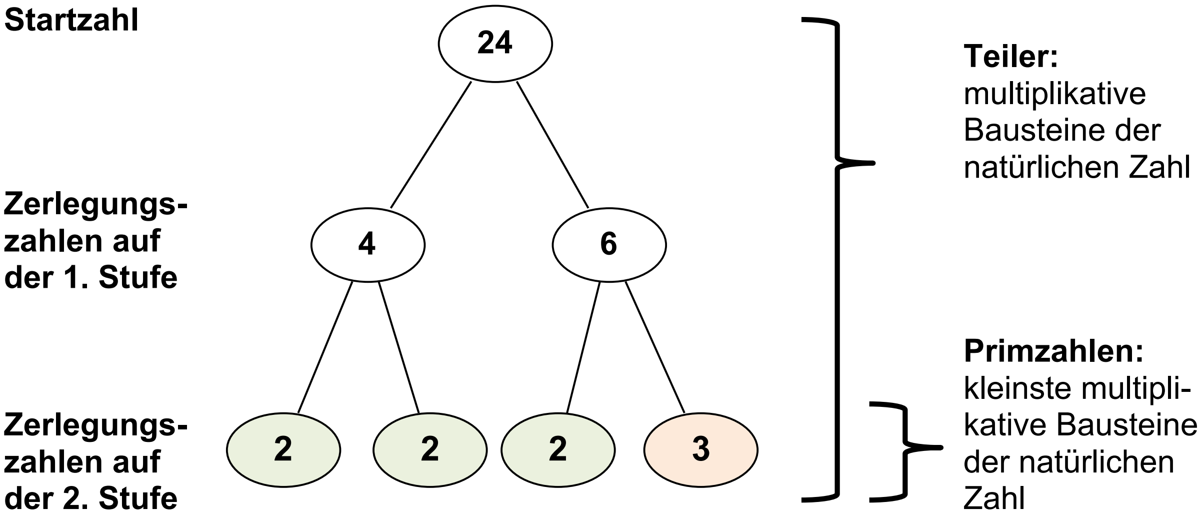
Zerlegungsbäume –
Ein grundlegendes und variationsreiches Aufgabenformat

Division – Ein grundlegender Inhalt

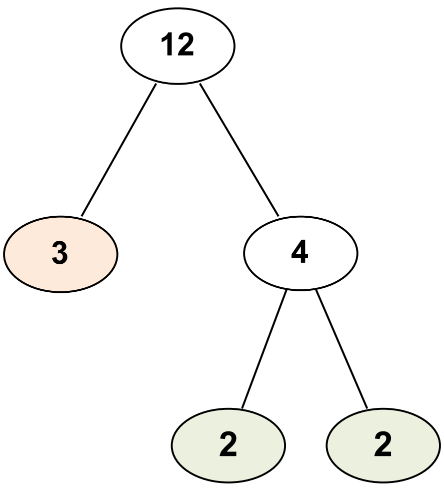
Sowohl im täglichen Leben als auch während der gesamten Schullaufbahn spielt die Division eine fundamentale Rolle. Die Kinder *begegnen* der Division bereits vor dem Schuleintritt, indem sie beispielsweise Bonbons gleichmäßig auf Tüten aufteilen oder Freunde in gleich große Mannschaften verteilen. Diese Grundvorstellungen – also das Aufteilen und Verteilen – werden später in der Grundschule *wiederaufgegriffen*, um die Division als fortgesetzte Subtraktion und als Umkehroperation der Multiplikation zu abstrahieren. Dabei erarbeiten die Kinder eine ganze Reihe neuer Fachbegriffe, wie zum Beispiel „Dividend", „Divisor" und „Quotient", aber ebenso „Teiler" und „Koteiler". Auf dieser Grundlage können die Kinder in der Sekundarstufe I ihr Divisionsverständnis *vertiefen*. Dort lernen sie nun Teiler als multiplikative Bausteine natürlicher Zahlen kennen und bestimmen sie auf systematischer Weise. Hierzu wenden sie auch Teilbarkeitsregeln an. Dabei stoßen sie auf Zahlen, die sich nicht „teilen" lassen – den sogenannten „Primzahlen". Sie sind die kleinsten multiplikativen Bausteine der natürlichen Zahlen. Selbstverständlich geht die Vertiefung der Division im weiteren Verlauf der Sekundarstufe I noch weiter. Zum Beispiel brauchen die Kinder beim Kürzen einer Bruchzahl wieder ihre Kenntnisse über Teiler. Genauer gesagt suchen sie nach dem größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner eines Bruches. Man kann also bei der Division durchaus von einem ***grundlegenden Inhalt*** sprechen, mit dem sich die Kinder über mehrere Schuljahre hinweg auf einem immer höher werdenden Niveau auseinandersetzen. In dieser Zeit kommen die Schülerinnen und Schüler mit einer Vielzahl an Fachbegriffen in Kontakt, die zueinander in Beziehung stehen. Jedoch wird die Vernetzung der Begriffe kaum nachzuvollziehen sein, wenn man viele isolierte, beziehungslose Rechenaufgaben bearbeitet. Stattdessen wird die Vernetzung insbesondere durch den Einsatz ***grundlegender Aufgabenformate*** vorangetrieben. Diese Aufgabenformate können von Schuljahr zu Schuljahr flexibel eingesetzt werden, indem man ihre Aufgabenstellungen auf vielfältige Weisen variiert. Dadurch leisten sie einen Beitrag zu einem kontinuierlichen Aufbau inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen. Im Rahmen der Division sind die ***Zerlegungsbäume*** ein grundlegendes Aufgabenformat.

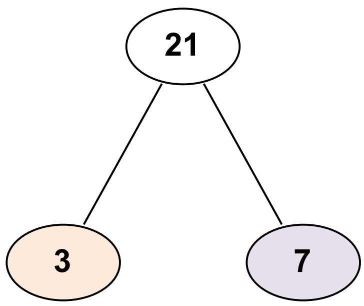
Zerlegungsbäume – Ein grundlegendes Aufgabenformat

Der Aufbau dieses Aufgabenformats beruht immer auf demselben Prinzip und ist für Kinder relativ leicht nachvollziehbar. So beginnen Zerlegungsbäume stets mit einer **Startzahl**. Ausgehend von dieser Startzahl wachsen sie sozusagen von oben nach unten. Das Wachstum soll anhand der Startzahl 24 beispielhaft demonstriert werden: Zunächst wird die Startzahl 24 multiplikativ in die Faktoren 4 und 6 zerlegt. Man nennt die beiden Faktoren auch **Zerlegungszahlen**, die sich auf der **ersten Stufe** des Zerlegungsbaums befinden. Die Zerlegungszahlen 4 und 6 werden dann jeweils wiederum in zwei Faktoren zerlegt – nämlich in die Faktoren 2 und 2 (denn $4 = 2 \cdot 2$) sowie 2 und 3 (denn $6 = 2 \cdot 3$). Somit hat man es mit Zerlegungszahlen auf der **zweiten Stufe** des Zerlegungsbaums zu tun. Diese Faktoren können nun nicht mehr zerlegt werden, sodass man insgesamt einen zweistufigen Zerlegungsbaum erhält. Aber wann hören Zerlegungsbäume generell auf zu wachsen? Das ist genau dann der Fall, wenn man auf Zerlegungszahlen stößt, die sich nicht mehr multiplikativ zerlegen lassen. Man spricht in diesem Zusammenhang von **Primzahlen**. Sie sind die kleinsten multiplikativen Bausteine natürlicher Zahlen und lassen sich nur durch 1 sowie durch sich selbst teilen. Damit Zerlegungsbäume nicht unaufhörlich wachsen, werden diese *trivialen Teiler* einfach weggelassen.



Natürlich wären auch andere Zerlegungen zur Startzahl 24 denkbar, wie zum Beispiel 2 und 12 oder 3 und 8. Infolgedessen würde der Zerlegungsbaum sein Aussehen verändern. Zudem könnte man aufgrund des Kommutativgesetzes der Multiplikation die Zerlegungszahlen auf jeder Stufe des Baums vertauschen, wodurch es ebenfalls zu einer Veränderung seines Aussehens käme. Demzufolge kann es für ein und dieselbe Startzahl verschiedene Zerlegungsbäume geben. Das bedeutet allerdings noch nicht, dass die Anzahl und Komplexität der Zerlegungsbäume mit der Größe ihrer Startzahlen steigt.





Obwohl die Startzahl 21 größer als die Startzahl 12 ist, hat der rechte Zerlegungsbaum nur eine Stufe. Darüber hinaus gibt es zur Startzahl 21 ohnehin weniger multiplikative Zerlegungen. Sie lässt sich nämlich nur in die Primfaktoren 3 und 7 zerlegen, die wiederum nicht mehr zerlegbar sind. Das bedeutet, dass es zur Startzahl 21 weniger Zerlegungsbäume gibt. Es existieren sogar Startzahlen, aus denen überhaupt kein Zerlegungsbaum wachsen kann. Diese Situation tritt beispielsweise bei der Startzahl 23 auf, weil sie selbst eine Primzahl ist, die sich nicht zerlegen lässt.

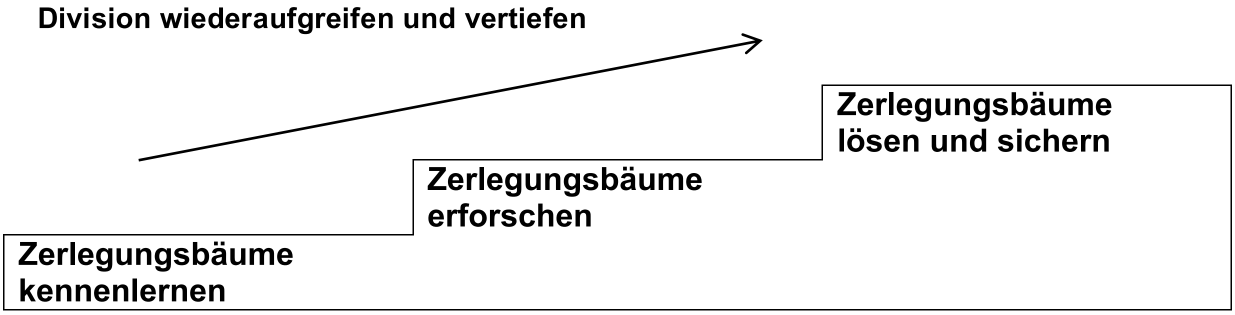
Wir können also die wichtigsten Eigenschaften eines Zerlegungsbaums folgendermaßen zusammenfassen:

1. Sowohl die Zerlegungszahlen als auch die Startzahl selbst sind Teiler bzw. multiplikative Bausteine der Startzahl.
2. Der Zerlegungsbaum endet mit Primzahlen, die sich nicht weiter multiplikativ zerlegen lassen und somit die kleinsten multiplikativen Bausteine der Startzahl sind.
3. Die Primzahlen des Zerlegungsbaums stellen in ihrer Gesamtheit die Primfaktorzerlegung der Startzahl dar. Wenn man sie nämlich alle miteinander multipliziert, dann erhält man wieder die Startzahl.

Sämtliche Eigenschaften sowie weitere Muster und Strukturen können die Kinder entdecken, beschreiben und begründen. Man sollte ihnen nur die Chance dazu geben, indem man sie mit ***variationsreichen Aufgabenstellungen*** herausfordert und fachsprachlichen Hilfestellungen unterstützt. Ganz konkrete Umsetzungsmöglichkeiten erhalten Sie im Unterrichtsmaterial von Haus 2 auf der PIKAS-Website unter http://pikas.dzlm.de/412.

Zerlegungsbäume – Ein variationsreiches Aufgabenformat

Das Aufgabenformat lässt sich im Mathematikunterricht flexibel einsetzen. Zum einen kann es an die unterschiedlichen individuellen Bedürfnisse, die innerhalb ein und derselben Lerngruppe vorherrschen, angepasst werden. Eine solche Anpassung beschränkt sich nicht nur auf die Auswahl unterschiedlich großer Startzahlen zum Ausrechnen der entsprechenden Zerlegungsbäume. Vielmehr können eine ganze Reihe von Forscheraufträgen und Übungsaufgaben gestellt werden, bei denen die Schülerinnen und Schüler das Bearbeitungsniveau selbst steuern können. Zum anderen ist das Aufgabenformat über viele Schuljahre hinweg einsetzbar, denn die Begriffe rund um die Division spielen weit über die Grundschule hinaus eine zentrale Rolle. Mithilfe der Zerlegungsbäume können schon die Grundschulkinder ein erstes Verständnis zu multiplikativen Zerlegungen und Teilern entwickeln. Später kann dieses Verständnis in der Sekundarstufe I wiederaufgegriffen und vertieft werden. Die Kinder arbeiten dann mit einem Aufgabenformat, das ihnen bereits aus der Grundschule bekannt ist. Dieser Wiedererkennungswert erleichtert das Lernen auf höherem Niveau. Allerdings lässt sich nicht mit Bestimmtheit sagen, ob alle Kinder nach dem Übergang von der Grundschule in die Sekundarstufe I die Zerlegungsbäume kennen bzw. wiedererkennen. Aus diesem Grund sollte man bei der unterrichtlichen Behandlung der Zerlegungsbäume darauf achten, dass niveauangemessen folgender Dreischritt eingehalten wird:



Zunächst sollte eine Situation geschaffen werden, in der die Kinder das Aufgabenformat entweder kennenlernen oder aber wiedererkennen können. Hierzu eignet sich der Einsatz eines Regelplakats, aus dem die Schülerinnen und Schüler das Konstruktionsprinzip von Zerlegungsbäumen entnehmen können. Auch ein unfertiger Wortspeicher, der im Verlauf der Unterrichtsreihe nach und nach erweitert wird, kann als fachsprachliche Stütze fungieren. Des Weiteren sollten die Kinder bereits in dieser Phase einfache Zerlegungsbäume mit vorgegebenen Startzahlen ausrechnen, um ihre Erfahrungswerte hinsichtlich des multiplikativen Zerlegens von natürlichen Zahlen zu diagnostizieren. Jedoch reicht das Ausrechnen von einfachen Zerlegungsbäumen nicht aus, um das Divisionsverständnis wiederaufzugreifen und zu vertiefen. Deshalb sollten in einem weiteren Schritt herausfordernde Aufgabenstellungen angeboten werden, die inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen gleichermaßen fordern und fördern. Im Rahmen der Zerlegungsbäume gibt es eine Vielzahl solcher Aufgabenstellungen. Wir bezeichnen sie auch als Forscheraufträge. Im Anschluss daran bietet sich noch ein letzter Schritt an – und zwar das Lösen und Sichern von Zerlegungsbäumen. In dieser Phase bearbeiten die Lernenden sowohl strukturierte als auch unstrukturierte Übungsaufgaben zu Zerlegungsbäumen, damit sie eine gewisse Routine und Sicherheit bei der multiplikativen Zerlegung natürlicher Zahlen gewinnen. Später rundet eine abschließende Standortbestimmung die gesamte Auseinandersetzung mit dem Aufgabenformat ab.

Im Unterrichtsmaterial von Haus 2 finden Sie diese und auch weitere Vorschläge zum Kennenlernen, Erforschen, Lösen und Sichern von Zerlegungsbäumen. Sie erhalten das Unterrichtsmaterial unter http://pikas.dzlm.de/412.

Sachinformation:

Division kontinuierlich wiederaufgreifen und vertiefen – Zerlegungsbäume als grundlegendes Aufgabenformat

Die Division als grundlegender Inhalt

Lernen ist immer auch ein Weiterlernen. Bei jedem Lernprozess greift man nämlich auf vorhandenes Wissen zurück und entwickelt es fortwährend weiter. Dies gilt in hohem Maße auch für das Lernen im Mathematikunterricht. Der amerikanische Psychologe Bruner spricht in diesem Zusammenhang vom sogenannten Spiralprinzip. Diesem Prinzip zufolge orientiert sich der Mathematikunterricht an fundamentalen Ideen, die im Laufe der gesamten Schulzeit immer wieder auf einem höheren Niveau und in strukturell angereicherter Form aufgegriffen werden (vgl. Krauthausen / Scherer 2014, S. 138). Solche fundamentalen Ideen können auch als ***grundlegende Inhalte*** bezeichnet werden. Beispiele für grundlegende Inhalte des Mathematikunterrichts sind nach Winter (2001, S. 1) das Stellenwertsystem, die Symmetrie sowie Funktionen. Mit diesen und vielen weiteren Inhalten kommen die Kinder bereits frühzeitig – zum Teil sogar schon vor der Schuleingangsphase – in Kontakt. Im Mathematikunterricht werden die Inhalte dann kontinuierlich thematisiert, und zwar von der Grundschule bis hin zu den höheren Jahrgängen der Sekundarstufe. Aus diesem Grund fasst Büchter (2014, S. 2ff) die Behandlung grundlegender Inhalte mit den Schlagworten „Begegnen", „Wiederaufgreifen" und „Vertiefen" zusammen. Auch die Division kann unter diesen drei Kategorien betrachtet werden:

1. ***Begegnen:***
   Die Kinder begegnen der Division bereits vor dem Schuleintritt, indem sie beispielsweise eine gegebene Anzahl an Bonbons gleichmäßig auf Tüten *aufteilen* und nach der Anzahl der benötigten Tüten fragen oder eine bestimmte Anzahl an Freunden in gleich große Mannschaften *verteilen* und sich danach über die Größe jeder Gruppe informieren. Den Fachbegriff „dividieren" kennen die meisten Kinder natürlich noch nicht. Stattdessen verwenden sie eher Begriffe aus dem Alltag, wie zum Beispiel „teilen" oder „geteilt durch".
2. ***Wiederaufgreifen:***
   Diese Grundvorstellungen – also das *Aufteilen* und *Verteilen* – werden später in der Grundschule wiederaufgegriffen, um die Division als fortgesetzte Subtraktion und als Umkehroperation der Multiplikation zu abstrahieren. Dabei erarbeiten die Kinder eine ganze Reihe neuer Fachbegriffe, die in gewisser Weise mit den bekannten alltagssprachlichen Begriffen in Beziehung stehen. Hierzu gehören unter anderem die Begriffe „Dividend", „Divisor" und „Quotient", aber ebenso „Teiler" und „Koteiler".
3. ***Vertiefen:***
   Auf dieser Grundlage können die Kinder in der Sekundarstufe I ihr Divisionsverständnis vertiefen. Dort bestimmen sie nun die Teiler einer Zahl auf systematischer Weise. Hierzu wenden sie auch Teilbarkeitsregeln an. Dabei stoßen sie auf Zahlen, die sich nicht „teilen" lassen – den sogenannten Primzahlen. Sie erkennen, dass es sich bei Teilern um multiplikative Bausteine und bei Primteilern bzw. Primzahlen sogar um die kleinsten multiplikativen Bausteine der natürlichen Zahlen handelt. Mit dieser Erkenntnis öffnen die Schülerinnen und Schüler die Tür zu

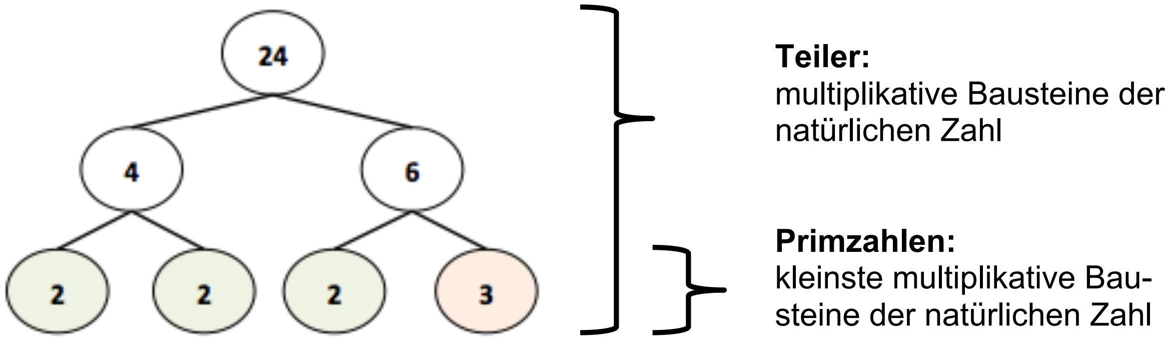
einem fundamentalen Satz der Mathematik, den man auch „Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie“ nennt (Padberg / Büchter 2015, S. 67): „Jede von 1 verschiedene natürliche Zahl besitzt (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) genau eine *Primfaktorzerlegung*.“

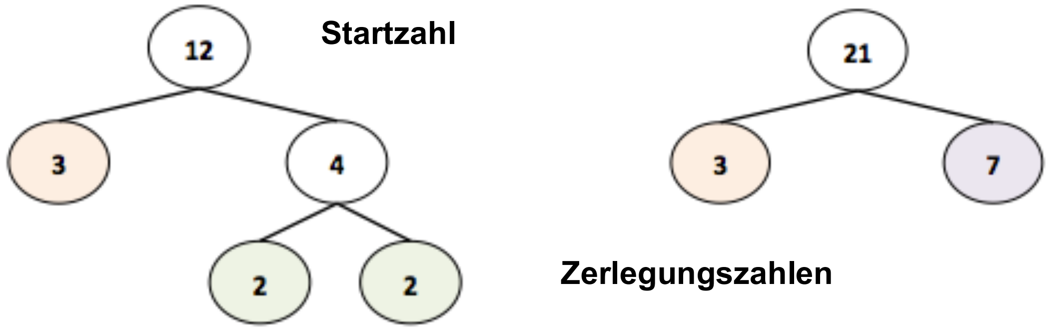
Selbstverständlich geht die Vertiefung der Division im weiteren Verlauf der Sekundarstufe I noch weiter. Zum Beispiel brauchen die Kinder ein gut ausgebautes Divisionsverständnis, um den Aufbau von und das Operieren mit Bruchzahlen verstehen zu können. Bruchzahlen sind nämlich ein erweitertes Beschreibungsmittel für Ergebnisse von Divisionsaufgaben – sprich für Quotienten (vgl. Padberg 2009, S. 30). Zudem benötigen die Kinder beim Erweitern und Kürzen einer Bruchzahl wieder ihre Kenntnisse über Teiler. Genauer gesagt suchen sie nach dem größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner eines Bruches. Zuvor wird die dazugehörige Grundvorstellung des Verfeinerns und Vergröberns von Einteilungen aufgebaut, die wiederum auf inhaltliche Vorstellungen zur Division angewiesen ist (vgl. Padberg 2009, S. 46ff).

Aus diesen Gründen kann man bei der Division durchaus von einem grundlegenden Inhalt sprechen. Wenn die Schülerinnen und Schüler sich mit einem solchen Inhalt über mehrere Schuljahre hinweg auseinandersetzen, dann kommen sie auch immer mit einer Vielzahl an Fachbegriffen in Berührung, die in ihrer Gesamtheit ein komplexes Beziehungsgefüge ergeben. Deshalb ist es dringend erforderlich, dass die Lehrpersonen an markanten Stellen des Lernprozesses einen „Anker setzen“ und die Lernenden zur bewussten Einnahme einer Rückschau- sowie einer Vorschauperspektive anregen (vgl. Büchter 2014, S. 9). „Erinnert ihr euch noch daran, als wir Zahlen in ihre Teiler und Koteiler zerlegt haben? Diese Mathewörter brauchen wir jetzt wieder, damit wir die kleinsten Bausteine von Zahlen finden können.“ So oder ähnlich könnte die Lehrperson die *Vernetzung der Begriffe* gegenüber den Kindern andeuten. Vorangetrieben wird die Vernetzung allerdings insbesondere durch den Einsatz ***grundlegender Aufgabenformate***. Diese Aufgabenformate haben den Vorteil, dass sie durch Variation der Aufgabenstellungen von Schuljahr zu Schuljahr eingesetzt werden können und einen Beitrag zu einem kontinuierlichen Aufbau inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen leisten. Im Rahmen der Entwicklung des Divisionsverständnisses werden also nun die sogenannten Zerlegungsbäume als grundlegendes Aufgabenformat vorgestellt.

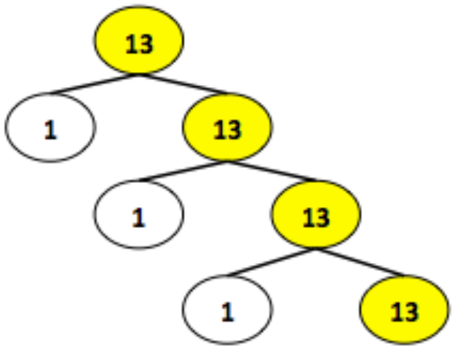
Zerlegungsbäume als grundlegendes Aufgabenformat

Wie bereits kurz erwähnt wurde, lassen sich natürliche Zahlen multiplikativ in ihre Bausteine zerlegen. Damit jedoch die Schülerinnen und Schüler Zahlen multiplikativ zerlegen können, sind sie auf ein ausreichendes Divisionsverständnis angewiesen. Bei der entsprechenden Zerlegung von Zahlen kommt nämlich sehr stark die Tatsache zum Tragen, dass die Multiplikation und Division voneinander abhängige Umkehroperationen sind. Dabei muss die Lehrperson aber folgendes beachten: Von allen Grundrechenarten wird die Division am schwierigsten empfunden (vgl. Robinson / Dubé 2008, S. 161). So werden Aufgaben, die sich im Bereich der Division bewegen, weit in die Sekundarstufe I hinein kaum oder sogar überhaupt nicht erfolgreich bewältigt (vgl. Ehlert et. al. 2013, S. 259). Deshalb erscheint eine frühzeitige Förderung des Divisionsverständnisses dringend geboten. Um nun den multiplikativen Zerlegungen von natürlichen Zahlen zu *begegnen*, sie kontinuierlich *wiederaufzugreifen* und zu *vertiefen*, eignet sich das Aufgabenformat der Zerlegungsbäume. Mit ihrer Hilfe lassen sich multiplikative Zerlegungen natürlicher Zahlen schnell gewinnen und übersichtlich darstellen (vgl. Padberg / Büchter 2015, S. 62). Allerdings können wir als Lehrpersonen nicht einfach voraussetzen, dass den Schülerinnen und Schülern dieses Aufgabenformat bereits bekannt ist. Stattdessen müssen die meisten von ihnen das Konstruktionsprinzip von Zerlegungsbäumen zuerst noch kennenlernen. Diese erste Auseinandersetzung könnte beispielsweise im Rahmen eines Regelplakats und einfacher Rechenaufträge organisiert werden. Darauf gehen wir allerdings später genauer ein.





Ausgehend von einer natürlichen Zahl als **Startzahl** wachsen Zerlegungsbäume von oben nach unten. Dieses Wachstum soll anhand der Startzahl 24 demonstriert werden: Zunächst wird die Startzahl 24 multiplikativ in die Faktoren 4 und 6 zerlegt, wobei bereits hier auch andere Zerlegungen denkbar wären, wie zum Beispiel 2 und 12 oder 3 und 8. Die beiden Faktoren bzw. **Zerlegungszahlen** 4 und 6 werden dann jeweils wiederum in zwei Faktoren zerlegt – nämlich in die Faktoren 2 und 2 (denn $4 = 2 \cdot 2$) sowie 2 und 3 (denn $6 = 2 \cdot 3$). Diese Faktoren können nun nicht mehr zerlegt werden, sodass man Zerlegungszahlen auf insgesamt zwei Stufen erhält. Aber wann hören Zerlegungsbäume eigentlich generell auf zu wachsen? Das ist genau dann der Fall, wenn man auf Zerlegungszahlen stößt, die sich nicht mehr multiplikativ zerlegen lassen. Man spricht in diesem Zusammenhang von **Primzahlen**, die in den Zerlegungsbäumen farblich gekennzeichnet werden. Sie sind die kleinsten multiplikativen Bausteine natürlicher Zahlen und lassen sich nur durch 1 sowie durch sich selbst teilen. Damit Zerlegungsbäume nicht unaufhörlich wachsen, werden diese *trivialen Teiler* einfach weggelassen. Falls die Schülerinnen und Schüler beim multiplikativen Zerlegen trotzdem triviale Teiler erzeugen, dann wäre es kontraproduktiv, sie direkt auf die Regeln für das Ausrechnen von Zerlegungsbäumen hinzuweisen und das Hinzufügen von solchen Teilern zu verbieten. Im Gegensatz dazu sollte man ihnen die Möglichkeit geben, selbstständig triviale Teiler zu erkennen und diese für das Wachstum der Zerlegungsbäume als unökonomisch zu kennzeichnen. Im Prinzip kann man nämlich jede natürliche Zahl in ihre zwei trivialen Teiler zerlegen. Wenn man diese Teiler im Zerlegungsbaum zulässt, dann würden sie immer und immer wieder auftauchen. Das Wachstum des Baums würde zu keinem ertragreichen Ende kommen und das macht überhaupt keinen Sinn. Wie gesagt: Zu dieser Erkenntnis sollten die Kinder allerdings selbst gelangen.



Die Startzahl 13 ist bereits eine Primzahl. Sie hat nur die trivialen Teiler 1 und sich selbst. Man kann sie also nicht sinnvoll zerlegen. Würde man die trivialen Teiler zulassen, dann würde der Zerlegungsbaum unaufhörlich wachsen.

Wir können also die wichtigsten Eigenschaften eines Zerlegungsbaums folgendermaßen zusammenfassen:

1. Sowohl die Zerlegungszahlen als auch die Startzahl selbst sind Teiler bzw. multiplikative Bausteine der natürlichen Zahl, mit der man den Zerlegungsbaum beginnt.
2. Der Zerlegungsbaum endet mit Primzahlen, die sich nicht weiter multiplikativ zerlegen lassen und somit die kleinsten multiplikativen Bausteine der natürlichen Zahl sind.
3. Die Primzahlen des Zerlegungsbaums stellen in ihrer Gesamtheit die Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahl dar. Wenn man sie nämlich alle miteinander multipliziert, dann erhält man wieder die Startzahl.

Sämtliche Eigenschaften können die Kinder entdecken und mithilfe sprachlicher Brücken beschreiben. Man sollte ihnen nur die Chance dazu bieten, indem man sie mit variationsreichen Aufgabenstellungen herausfordert und passenden Hilfestellungen unterstützt.

Ein Aufgabenformat, viele Aufgabenvariationen

Das Aufgabenformat „Zerlegungsbäume“ lässt sich im Mathematikunterricht flexibel einsetzen. Zum einen trägt das Aufgabenformat zur integrierten Förderung von inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen bei. Diese Förderung kann sich sogar problemlos über mehrere Schuljahre hinweg erstrecken, denn es lassen sich aufeinander bezogene Aufgaben passend zu den Kompetenzerwartungen der Grundschule und auch der Sekundarstufe I stellen. Zum anderen können die variationsreichen Aufgaben an die unterschiedlichen Leistungsniveaus der Schülerinnen und Schüler angepasst werden, indem man die Komplexität zugunsten der individuellen Bedürfnisse verändert.

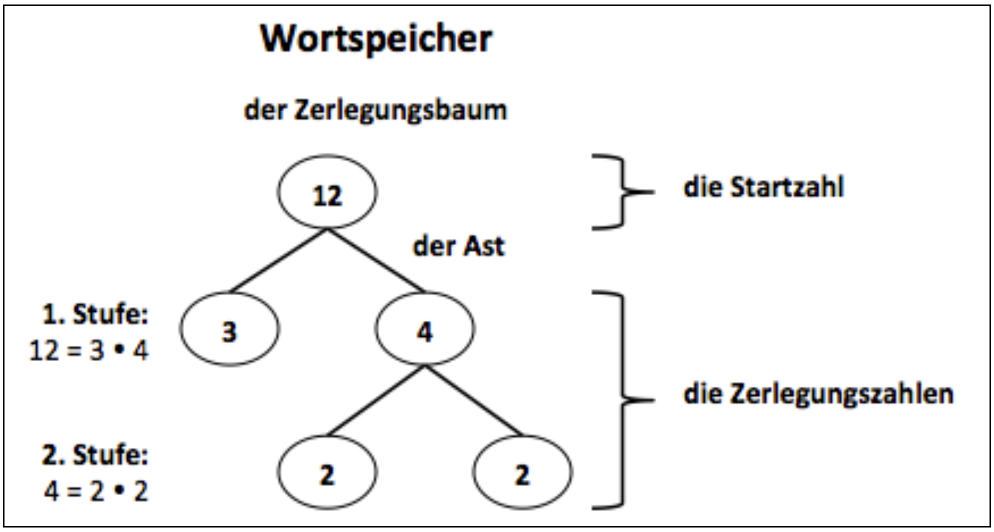
Das heißt, dass die Aufgabenstellungen sowohl auf horizontaler sowie auf vertikaler Ebene variiert werden können. Die Variationsmöglichkeiten auf ***horizontaler Ebene*** beziehen sich dabei auf die Anpassung der Aufgaben an die individuellen Bedürfnisse, die innerhalb ein und der derselben Lerngruppe existieren. Die ***vertikale Ebene*** sagt zusätzlich aus, dass das Aufgabenformat über viele Schuljahre hinweg einsetzbar ist. Entsprechende Beispiele für Aufgabenstellungen, die beide Ebenen der Variationsmöglichkeiten beinhalten, werden in diesem Abschnitt kurz vorgestellt. Bei dieser Vorstellung werden unter anderem auch Schülerdokumente hinzugezogen, die im Rahmen von Masterarbeiten zu den Zerlegungsbäumen entstanden sind. Die Dokumente demonstrieren, welche Erfahrungen die Kinder zu multiplikativen Zerlegungen bereits mitbringen und wie sich diese weiterentwickeln. Zudem soll der Aspekt der Sprachbildung berücksichtigt werden, weil die Kinder in der Auseinandersetzung mit dem Aufgabenformat eine Reihe von Fachbegriffen und sogar ganze fachlich relevante Satzstrukturen erarbeiten. Deshalb wird der *Wortspeicher* eine bedeutende

Rolle spielen. Weitere Informationen und Beispiele finden Sie im Unterrichtsmaterial von Haus 2 auf der PIKAS-Website unter http://pikas.dzlm.de/412.

1. Zerlegungsbäume kennenlernen

Zunächst sollte eine Situation geschaffen werden, in der die Kinder das Aufgabenformat kennenlernen können. Darüber hinaus können sie währenddessen zeigen, welche Erfahrungen mit multiplikativen Zerlegungen sie bereits gemacht haben.

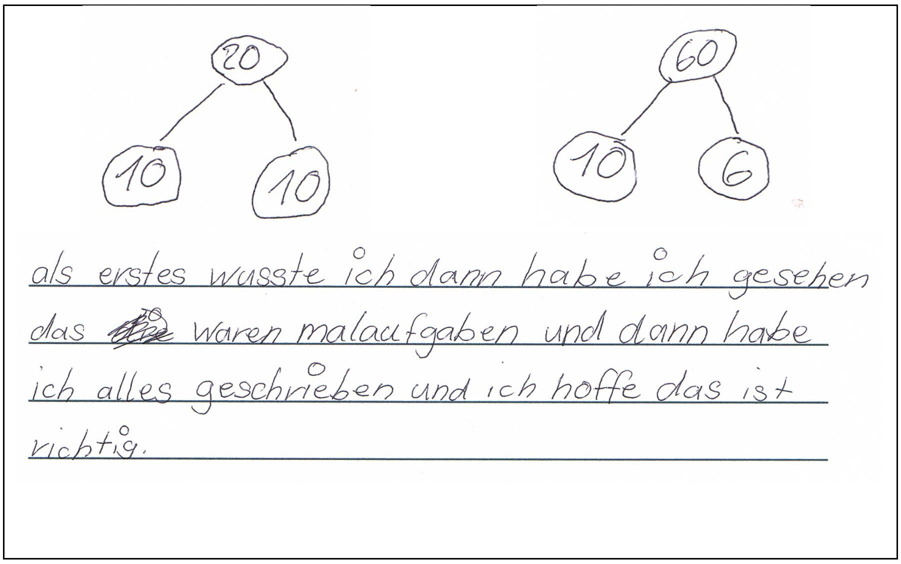
Zu Beginn der Kennenlernphase setzen sich die Schülerinnen und Schüler mit einigen exemplarisch ausgewählten Zerlegungsbäumen auseinander. Diese erste Auseinandersetzung kann in der Form eines unterrichtlichen Einstiegs stattfinden, in dem die Lehrperson gemeinsam mit den Kindern den Aufbau und die mathematischen Hintergründe von Zerlegungsbäumen klärt. Dabei legt die Lehrperson vor allem dar, wo man in einem Zerlegungsbaum die Startzahl sowie die Zerlegungszahlen findet und wie diese miteinander in Beziehung stehen. Allerdings werden hier nicht schon sämtliche Fachbegriffe eingeführt, sondern nach und nach durch die Bearbeitung herausfordernder Aufgabenstellungen entwickelt. Deshalb erhalten die Kinder einen unfertigen Wortspeicher, der zunächst einmal nur die wichtigsten Begriffe enthält.



Die Schülerinnen und Schüler kommen am Anfang noch mit wenigen Wörtern aus, um den Aufbau von Zerlegungsbäumen verstehen zu können. Hierzu gehören die Wörter „Startzahl“, „Zerlegungszahlen“ und „Ast“ samt ihrer Artikel sowie „1. Stufe“ und „2. Stufe“. Sie stehen für visuell sichtbare Elemente des Zerlegungsbaums und können relativ leicht nachvollzogen werden. Zusätzlich benötigen die Kinder unbedingt die Begriffe „mal“ und „geteilt“ aus der Schuleingangsphase, denn nur so können sie verstehen, in welcher Beziehung die Wörter zueinander stehen (vgl. MSW NRW 2008, S. 61). Auf dieser Grundlage kann der Wortspeicher später erweitert werden. Demnach sind zum Beispiel die Zerlegungszahlen dasselbe wie *Teiler* von der Startzahl und sie können darüber hinaus auch *Primzahlen* sein, falls sie sich nicht weiter zerlegen lassen.

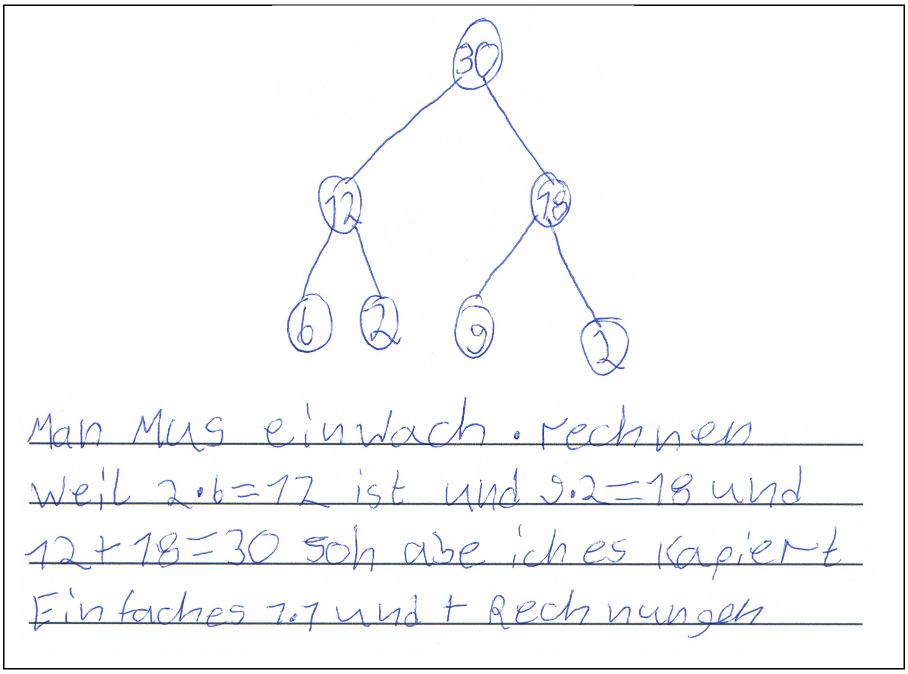
Für den weiteren Verlauf der Kennenlernphase bieten sich zwei unterschiedliche Wege an. Der erste Weg besteht darin, einige Zerlegungsbäume mit vorgegebener Startzahl auszurechnen. Jedoch werden nicht nur die Startzahlen vorgegeben, sondern auch sämtliche Äste und Felder. Die Kinder zerlegen also die Startzahlen multiplikativ und füllen die leeren Felder mit passenden Zerlegungszahlen aus. Nach dieser reinen Rechenaufgabe schließen sich sogenannte Eigenproduktionen an, indem die Schülerinnen und Schüler eigene Zerlegungsbäume erfinden (vgl. Selter 1997, S. 9). Ihre Zerlegungsbäume können dabei unterschiedlich komplex ausfallen, wodurch wir Lehrpersonen genauere Informationen darüber erhalten, wie weit die Rechenfähigkeiten der Lernenden zur multiplikativen Zerlegung natürlicher Zahlen ausgeprägt sind. Diese Diagnose der rechnerischen Fähigkeiten wird noch dadurch angereichert, dass die Kinder ihre Vorgehensweisen beim Ausrechen von Zerlegungsbäumen beschreiben. Ihre Beschreibungen sollten allerdings so nachvollziehbar wie möglich ausfallen. Deshalb erhalten sie den Hinweis, dass sich ihre Vorgehensbeschreibungen an andere Kinder richten. Das soll den Antrieb erhöhen, genauer über das eigene Vorgehen nachzudenken. Betrachten Sie hierzu nun folgende Schülerdokumente (aus Klimek 2017):

Zerlegungsbäume und Beschreibung von Abba (4. Klasse):



Abbas produziert zwei einstufige Zerlegungsbäume. Die Startzahl 20 zerlegt er additiv anstatt multiplikativ. Zwar korrigiert er diesen Fehler bei der Startzahl 60, jedoch gesteht er seine Unsicherheit hinsichtlich des Vorgehens ein. Zumal ist seine Beschreibung fachsprachlich noch ausbaufähig.

Zerlegungsbäume und Beschreibung von Xara (4. Klasse):

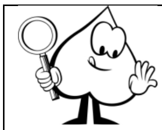


Xara entscheidet sich für die Startzahl 30 und notiert hierzu einen zweistufigen Zerlegungsbaum. Allerdings zerlegt sie die Startzahl zunächst ebenfalls additiv. Erst in der zweiten Stufe geht sie multiplikativ vor. Ihre Beschreibung klingt zwar noch etwas holprig, aber sie kann bereits die Startzahl aus den Zerlegungszahlen rekonstruieren.

Ein alternativer Weg zum Kennenlernen von Zerlegungsbäumen kann die Aktivität „Wer zerlegt zuletzt?“ sein (vgl. Prediger / Dirks / Kersting 2009, S. 10ff). Ursprünglich handelt es sich dabei um einen spielerischen Zugang zur Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen. Da ein Zerlegungsbaum letztendlich immer auch die Primfaktorzerlegung der Startzahl enthält, kann die Aktivität natürlich auch dazu genutzt werden, um erste Erfahrungen mit dem Aufgabenformat zu sammeln. Das Unterrichtsmaterial im Haus 2 bietet die Aktivität entsprechend modifiziert an.

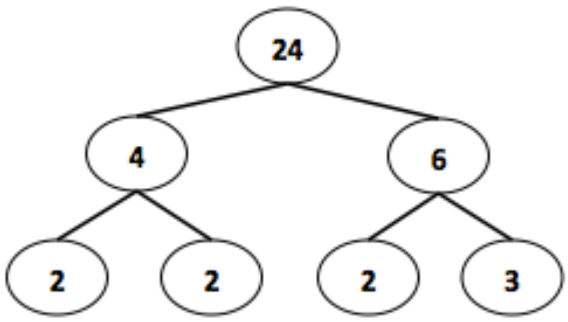
2. Zerlegungsbäume erforschen

Selbstverständlich ist es wichtig, dass die Kinder natürliche Zahlen sicher dividieren und somit ihre Teiler bestimmen können. Es geht hierbei schließlich um eine wichtige inhaltsbezogene Kompetenz, die für den Aufbau weiterer arithmetischer und algebraischer Kompetenzen den Grundstein legt. Es lohnt sich also durchaus, Zerlegungsbäume mit vorgegebener Startzahl ausrechnen zu lassen. Allerdings reicht das Trainieren der Rechenfertigkeiten nicht aus. Vielmehr sollten daneben auch prozessbezogene Kompetenzen gefördert werden, denn nur so können die Schülerinnen und Schüler grundlegende Begriffe rund um die Division entwickeln sowie miteinander vernetzen. Deshalb sollten die Kinder schon frühzeitig herausfordernde Aufgabenstellungen bearbeiten, die das Problemlösen, Argumentieren, Darstellen und Kommunizieren anregen. Im Rahmen der Zerlegungsbäume gibt es eine Vielzahl solcher Aufgabenstellungen. Wir formulieren sie als Forscheraufträge, von denen ein Beispiel genauer vorgestellt werden soll. Weitere Forscheraufträge finden Sie im Unterrichtsmaterial von Haus 2 unter http://pikas.dzlm.de/412.



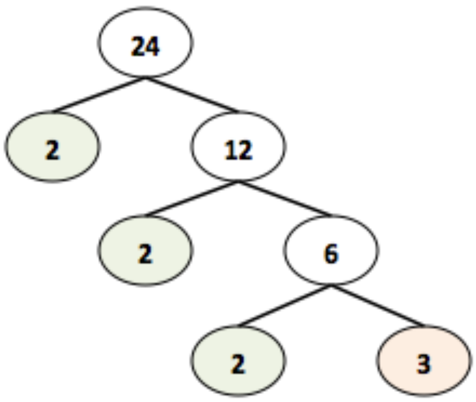
Forscherauftrag

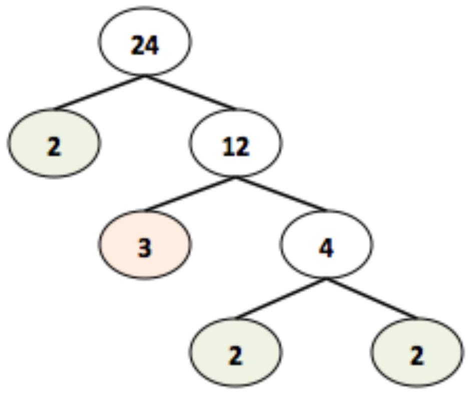
Piko hat einen Zerlegungsbaum mit der Startzahl 24 gefunden:

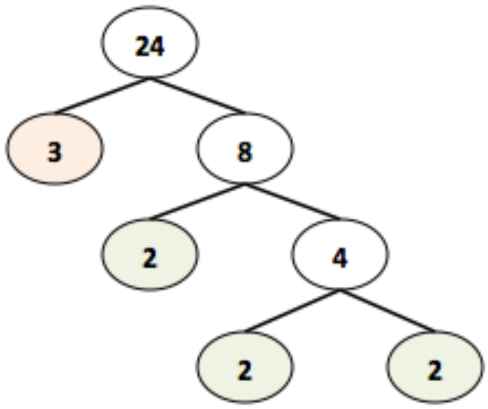


Finde alle Zerlegungsbäume mit der Startzahl 24. Wie gehst du dabei vor?
Erkläre dein Vorgehen einem anderen Kind.
Hast du alle Zerlegungsbäume gefunden? Begründe.

Dieser Forscherauftrag ist ein konkretes Beispiel dafür, wie inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen Hand in Hand gefördert und gefordert werden können. Zum einen werden die Schülerinnen und Schüler dazu aufgefordert, unterschiedliche multiplikative Zerlegungen für ein und dieselbe natürliche Zahl zu finden. Demnach müssen sie Aufgaben aus dem kleinen Einmaleins, die zur Startzahl 24 passen, automatisiert wiedergeben und dabei auch immer die entsprechende Umkehroperation im Blick behalten können (vgl. MSW NRW 2008, S. 62). Diese inhaltsbezogene Kompetenzerwartung aus dem Bereich „Zahlen und Operationen" wird auf jeden Fall in der Grundschule gestellt. Darüber hinaus werden die Kinder bereits auf inhaltsbezogene Kompetenzen der Sekundarstufe I vorbereitet, indem sie mehr oder weniger bewusst die Teiler einer natürlichen Zahl bestimmen (vgl. MSW NRW 2004, S. 20). Zum anderen hat der Forscherauftrag einen problemlösenden und argumentativen Charakter. Die Frage nach allen möglichen Zerlegungsbäumen zu einer bestimmten Startzahl lässt sich nämlich nicht auf Anhieb beantworten. Stattdessen werden sämtliche multiplikativen Zerlegungen zur Startzahl durch zunehmend systematisches sowie zielorientiertes Probieren aufgespürt und deren Vollständigkeit begründet (vgl. MSW NRW 2008, S. 59f). Für die Startzahl 24 gestaltet sich das noch verhältnismäßig einfach:







Je größer und komplexer die Startzahl ist, desto schwieriger kann die Suche nach allen Zerlegungsbäumen werden. Allerdings sollte schon bei der Startzahl 24 darüber diskutiert werden, ob sich die Zerlegungszahlen in jeder Stufe vertauschen lassen und dadurch weitere Möglichkeiten hinzukommen. Man könnte also in diesem Zusammenhang das Kommutativgesetz der Multiplikation thematisieren. Demzufolge bietet der Forscherauftrag ein großes Potenzial zur Entwicklung und Vertiefung von Fachbegriffen. Außerdem lassen sich aus ihm eine Reihe von Folgeaufträgen ableiten, die ebenfalls zur Erarbeitung neuer Begriffe führen können. Beispielsweise könnten die Schülerinnen und Schüler genauer untersuchen, auf welche Zerlegungszahlen die Bäume immer enden und in welcher Beziehung sie zur Startzahl stehen. Damit öffnen die Kinder eine erste Tür zu den Begriffen „Primzahlen" und „Primfaktorzerlegung". Diese und weitere Begriffe werden sozusagen in der prozesshaften

Auseinandersetzung mit den Zerlegungsbäumen entdeckt. Aus diesem Grund können mit ihnen gewisse Vorstellungen verbunden werden. Letztendich sollte man darauf achten, dass man auch die neu entdeckten Begriffe und entwickelten Satzphrasen dem Wortspeicher hinzufügt.

3. Zerlegungsbäume lösen und sichern

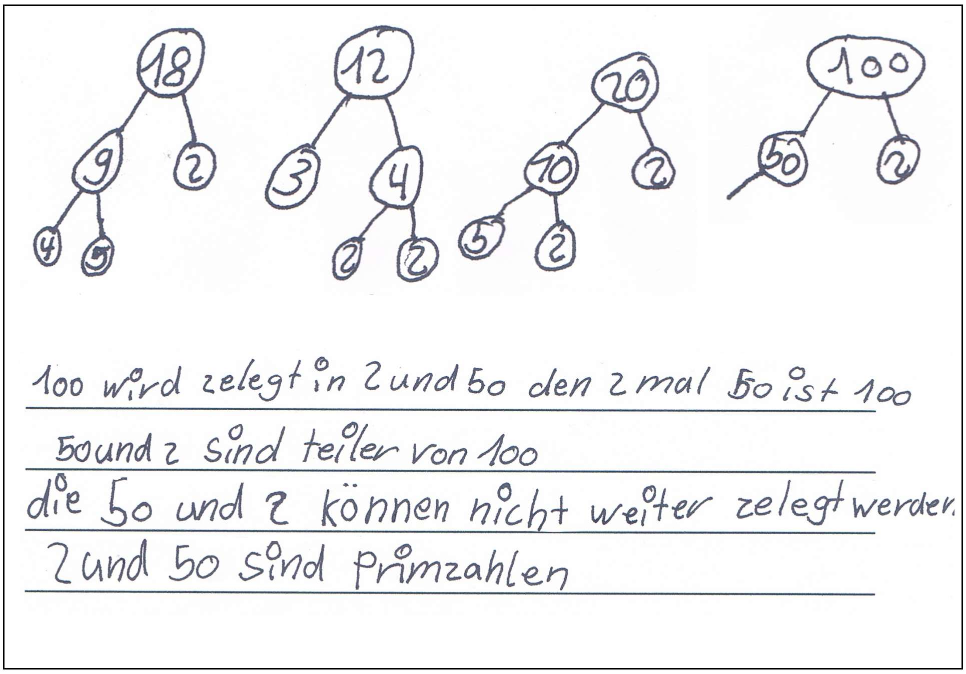
Damit die Lernenden eine gewisse Routine und Sicherheit bei der multiplikativen Zerlegung natürlicher Zahlen entwickeln, ist es von großer Wichtigkeit, dass sie sowohl strukturierte als auch unstrukturierte Übungsaufgaben zu Zerlegungsbäumen bearbeiten. Dabei sollte der Wortspeicher so oft wie nur möglich zum Einsatz kommen, da er zentrale Fachbegriffe und Satzphrasen beinhaltet, die nicht nur das Lösen der Aufgaben unterstützen, sondern auch fachsprachlich korrekte mündliche sowie schriftliche Beschreibungen anregen. Solche Beschreibungen werden regelmäßig benötigt, wenn es um das Darstellen von Lösungsprozessen oder um das Begründen von mathematischen Zusammenhängen geht. Der zuvor betrachtete Forscherauftrag hat die zentrale Rolle von Beschreibungsmitteln bei der multiplikativen Zerlegung von Zahlen bereits deutlich gemacht. Die Forscheraufträge dienen aber eher der Entwicklung und Vertiefung von Fachbegriffen. Für kürzere Trainingseinheiten eignen sie sich meistens weniger. Folgende Beispiele zeigen Möglichkeiten für kurze Übungsphasen auf, die einen Beitrag zur Routine und Sicherheit leisten:

- Es können einige ***Zerlegungsbäume mit Zahlenlücken*** versehen werden. Die Aufgabe der Schülerinnen und Schüler besteht nun darin, entweder nur die fehlenden Zerlegungszahlen zu finden oder darüber hinaus grundsätzlich die Lösbarkeit der lückenhaften Zerlegungsbäume zu klären. Wenn sie zusätzlich die Lösbarkeit beantworten sollen, dann benötigen sie wieder passende Fachwörter und Satzphrasen, die sie dem Wortspeicher entnehmen können. „Teiler“ und „Primzahlen“ sind Beispiele für entsprechende Fachwörter. Hilfreiche Satzphrasen können beispielsweise „...ist Teiler von...“ oder „...lässt sich in... und...zerlegen“ sein.
- Es werden einige Startzahlen vorgegeben – zum Beispiel 6, 12, 18 und 30. Die Schülerinnen und Schüler finden nun zu diesen Startzahlen jeweils einen passenden Zerlegungsbaum. Jedoch sollen sie die Zerlegungsbäume nicht willkürlich ausrechnen. Vielmehr werden sie dazu ermuntert, einen ***Zusammenhang zwischen den Startzahlen*** zu erkennen und diesen für das Ausrechnen der Zerlegungsbäume auszunutzen. So ist jede Startzahl des genannten Beispiels ein Vielfaches von 6. Demzufolge lassen sich alle Zerlegungsbäume aus dem Baum mit der Startzahl 6 ableiten. Der Zusammenhang und das daraus resultierende Vorgehen können beschrieben werden, weshalb sich der Einsatz des Wortspeichers erneut lohnt.

Man hat es also mit kleineren Trainingsaufgaben zu tun, von denen die erste dem unstrukturierten und die zweite dem strukturierten Üben zuzuordnen ist. Mit ihrer Hilfe kann man die inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen zur multiplikativen Zerlegung von natürlichen Zahlen schnell diagnostizieren. In diesem Kontext ist zum Beispiel der *Mathebriefkasten* eine ideale Methode, um sich einen raschen Eindruck von den bisherigen Leistungen der Kinder zu verschaffen. Im Haus 9 der PIKAS-Website erhalten Sie unter http://pikas.dzlm.de/172 genauere Informationen zu dieser Methode. Zudem finden Sie im Haus 2 weitere Übungsaufgaben zum Lösen und Sichern von Zerlegungsbäumen.

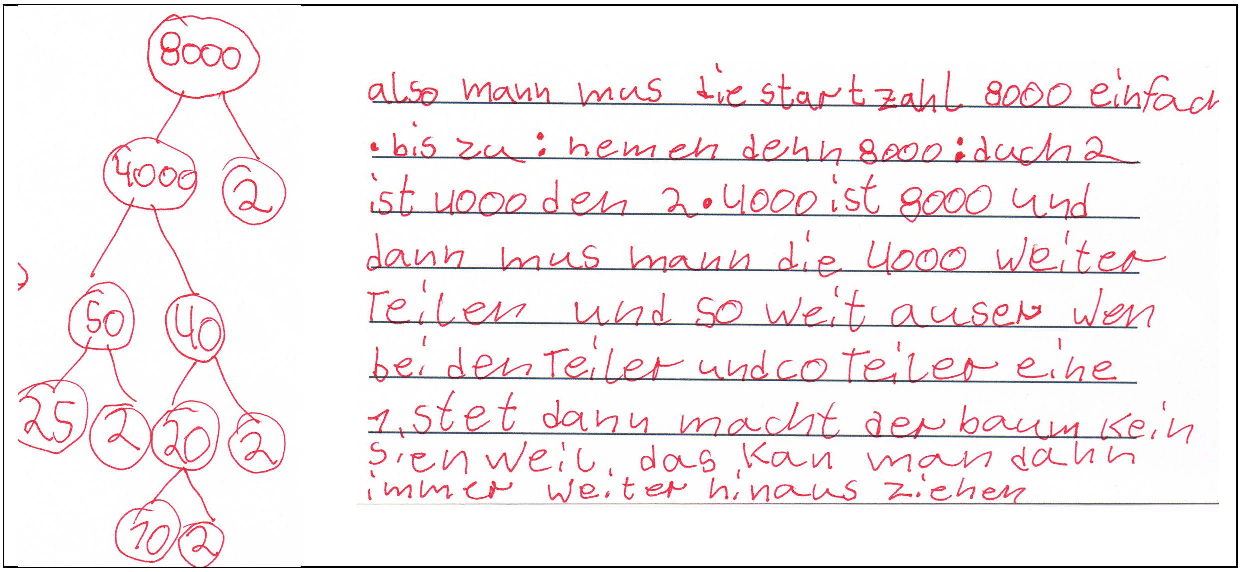
Zu guter Letzt sollte man mit den Schülerinnen und Schülern noch eine Abschlussstandortbestimmung durchführen, die deckungsgleiche Elemente der Kennenlernphase enthält. Dadurch werden die Kompetenzen des einzelnen Lernenden, die sich zu Beginn und am Ende der Auseinandersetzung mit den Zerlegungsbäumen zeigten, miteinander vergleichbar. Wir als Lehrpersonen können demnach bei jedem Kind eine Leistungsentwicklung ausmachen. Das ist bei David und Nadja ebenfalls möglich. Sie erfinden jetzt beide mehrstufige sowie komplexere Zerlegungsbäume und ihre Vorgehensbeschreibungen wirken viel sicherer als noch zu Beginn der Interviewstudie. Sie verwenden nun häufiger Fachwörter und Satzphrasen aus dem Wortspeicher. Diese können sie zu nachvollziehbaren Texten verknüpfen.

Zerlegungsbäume und Beschreibung von Abbas (4. Klasse):



Abbas ist nun in der Lage, auch zweistufige Zerlegungsbäume zu produzieren. Er zerlegt die Zahlen kaum noch additiv. Zudem macht er durchaus von der Fachsprache korrekt Gebrauch. Die 50 identifiziert er jedoch als Primzahl. Er konzentriert sich vermutlich auf die Zehnerstelle 5.

Zerlegungsbäume und Beschreibung von Xara (4. Klasse):



Xara wählt eine sehr große Startzahl und erhält dadurch einen Zerlegungsbaum, der aus vielen Stufen besteht. Die meisten Teiler wurden auch korrekt von ihr ermittelt. Ihre dazugehörige Beschreibung enthält zwar fachsprachlich richtige Elemente, muss allerdings mithilfe des Wortspeichers weiter ausgebaut werden.

Zusammenfassung

Bei den Zerlegungsbäumen handelt es sich um ein grundlegendes Aufgabenformat, mit dessen Hilfe zentrale Begriffe der Division über mehrere Schuljahre hinweg erarbeitet werden können. Die hier vorgestellten Aufgabenbeispiele lassen sich nämlich so modifizieren, dass sie von der dritten bis hin zur sechsten Klassen einsetzbar sind. Je nach thematischer Ausrichtung wäre es sogar denkbar, die Zerlegungsbäume auch in höheren Jahrgangsstufen einzusetzen. Denn im Prinzip kommen die Kinder bereits frühzeitig mit zahlentheoretischen Grundlagen in Kontakt, mit denen sich Studierende in der Hochschulmathematik beschäftigen. Aber natürlich werden die Kinder nicht mit komplizierten Inhalten aus der Hochschule erschlagen, sondern sie können gemäß ihrer eigenen Niveaus interessante mathematische Entdeckungen machen. Dieser kontinuierliche Einsatz des Aufgabenformats wird nicht allein dadurch gewährleistet, dass die Schülerinnen und Schüler Zerlegungsbäume mit immer komplexer werdenden Zahlen ausrechnen müssen. Vielmehr sollten sie sich zudem mit herausfordernden Aufgabenstellungen auseinandersetzen, die inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen gleichermaßen fördern und fordern. Hinsichtlich des Kompetenzaufbaus sollte also ebenfalls eine langfristige Perspektive eingenommen werden. Die Zerlegungsbäume greifen diese Perspektive auf, weil mithilfe eines solchen Aufgabenformats schon in der Grundschule ein Verständnis zu den Bausteinen der natürlichen Zahlen grundgelegt wird, auf das sich der Mathematikunterricht der Sekundarstufe I beziehen kann.

Kompetenzerwartung am Ende der Klasse 4	**Kompetenzerwartung am Ende der Klasse 6**
„Die SuS entdecken Beziehungen zwischen einzelnen Zahlen und in komplexen Zahlenfolgen und beschreiben diese unter Verwendung von Fachbegriffen (z.B. ist Vorgänger / Nachfolger von, ist Nachbarzehner / Nachbarhunderter von, ist die Hälfte / das Doppelte von, ist Vielfaches / ***Teiler von***).“ (MSW NRW 2008, S. 59)	„Die SuS bestimmen ***Teiler*** und Vielfache natürlicher Zahlen und wenden ***Teilbarkeitsregeln*** für 2, 3, 5, 10 an.“ (MSW NRW 2004, S. 20)

Literatur

Büchter, Andreas (2014): *Das Spiralprinzip, Begegnen – Wiederaufgreifen – Vertiefen*, in: Mathematik lehren 182, S. 2-9.

Ehlert, Antje / Fritz, Annemarie / Arndt, Dominique / Leutner, Detlev (2013): *Arithmetische Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern in den Klassen 5 bis 7 der Sekundarstufe*, in: Journal für Mathematik-Didaktik 34, S. 237-263.

Krauthausen, Günter / Scherer, Petra (2014): *Einführung in die Mathematikdidaktik*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.

Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes NRW (2004): *Kernlehrplan für die Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen, Mathematik*, Ritterbach Verlag, Frechen.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW (2008): *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen*, Ritterbach Verlag, Frechen.

Padberg, Friedhelm (2009): *Didaktik der Bruchrechnung*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

Padberg, Friedhelm / Büchter, Andreas (2015): *Vertiefung Mathematik Primarstufe – Arithmetik / Zahlentheorie*, Springer Verlag, Berlin / Heidelberg.

Prediger, Susanne / Dirks, Thorsten / Kersting, Julia (2009): *Wer zerlegt zuletzt? Spielend die Primfaktorzerlegung erkunden*, in: Praxis der Mathematik in der Schule 51 (25), S. 10-14.

Robinson, Katherine / Dubé, Adam K. (2008): *A Microgenetic Study of Simple Division*, in: Canadian Journal of Experimental Psychology 62 (3), S. 156-162.

Selter, Christoph (1997): *Eigenproduktionen statt Fertigprodukt Mathematik!*, in: Die Grundschulzeitschrift 110, S. 6-11.

Winter, Heinrich (2001): *Mensch und Maß – Ein kurzes Kapitel leiblicher Mathematik*, in: Die Grundschulzeitschrift 141, S. 46-49.

Quelle der Schülerdokumente

Klimek, K. (2017): *Analyse einer sprach- und fachintegrierten Förderung des Teilerverständnisses von Viertklässlern*, Unveröffentlichte Masterarbeit TU Dortmund.

Platz für eigene Notizen

Darum geht es:
Um Zahlen multiplikativ zerlegen zu können, benötigen Schülerinnen und Schüler ein ausreichendes Verständnis der Division. Bei der entsprechenden Zerlegung von Zahlen zeigt sich die die Abhängigkeit der Multiplikation und Division voneinander (Umkehroperation).
Zerlegungsbäume ermöglichen ein schnelles Gewinnen von Zerlegungen, bieten aber auch eine übersichtliche Darstellung mit dem Potenzial, Strukturen aufzudecken zu beschreiben und damit weiterzuarbeiten. So bietet sich durch den Einsatz von Zerlegungsbäumen die Förderung inhaltsbezogener und prozessbezogener Kompetenzen an.

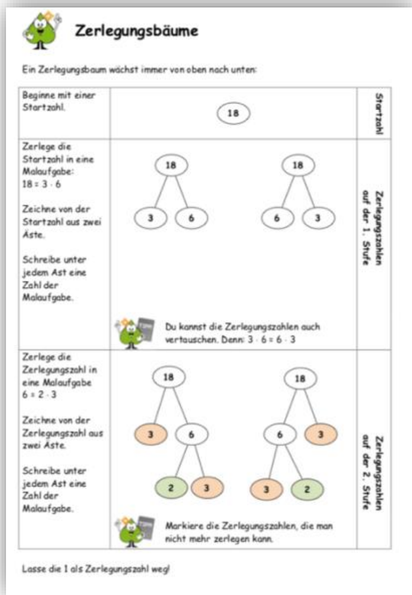
MSW Lehrplan Mathematik 2008

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
<u>Kompetenzerwartungen nach Klasse 4</u> Die SuS entdecken Beziehungen zwischen einzelnen Zahlen und in komplexen Zahlenfolgen und beschreiben diese unter Verwendung von Fachbegriffen (z.B. ist Vorgänger / Nachfolger von, ist Nachbarzehner / Nachbarhunderter von / ist die Hälfte / Das doppelte von, ist Vielfaches von / Teiler von)."	Sind den jeweiligen Phasen des Unterrichtsvorhabens/ Aufgabenstellungen zugeordnet

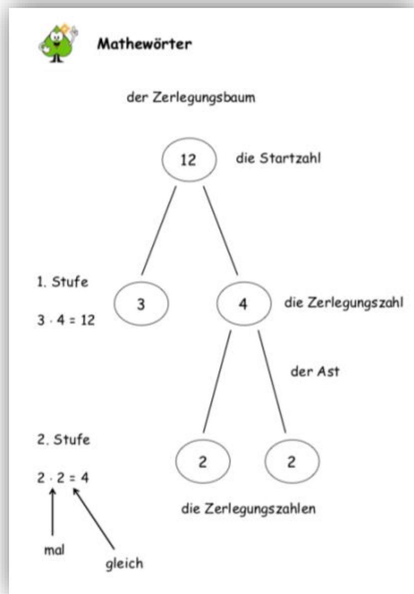
Einstieg: Zerlegungsbäume kennenlernen

In einem gemeinsamen Einstieg klärt die Lehrperson mit den Kindern den Aufbau und die mathematischen Hintergründe der Zerlegungsbäume. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, wo sich in einem Zerlegungsbaum Startzahl und Zerlegungszahlen befinden und wie diese zueinander in Beziehung stehen. Dabei hilft das Regelplakat.
Bereits in dieser Phase beginnt sinnvollerweise die Wortspeicherarbeit. Zum einen kann das Vokabular den Verständnisprozess über die Strukturen von Zerlegungsbäumen unterstützen (Wo wird begonnen (Start). Wie entstehen weitere Äste (Zerlegung), Begriffe wie „mal" und „geteilt" usw.). Zum anderen ist ein Fachvokabular notwendig, um sich bereits von Beginn an über Elemente oder Aspekte von Zerlegungsbäumen austauschen zu

können. Darüber hinaus verdeutlicht ein bestehender Wortspeicher immer auch eine Verbindlichkeit von fachbezogener Sprache, die im Unterricht einzusetzen ist.
In dieser frühen Phase des Prozesses wird der Wortspeicher allerdings nur reduziert, mit den notwendigsten Begriffen, gefüllt. Weitere Begrifflichkeiten und/ oder Beziehungen werden im weiteren Lernprozess mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam erarbeitet und ergänzt.



Regelplakat Teil 1



Mathewörter Teil 1

Für den weiteren Verlauf sind zwei Varianten denkbar:

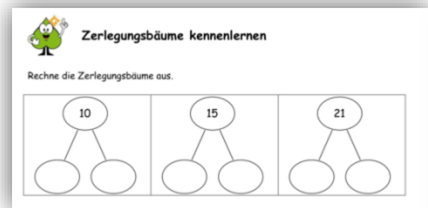
Variante A:	Variante B:
Zerlegungsbäume näher kennenlernen durch Ausrechnen mit vorgegebenen Zahlen.	Mit der Aktivität „Wer legt zuletzt“ die Zerlegungsbäume kennenlernen.

Variante A: Zerlegungsbäume ausrechnen.

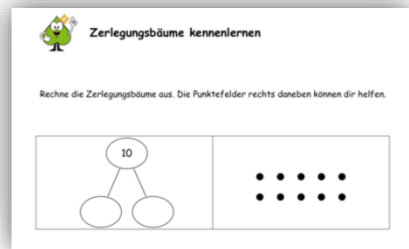
Beim Ausrechnen von Zerlegungsbäumen wird den Kindern zunächst ein Gerüst an die Hand gegeben, mit dem Sie die Zerlegungsbäume bearbeiten können. Dabei sind neben Startzahl auch Äste und nötige Felder für Zerlegungszahlen vorgegeben. An diese Aufgaben schließen sich Eigenproduktionen an – das sind in diesem Fall Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler ihre Startzahlen selbst bestimmen und eigene Zerlegungsbäume erfinden und beschreiben. (Diese Aufgabe wird zum Abschluss des Unterrichtsvorhabens ein weiteres Mal gestellt und ermöglicht so einen guten Überblick über erworbene Kompetenzen.)

Eigenproduktionen regen die Schülerinnen und Schüler dazu an, mit selbst gewähltem Zahlenmaterial selbst den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe mitzubestimmen. Dies ermöglicht der Lehrperson in diesem Beispiel einen Einblick, inwieweit die Lernenden auch größere und komplexere Zahlen multiplikativ zerlegen können. Beschreibungen der Kinder ermöglichen einen weiteren Einblick in Vorgehensweisen und Gedanken der Kinder (Prozessbezogene Kompetenz: Darstellen/ Kommunizieren).

Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten haben multiplikative Zerlegungen von Zahlen auf rein formaler Ebene herzustellen, können alternativ eine Veranschaulichung in Form von Punktmustern erhalten. Diese sollten allerdings nicht als selbsterklärend verstanden werden, können aber unterstützend eingesetzt werden, wenn Kinder multiplikative Darstellungen dieser Art bereits kennengelernt und verstanden haben.
Die Verknüpfung der formalen mit der bildlichen Darstellungsebene gibt der Lehrperson ggf. auch noch einmal Aufschluss über den Lernstand des Kindes. Schülerinnen und Schüler können ggf. durchaus Zerlegungsbäume lösen, wenn sie die Aufgaben des Einmaleins automatisiert haben. Allerdings ist zu beachten, dass die Fähigkeit die Bäume lösen zu können nicht notwendiger Weise einen Aufschluss über ein Verständnis zur Multiplikation und multiplikativen Zerlegungen gibt, denn SuS können Zerlegungsbäume auch mithilfe auswendig gelernter Aufgabensätze lösen. Über ihr Verständnis zur Multiplikation und multiplikativen Zerlegungen muss dies nicht notwendigerweise Aufschluss geben. Insofern stellt die Erweiterung der Aufgabenstellung durch Hinzunahme einer weiteren Darstellungsebene (Punktmuster) eine Unterstützung wie auch neue Herausforderung dar.



Zerlegungsbäume ausrechnen - formal



Zerlegungsbäume ausrechnen - gestützt

Variante B: Spiel: „Wer zerlegt zuletzt?“

Das Spiel stellt einen alternativen Weg zum Kennenlernen von Zerlegungsbäumen dar.

Dabei regt diese Form bereits intensiver dazu an, sich über Strukturen der Zerlegungsbäume Gedanken zu machen. Schülerinnen und Schüler können herausgefordert werden, Startzahlen bewusst zu wählen, um ihre Gewinnchancen zu erhöhen. Diese gemeinsamen Spiel- und Lernanlässe bieten zudem bereits in einer frühen Phase des Unterrichtvorhabens das Potenzial, dass der Wortspeicher zum gemeinsamen Austausch von den Schülerinnen und Schülern eingesetzt wird.
Dabei können die Spieler untereinander in den Austausch kommen, aber auch Überlegungen innerhalb der Klasse können Strukturen und Spielstrategien zu ertragreichen Gesprächen führen, die neben inhaltlichen Aspekten auch prozessbezogene Kompetenzen wie Kommunizieren und Darstellen oder Problemlösen (z.B. bei der sich ergebenden Fragestellung: Welche Zahl muss ich wählen, um zu gewinnen?) herausfordern und fördern.


Wer zerlegt zuletzt?

Ein Spieler nennt eine Startzahl. Zum Beispiel 48. Er notiert sie als Startzahl des Zerlegungsbaums.

Der zweite Spieler zerlegt diese Zahl genau einmal. Er zeichnet also die erste Stufe des Zerlegungsbaums.

Der erste Spieler führt den Zerlegungsbaum genau einmal weiter.

Jetzt muss der zweite Spieler den Zerlegungsbaum weiterführen.

Und so weiter...

Gewonnen hat der Spieler, der zuletzt zerlegt!

Spiel; Wer zerlegt zuletzt?

Zerlegungsbäume erforschen

Das Dividieren und ermitteln von Teilern ist auf inhaltlicher Ebene zentraler Bestandteil des Unterrichtsvorhabens. Zudem soll neben inhaltlichen Aspekten im Folgenden ein Schwerpunkt auf dem Erforschen der Zerlegungsbäume liegen. Dabei werden die Schülerinnen und Schüler weiterhin ihre Fähigkeiten des Dividierens vertiefen. Das alleinige Trainieren der Rechenfertigkeiten ist allerdings nicht ausreichend und soll daher, mehr noch als bereits beim Kennenlernen der Zerlegungsbäume, um die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen erweitert werden. Dazu werden Aufgabenstellungen zu Zerlegungsbäumen bearbeitet, die das Problemlösen, Argumentieren sowie das Darstellen/Kommunizieren anregen. Diese werden als Forscheraufträge formuliert.

Alle Forscheraufträge haben meist einen problemlösenden und argumentativen Charakter. Die Aufforderung zu begründen ist, je nach Erfahrungsstand der Kinder, eine beachtliche Herausforderung. Daher ist es wichtig,

Schülerinnen und Schülern viele Möglichkeiten zu geben, Behauptungen und Erkenntnisse zu begründen. Erst im Verlauf der Grundschulzeit werden sie sicherer und präziser in ihren Begründungen insbesondere auch dann, wenn ihnen ein adäquater Wortspeicher zum Beschreiben und begründen zur Verfügung steht. Daher sind in dieser Phase die Nutzung und ggf. Weiterentwicklung des Wortspeichers weiterhin von großer Bedeutung.
Für das Begründen kann der Wortspeicher zudem um Satzphrasen erweitert werden, die den Schülerinnen und Schülern als sprachliches Gerüst dienen können, mit denen Sie ihre Gedanken strukturiert und für andere Kinder verständlich formulieren können (siehe Mathewörter Teil 2).

Hinweise zu den Forscheraufträgen

Für alle Forscheraufträge ist es hilfreich bzw. notwendig, sie selbst vorab auszuführen – im Beispiel von Forscherauftrag 1 sich z.B. eine Liste oder eine Übersicht mit den möglichen Zerlegungsbäumen anzulegen. So ist man für ein Gespräch mit den Schülerinnen und Schülern inhaltlich gut vorbereitet und hat Hürden, die von den Schülern zu nehmen sind, ggf. bereits selbst genommen, kann diese besser nachvollziehen und Unterstützung anbieten.

Forscherauftrag 1
Grundsätzlich kann man sagen, je größer und komplexer (bzgl. der Primfaktorzerlegung der Zahl) die Startzahl ist, desto schwieriger kann sich die Suche nach allen Zerlegungen gestalten.
Dabei wird auch die Frage zu diskutieren sein, ob sich die Zerlegungszahlen in jeder Stufe vertauschen lassen sollen und dadurch zusätzliche Zerlegungsbäume hinzukommen oder ob diese Variationen als gleiche bzw. nicht neue Möglichkeiten betrachtet werden.
Diese Gesprächsanlass bietet sich an, um das Kommutativgesetz gemeinsam in den Blick zu nehmen.


Forscherauftrag

Piko hat einen Zerlegungsbaum mit der Startzahl 24 gefunden:

Finde möglichst viele verschiedene Zerlegungsbäume mit der Startzahl 24.
Zeichne jeden Zerlegungsbaum auf eine Karte.

Wie gehst du vor? Erkläre dein Vorgehen einem anderen Kind.

Sortiert eure Zerlegungsbäume.
Wie könnt ihr den anderen Kindern zeigen, dass ihr alle Zerlegungsbäume gefunden habt?

FA1: Zerlegungsbäume zu einer Startzahl finden

Bei den Tippkarten gilt ähnliches wie bereits oben beschrieben. Die zusätzliche Darstellungsebene kann unter bestimmten Voraussetzungen als Hilfestellung angesehen werden.

Der Folgeauftrag zielt darauf ab, Begriffe wie Teiler (Endzahlen sind Teiler der Startzahl) oder Primzahlen (Zahlen, die keine weiteren Teiler außer der eins und sich selbst haben) in den Blick zu nehmen.

Forscherauftrag 2

Hier besteht ein Unterschied zu vielen anderen kombinatorischen Aufgaben, die die Schülerinnen und Schüler ggf. aus anderen Kontexten kennen. Daher bietet dieser Forscherauftrag eine authentische Fragestellung an, die in diesem Fall nach entsprechender Untersuchung mit der entsprechenden Begründung zu widerlegen ist.

Einfache und sehr anschauliche Beispiele, dass nicht die Größe der Zahl, sondern die Anzahl der Teiler von Bedeutung ist, sind hierbei Quadratzahlen aus Primzahlen (5x5, 7x7,13x13, etc.)

Forscherauftrag

Piko vermutet:

Findet jeweils für die Startzahlen 2 bis 13 alle möglichen Zerlegungsbäume. Findet also alle Zerlegungsbäume mit der Startzahl 2, alle mit der Startzahl 3, und so weiter.

Tragt in die Tabelle ein, wie viele Zerlegungsbäume jede Startzahl hat.

Stimmt ihr Pikos Vermutung zu oder nicht? Begründet.

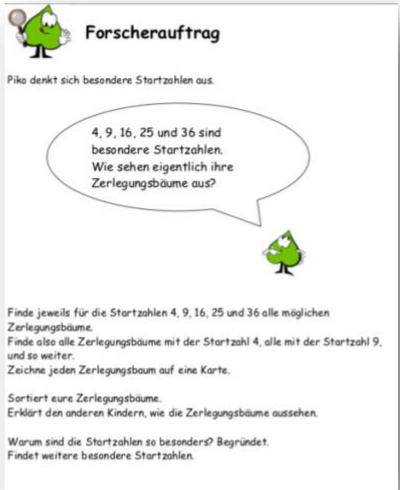
FA2: Je größer die Startzahl, desto größer der Zerlegungsbaum?

Die Tippkarten und Folgeaufträge zielen wieder auf die Thematisierung von Primzahlen ab und können hier im Rahmen von Festigung der Fachsprache zentraler Bestandteil des Forscherauftrags werden.

Insgesamt wird hier deutlich, dass die Forscheraufträge zu diesem Format (Zerlegungsbäume) den Schülerinnen und Schülern viele (inhaltliche) Übungsanlässe ermöglichen, dabei außerdem viel über Strukturen von Zahlen erfahren werden kann und zudem die Möglichkeit gegeben wird, prozessbezogenen Kompetenzen zu erweitern.

Forscherauftrag 3

Im 3. Forscherauftrag werden die Zerlegungsbäume von 2er Potenzen in den Blick genommen. Neben der Tatsache, dass bei 2er Potenzen die Endzahlen immer 2 sind (Primfaktorzerlegung besteht nur aus zweien), ist zu entdecken, dass die Zerlegungsbäume der kleineren 2er Potenzen immer in den Zerlegungsbäumen größerer 2er Potenzen wiederzufinden sind.



FA3: Zerlegungsbäume mit besonderen Startzahlen?

FA4: Start und Zerlegungszahlen zu leeren Zerlegungsbäumen finden

Forscherauftrag 4

Um verschiedene Startzahlen zu produzieren, können Zerlegungsbäume durch Auswahl verschiedener Endzahlen (Primfaktorzerlegungen) entstehen, die dann von unten nach oben miteinander multipliziert werden. Da die Primfaktorzerlegung jeder Zahl bis auf die Anordnung der Primfaktoren (Endzahlen) eindeutig ist, entstehen so immer neue Startzahlen. Auch die Umkehrbarkeit der Division (und Multiplikation) kann hier in den Fokus genommen werden. Außerdem kommt die Strategie des Rückwärtsarbeiten, die auch in anderen Kontexten wieder aufgegriffen werden kann zum Einsatz.

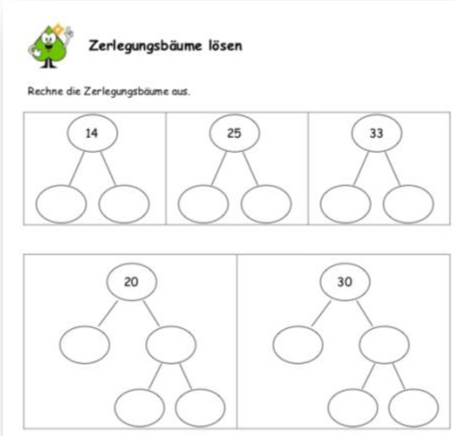
Zerlegungsbäume lösen und sichern

Die folgenden Übungen ermöglichen den Lernenden zunehmend mehr Routine und Sicherheit bei der multiplikativen Zerlegung natürlicher Zahlen zu entwickeln. Dazu werden unstrukturierte Übungsaufgaben und strukturierte Übungsaufgaben (dabei stehen die Aufgaben in einem übergeordneten Zusammenhang) eingesetzt. Dem Wortspeicher kommt in dieser Phase des Unterrichts weiterhin eine zentrale Bedeutung zu. Hier kann über korrektives Feedback immer wieder auch deutlich gemacht werden, dass gemeinsame Fachsprache verbindlich von Lehrkräften sowie Schülerinnen und Schülern einzusetzen ist. Insbesondere beim Beschreiben und Begründen stellt die Fachsprache ein wesentliches Mittel für eine präzise und verständliche Kommunikation dar.

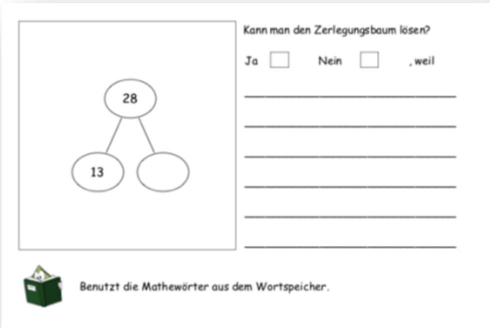
Unstrukturierte Übungen:

Bei unstrukturierten Übungen sind im Gegensatz zu strukturierten Übungen die Aufgaben nicht durch einen übergeordneten Strukturzusammenhang aufeinander bezogen. Unstrukturierte Übungen sind insbesondere dann einsetzbar, wenn es zunächst darum geht ein Aufgabenformat kennenzulernen und erste Erfahrungen damit zu sammeln.

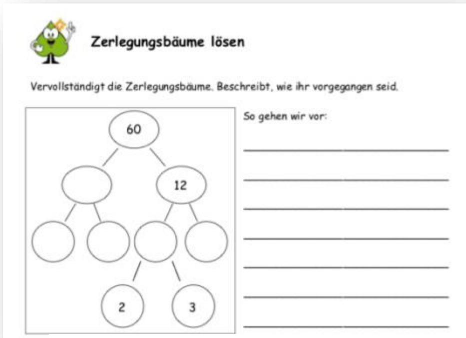
Neben dem Üben inhaltlicher Fähigkeiten steht der Wortspeicher beim Austausch über Lösungen, Vorgehensweisen immer im Fokus und kann an dieser Stelle durchaus auch durch weitere Begriffe und Satzphrasen ergänzt (siehe Beispiel)werden. Insbesondere Beschreibungen von Vorgehensweisen oder Begründungen fordern die oben bereits beschriebenen prozessbezogenen Kompetenzen heraus und erfordern das Anwenden einer entsprechenden Fachsprache.



AB1: Zerlegungsbäume mit vorgegebenen Startzahlen



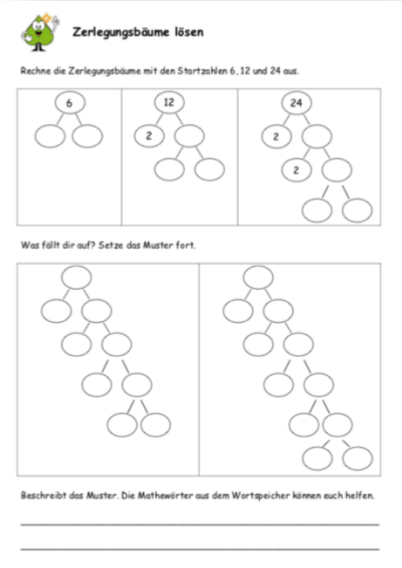
AB2: Lösbare und nicht lösbare Zerlegungsbäume



AB3: Zerlegungsbäume vervollständigen

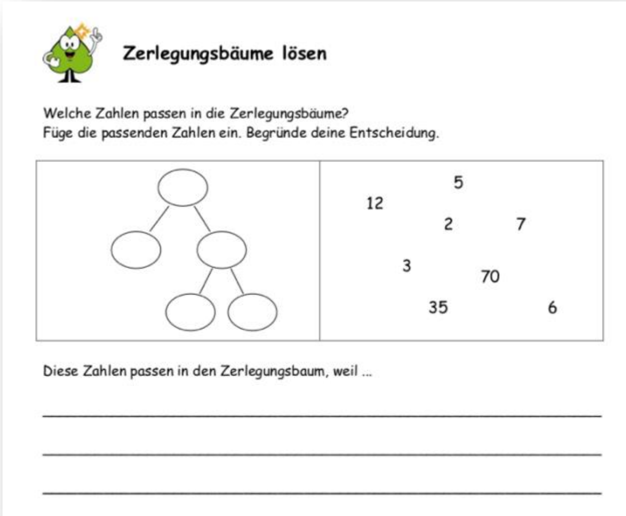
<u>Strukturierte Übungen:</u>

Auch bei den strukturierten Übungen werden inhalts- sowie prozessbezogene Kompetenzen gefördert. Mit Impulsen, die dazu anregen die Strukturen der Zerlegungsbäume in den Blick zu nehmen, werden Strukturen deutlich, die auf alle Zerlegungsbäume anwendbar und zum Lösen der Aufgaben notwendig sind. Zum anschließenden Beschreiben und Begründen der entdeckten Muster stellt der Wortspeicher wieder ein bedeutendes Mittel zum gemeinsamen Kommunizieren und verständlichen Darstellen von Strukturen in Zerlegungsbäumen dar.



AB4: Muster in Zerlegungsbäumen entdecken und beschreiben.

Während bei AB 4 das Beschreiben von Entdeckungen im Vordergrund steht (Was fällt dir auf?), geht es bei AB 5 unter anderem auch um das Begründen, beispielsweise, wie und warum die Startzahl sofort ermittelt werden kann (die größte Zahl muss die Startzahl sein) oder welche Zahlen die Endzahlen sind (Endzahlen sind immer Primzahlen).



AB5: Leere Zerlegungsbäume mit vorgegebenen Zahlen füllen.

Abschlussstandortbestimmung

Die bereits zu Beginn des Unterrichtsvorhabens eingesetzte Eigenproduktion, die zu Beginn Aufschluss darüber geben konnte, auf welchem Lernstand sich die Kinder befinden, kann nun zum Abschluss ein weiteres Mal eingesetzt werden. Durch die Offenheit bietet sie den Schülerinnen und Schülern nun die Möglichkeiten ihre erweiterten Kompetenzen zur Bearbeitung der Aufgabe zu nutzen und zu zeigen. Dadurch, dass die Aufgabe sich mit der Aufgabe der Eingangsstandortbestimmung deckt, können Lehrkräfte wie auch Schülerinnen und Schüler einen direkten Einblick in die erweiterten Kompetenzen erhalten.


Zerlegungsbäume sichern

Erfinde eigene Zerlegungsbäume. Male wie Piko.

Erkläre einem anderen Kind, wie du in einem Zerlegungsbaum rechnen musst.

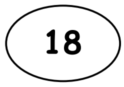
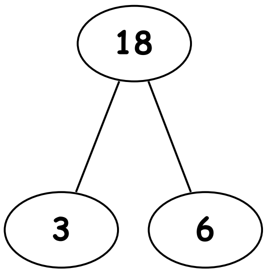
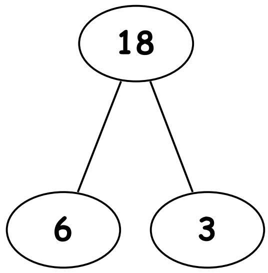
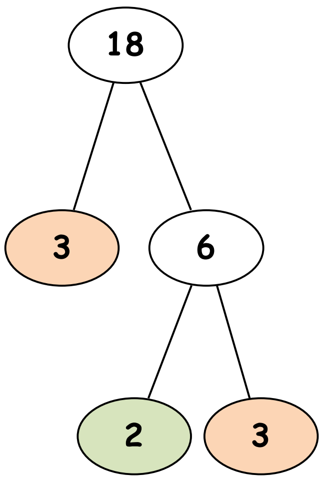
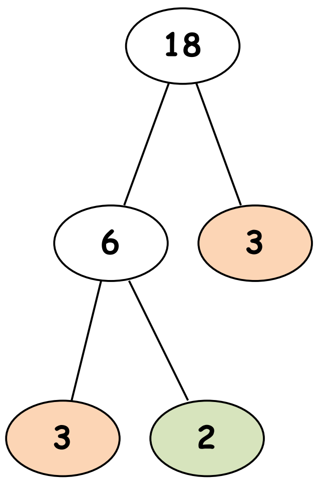
Zerlegungsbäume erfinden und beschreiben - Teil 2

Folgende und ähnliche Fragen können dabei helfen sich über Fähigkeiten einzelner Schülerinnen und Schüler klar zu werden:
Inwieweit kann eine Schülerin / ein Schüler...

- Zerlegungsbäume zu beliebigen Zahlen erstellen?
- beschreiben, wie beim Erstellen eines Zerlegungsbaums vorzugehen ist?
- verstehen und/ oder beschreiben was ein Teiler/ eine Primzahl ist?
- Fachsprache zum Beschreiben und Begründen von mathematischen Sachverhalten zu Zerlegungsbäumen adäquat einsetzen?
- Strukturen von Zerlegungsbäumen zum lösen von unvollständigen Zerlegungsbäumen (und anderen problemhaltigen Formaten) nutzen?

Zerlegungsbäume

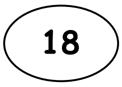
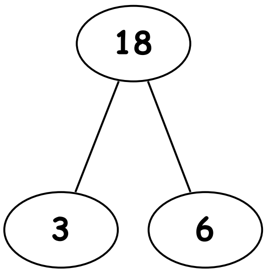
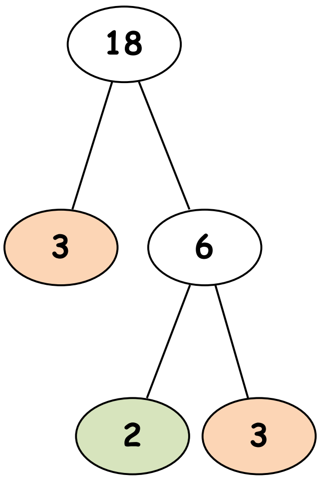
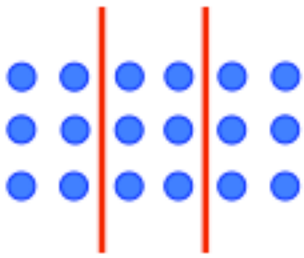
Ein Zerlegungsbaum wächst immer von oben nach unten:

Beginne mit einer Startzahl.		Startzahl
Zerlege die Startzahl in eine Malaufgabe: 18 = 3 · 6 Zeichne von der Startzahl aus zwei Äste. Schreibe unter jedem Ast eine Zahl der Malaufgabe.	  TIPP! Du kannst die Zerlegungszahlen auch vertauschen. Denn: 3 · 6 = 6 · 3	Zerlegungszahlen auf der 1. Stufe
Zerlege die Zerlegungszahl in eine Malaufgabe 6 = 2 · 3 Zeichne von der Zerlegungszahl aus zwei Äste. Schreibe unter jedem Ast eine Zahl der Malaufgabe.	  TIPP! Markiere die Zerlegungszahlen, die man nicht mehr zerlegen kann.	Zerlegungszahlen auf der 2. Stufe

Lasse die 1 als Zerlegungszahl weg!

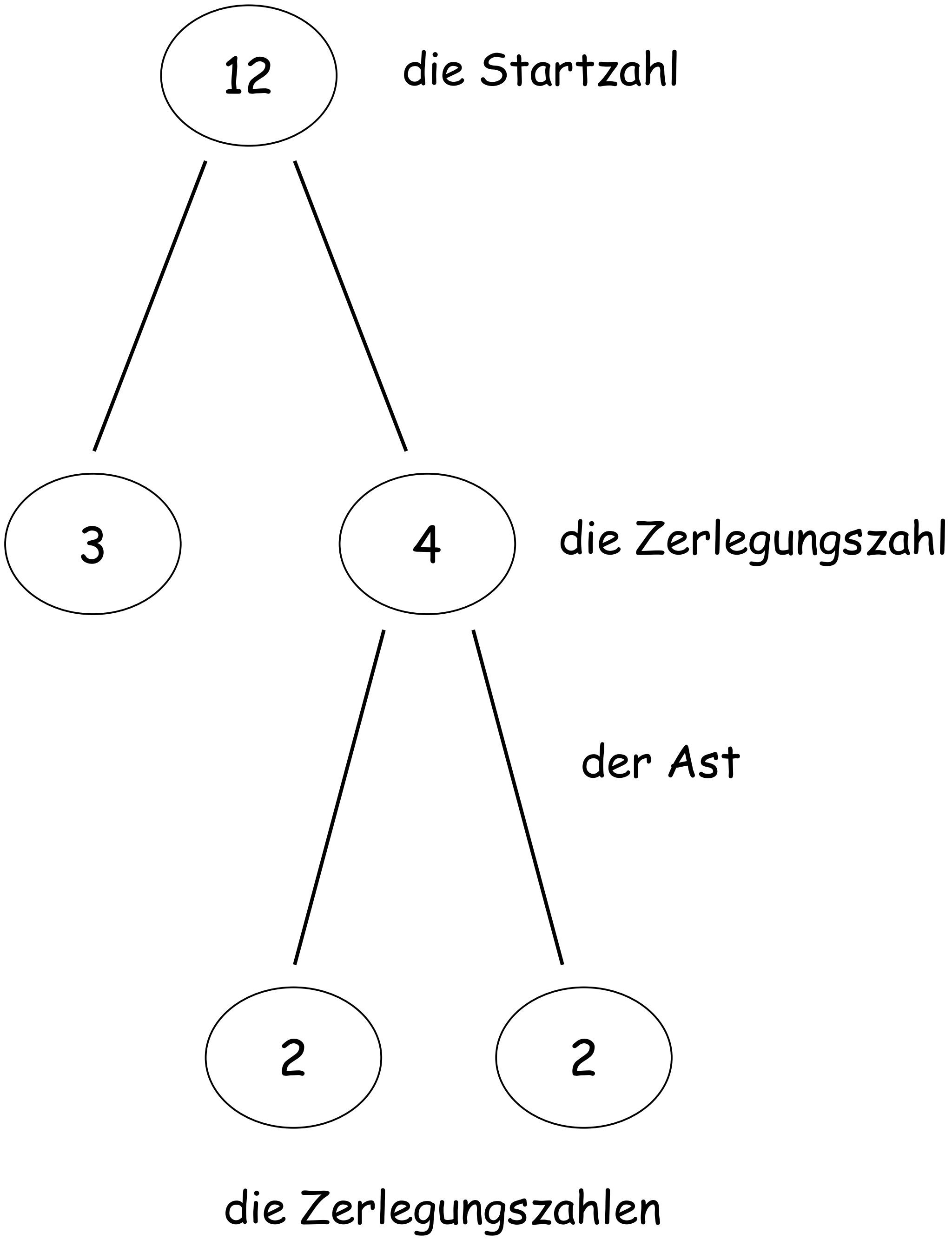
Zerlegungsbäume

So kannst du einen Zerlegungsbaum mit Punktefeldern verstehen:

Startzahl	 	Hier siehst du 18 Punkte.
Zerlegungszahlen auf der 1. Stufe	  Kippe das Rechteck auf die Seite. Wie viele Reihen mit Punkten hast du jetzt? 	Verteile die 18 Punkte **<u>gleichmäßig</u>** auf 3 Reihen. In jeder Reihe sind 6 Punkte. Du hast also ein Rechteck mit 3 · 6 Punkten. Es hat 3 Reihen und in jeder Reihe sind 6 Punkte.
Zerlegungszahlen auf der 2. Stufe	  Die kleineren Rechtecke müssen gleich aussehen. Achte beim Zerlegen darauf. 	Zerlege das Rechteck in 3 kleinere, **<u>gleich große</u>** Rechtecke. Jedes kleine Rechteck hat 2 Spalten. In jeder Spalte sind 3 Punkte. Ein kleines Rechteck hat also 2 · 3 Punkte.

Mathewörter

der Zerlegungsbaum



1. Stufe

$3 \cdot 4 = 12$

2. Stufe

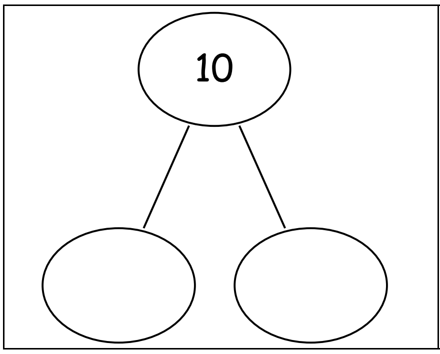
$2 \cdot 2 = 4$

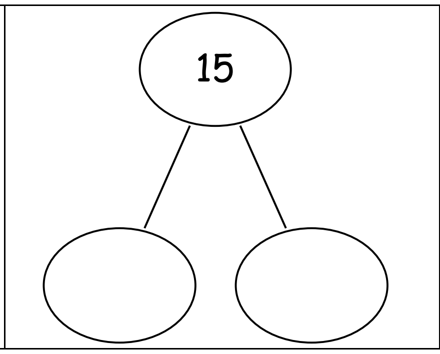
mal

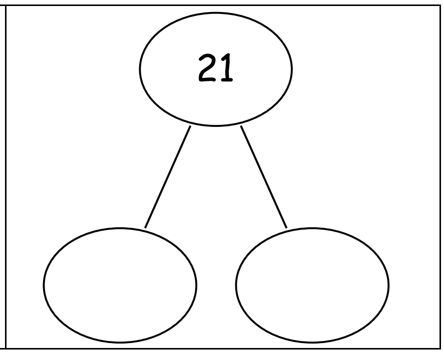
gleich

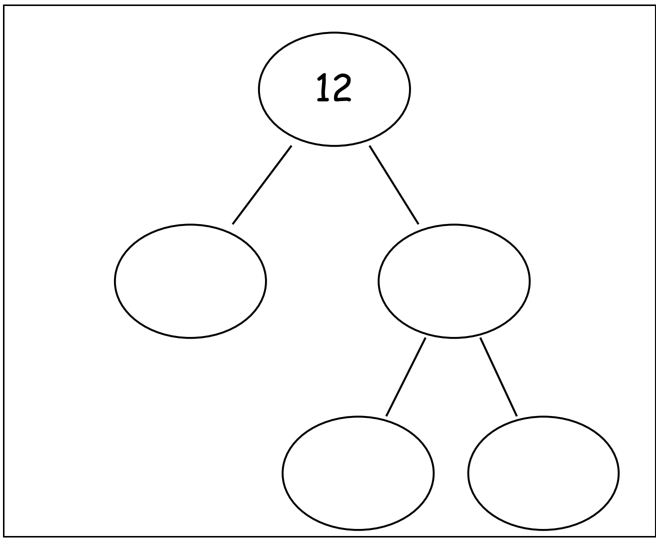
Zerlegungsbäume kennenlernen

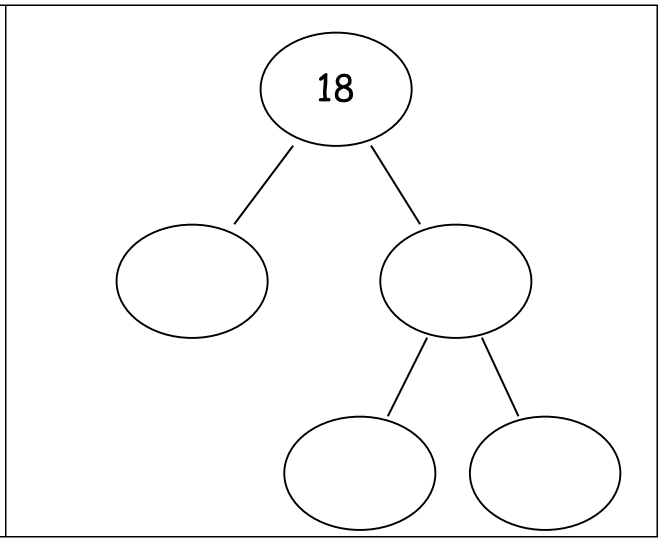
Rechne die Zerlegungsbäume aus.

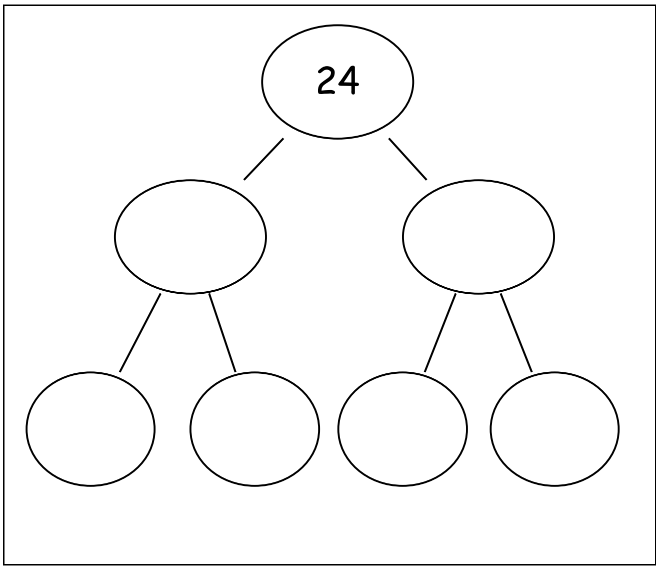


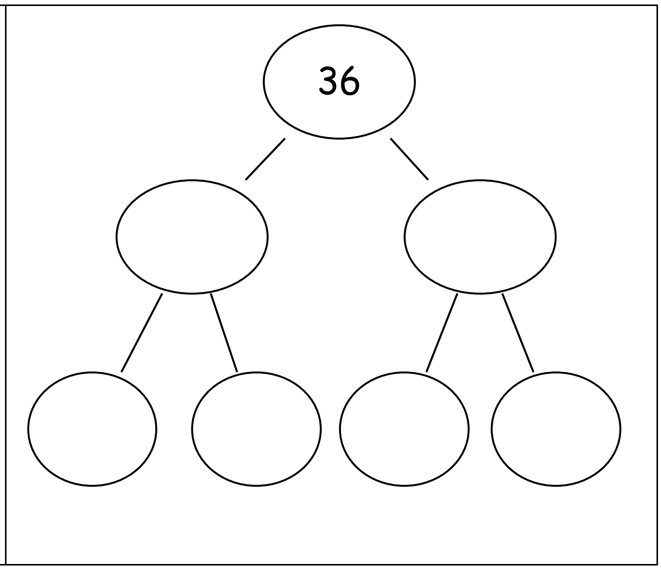






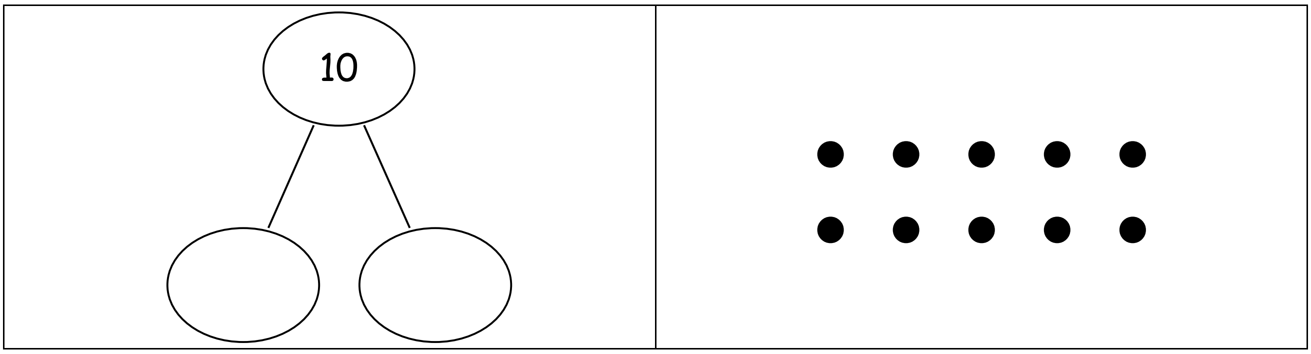


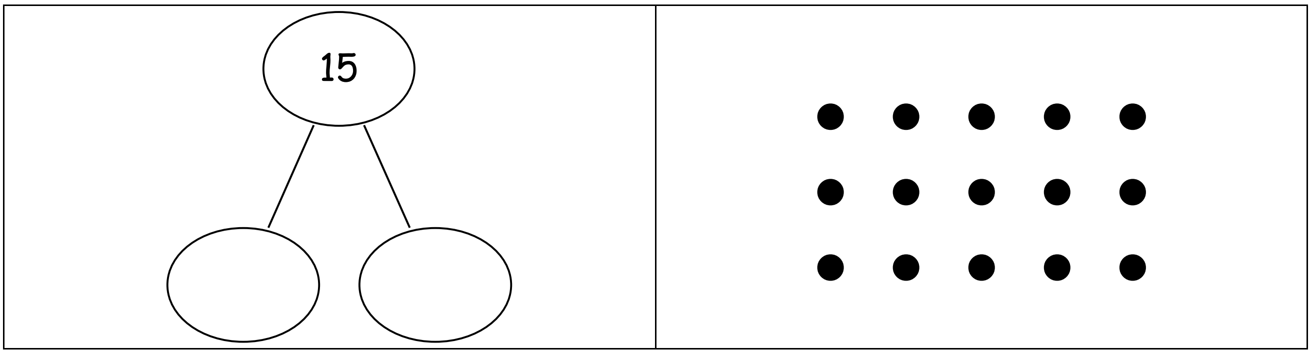


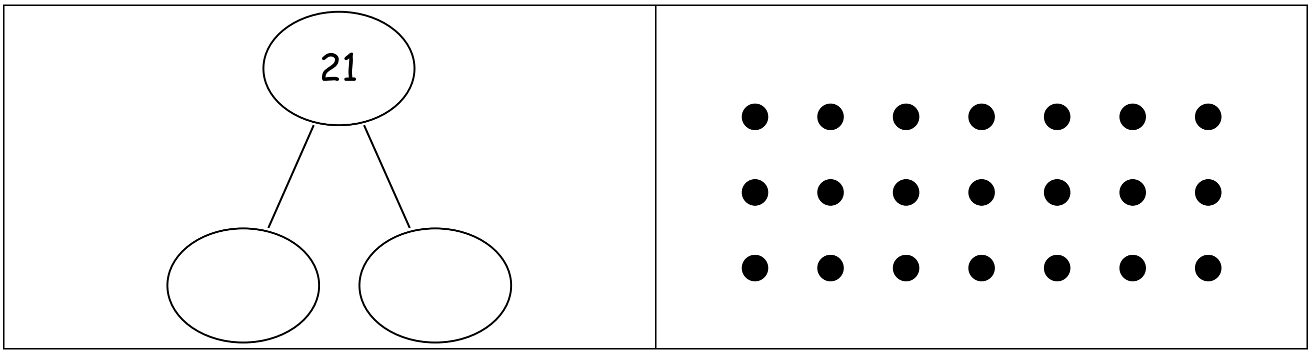


Zerlegungsbäume kennenlernen

Rechne die Zerlegungsbäume aus. Die Punktefelder rechts daneben können dir helfen.

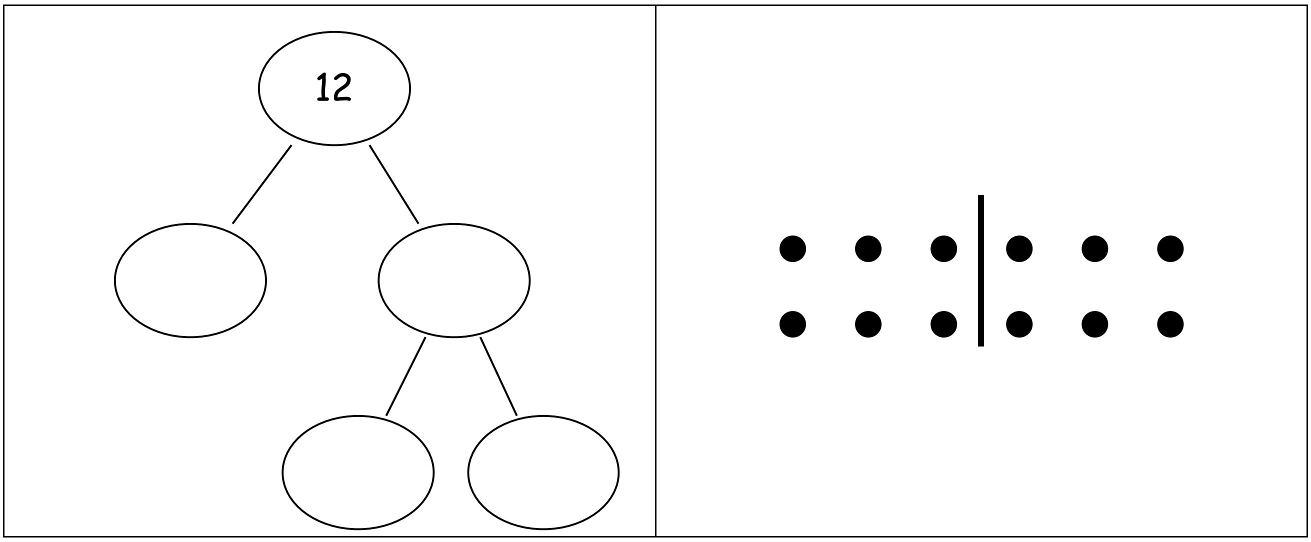


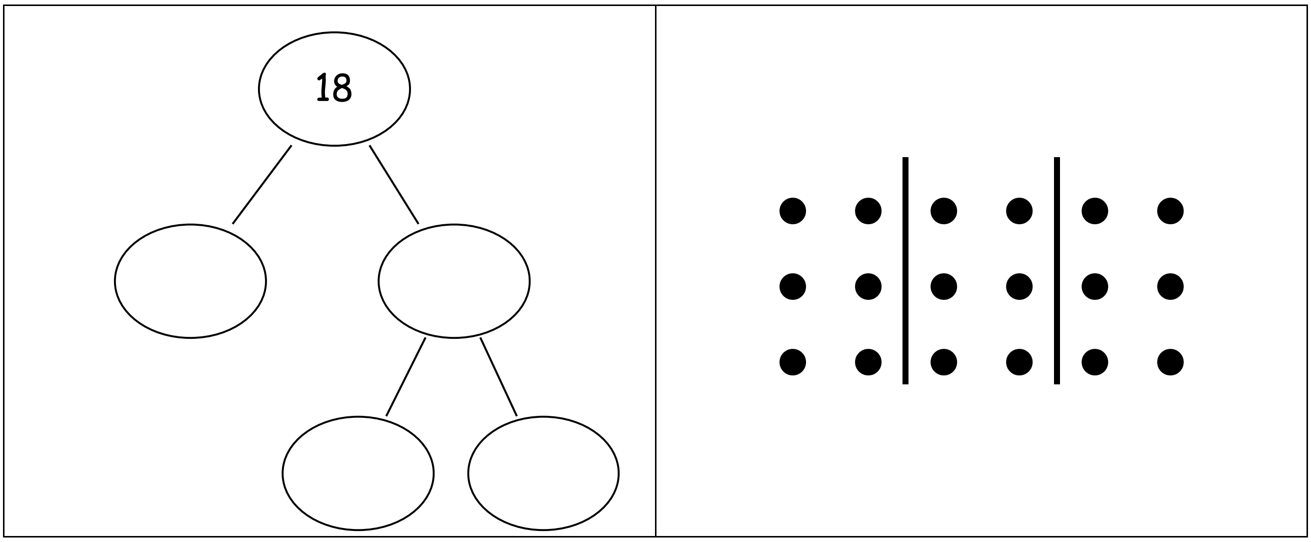




Zerlegungsbäume kennenlernen

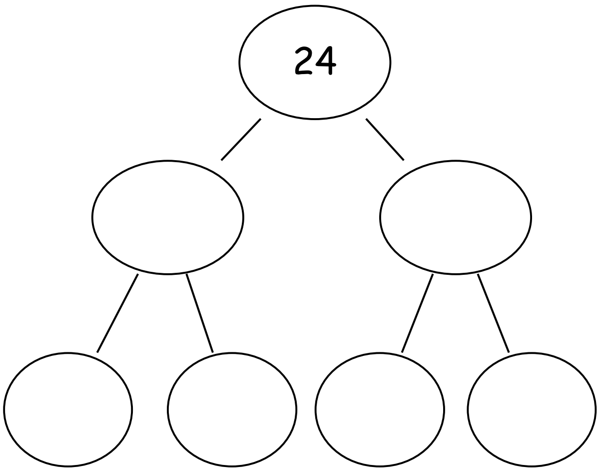
Rechne die Zerlegungsbäume aus. Die Punktefelder rechts daneben können dir helfen.

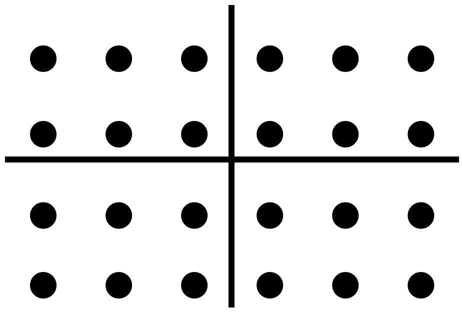


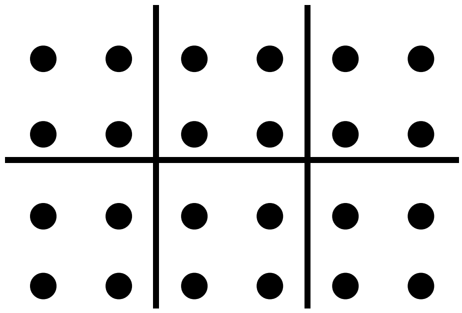


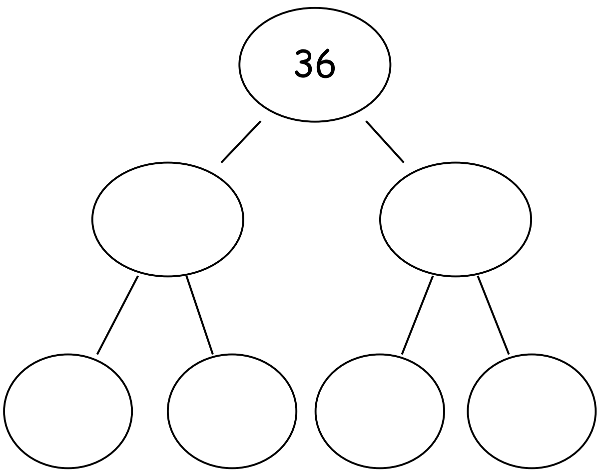
Zerlegungsbäume kennenlernen

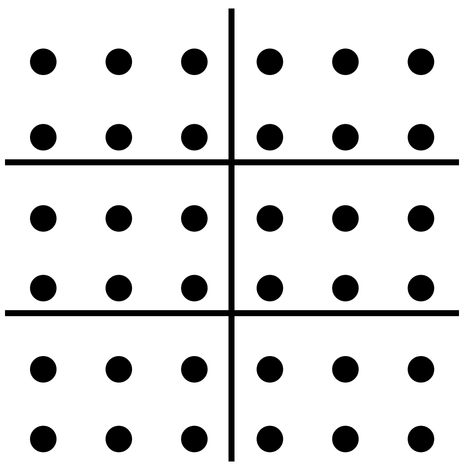
Rechne die Zerlegungsbäume aus. Die Punktefelder rechts daneben können dir helfen.





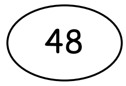




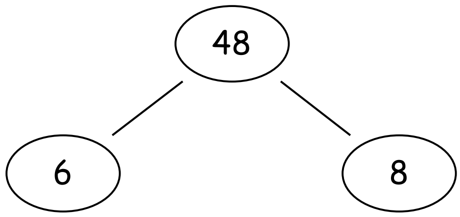


Wer zerlegt zuletzt?

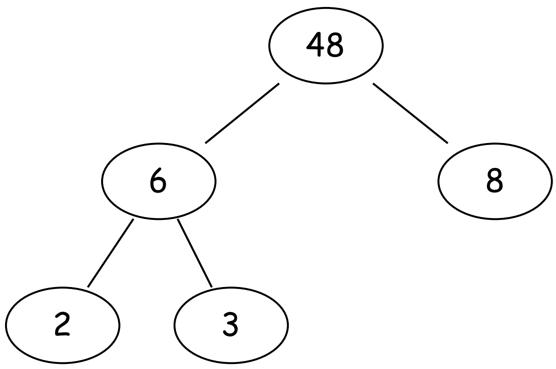
Ein Spieler nennt eine Startzahl.
Zum Beispiel 48.
Er notiert sie als Startzahl des Zerlegungsbaums.



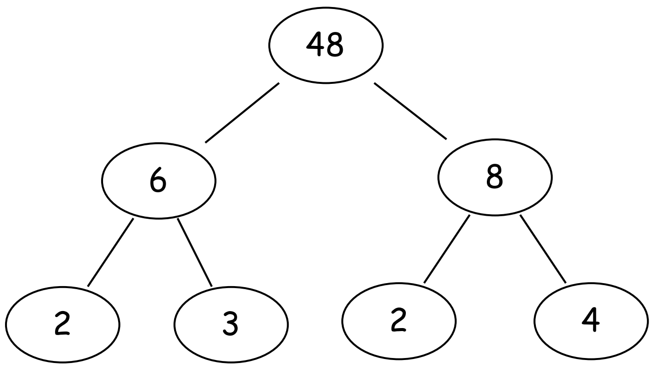
Der zweite Spieler zerlegt diese Zahl genau einmal.
Er zeichnet also die erste Stufe des Zerlegungsbaums.



Der erste Spieler führt den Zerlegungsbaum genau einmal weiter.



Jetzt muss der zweite Spieler den Zerlegungsbaum weiterführen.



Und so weiter...

Gewonnen hat der Spieler, der zuletzt zerlegt!

Zerlegungsbäume kennenlernen

Erfinde eigene Zerlegungsbäume. Male wie Piko.

Erkläre einem anderen Kind, wie du in einem Zerlegungsbaum rechnen musst.

___

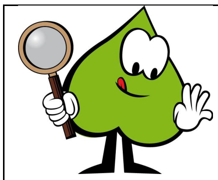
___

___

___

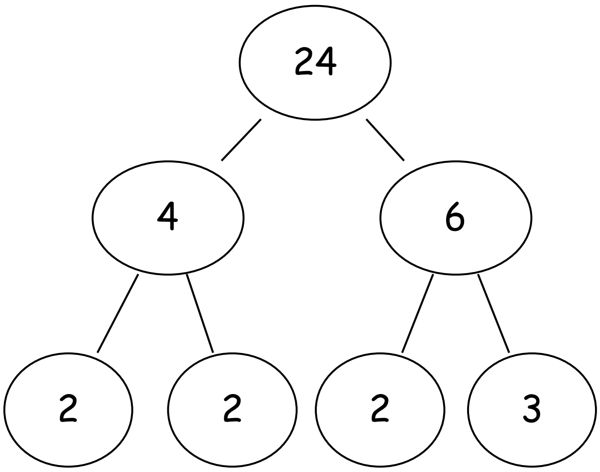
___

___



Forscherauftrag

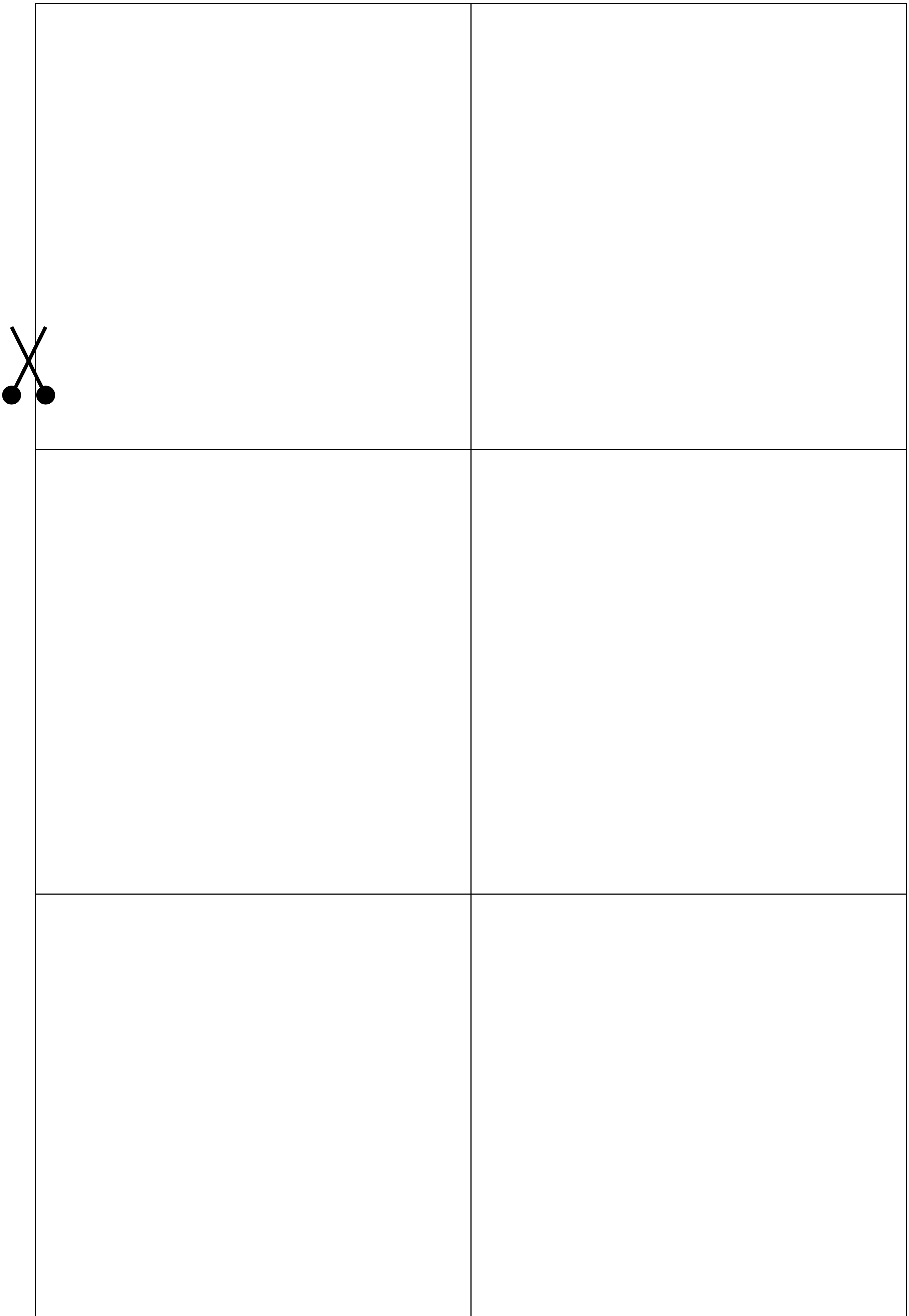
Piko hat einen Zerlegungsbaum mit der Startzahl 24 gefunden:

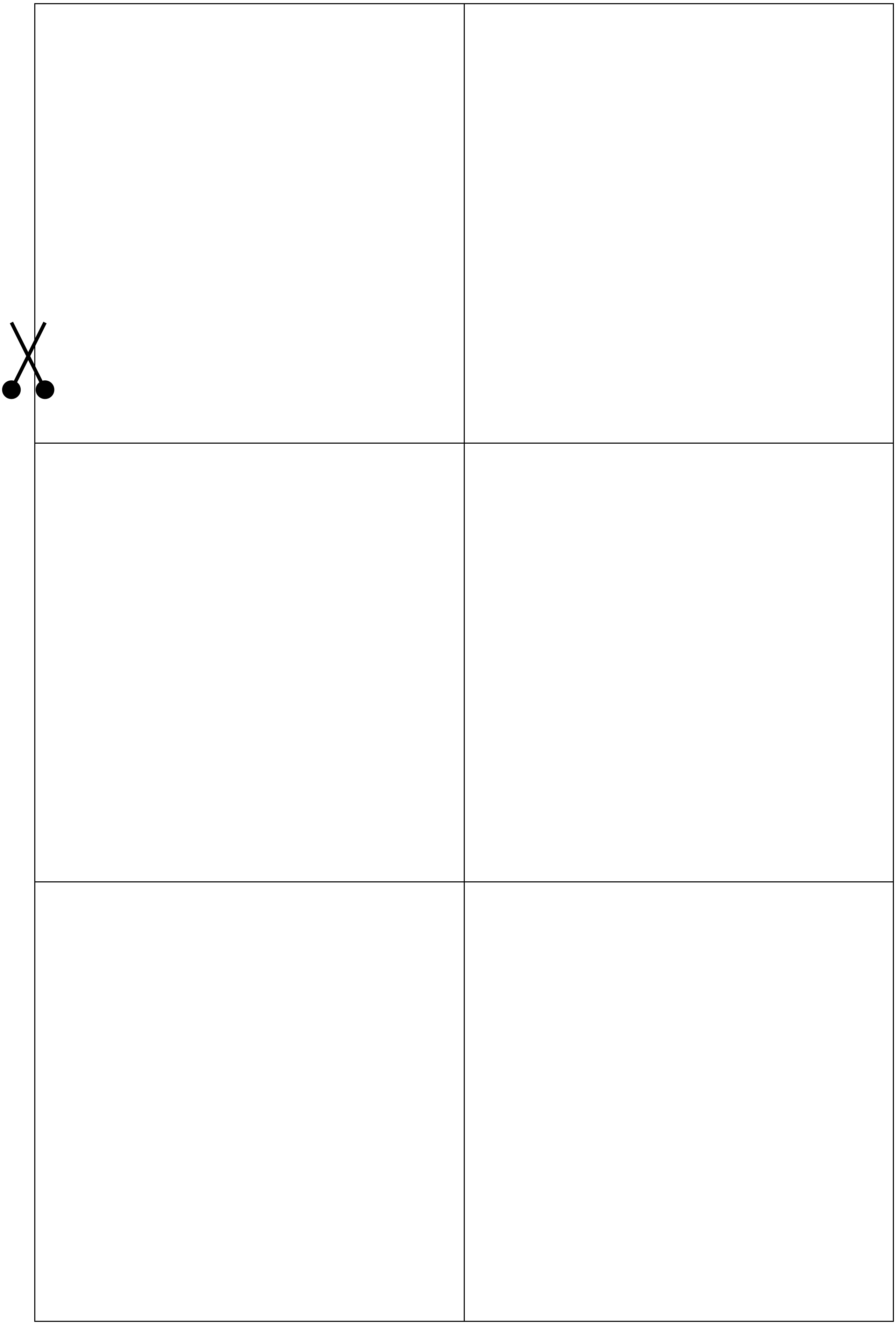


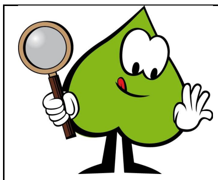
Finde möglichst viele verschiedene Zerlegungsbäume mit der Startzahl 24.
Zeichne jeden Zerlegungsbaum auf eine Karte.

Wie gehst du vor? Erkläre dein Vorgehen einem anderen Kind.

Sortiert eure Zerlegungsbäume.
Wie könnt ihr den anderen Kindern zeigen, dass ihr alle Zerlegungsbäume gefunden habt?

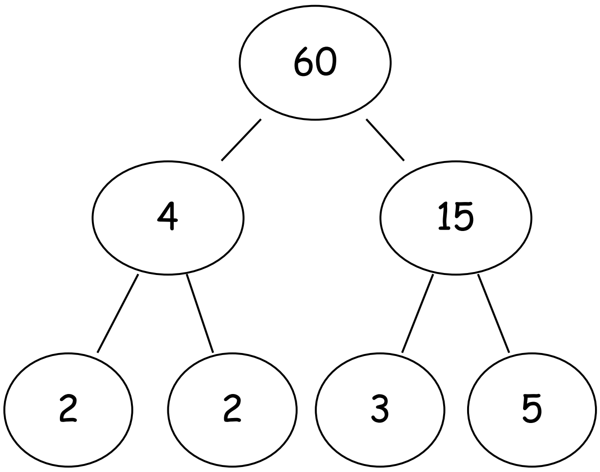






Forscherauftrag

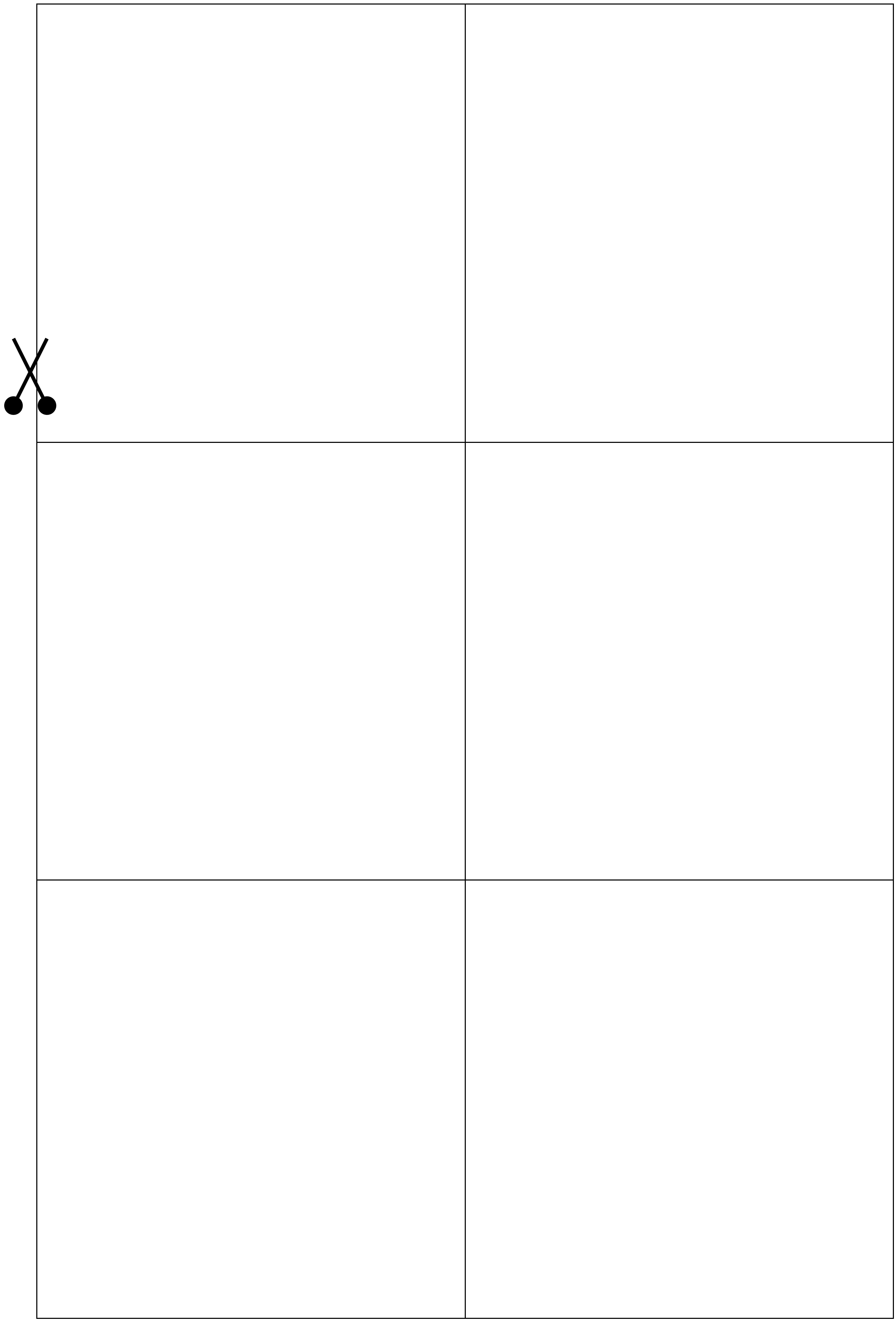
Piko hat einen Zerlegungsbaum mit der Startzahl 60 gefunden:

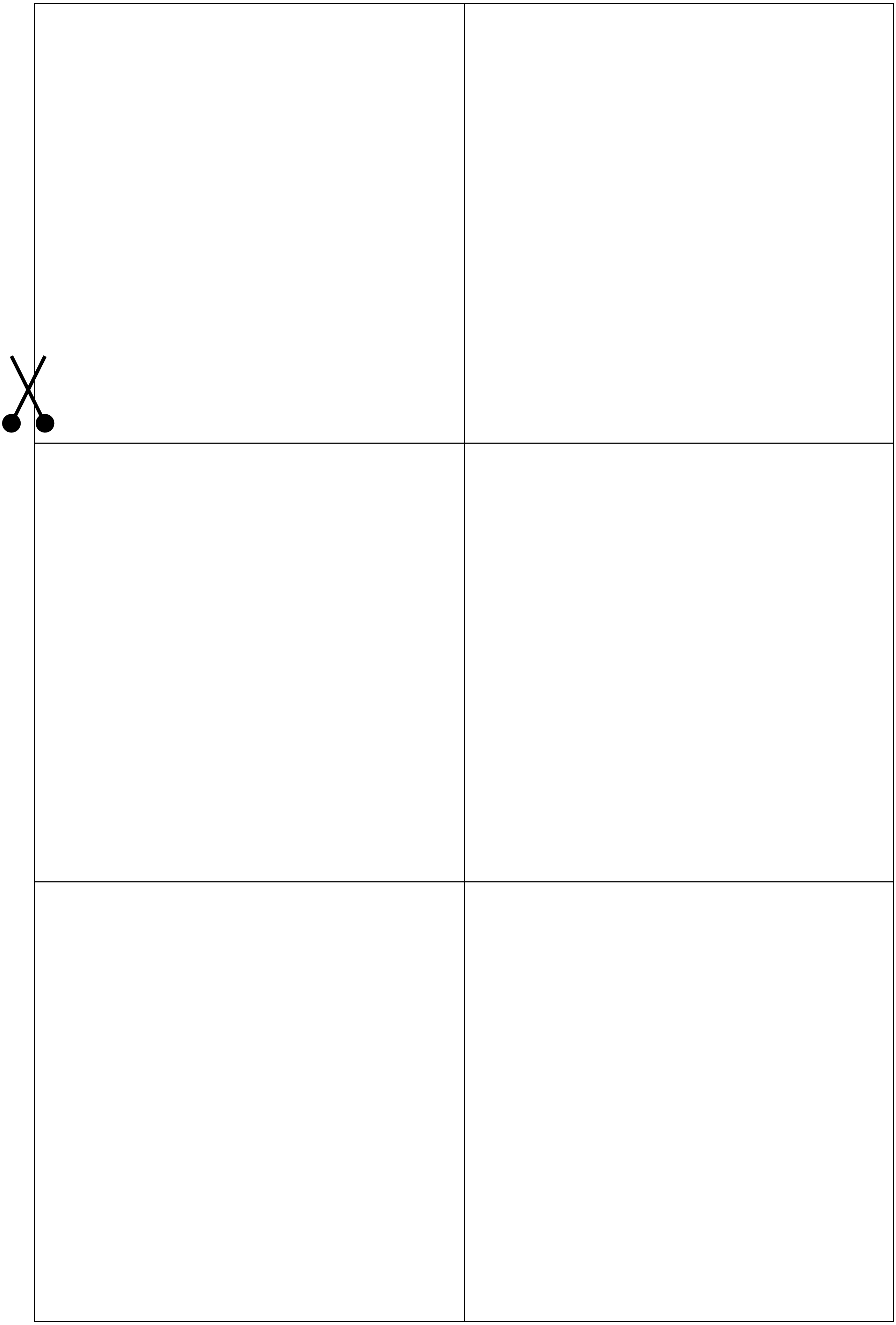


Finde möglichst viele verschiedene Zerlegungsbäume mit der Startzahl 60.
Zeichne jeden Zerlegungsbaum auf eine Karte.

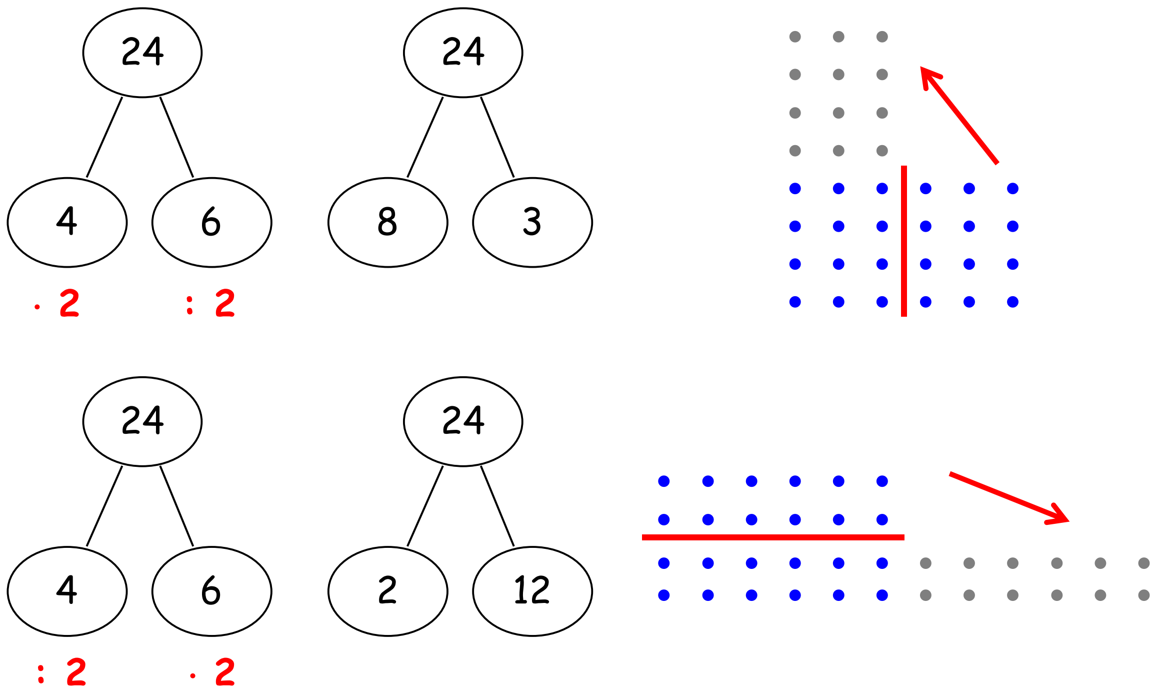
Wie gehst du vor? Erkläre dein Vorgehen einem anderen Kind.

Sortiert eure Zerlegungsbäume.
Wie könnt ihr den anderen Kindern zeigen, dass ihr alle Zerlegungsbäume gefunden habt?





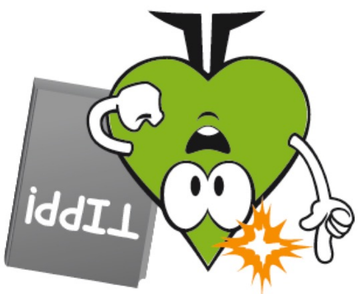
Verändere zuerst die Zerlegungszahlen auf der 1. Stufe.



Erkennst du die Strategie?
Finde danach die Zerlegungszahlen auf der 2. Stufe.

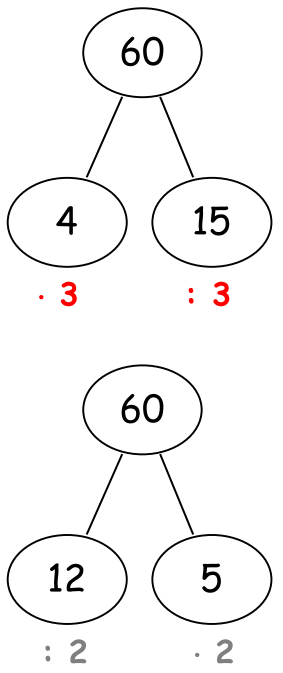
Tippkarte

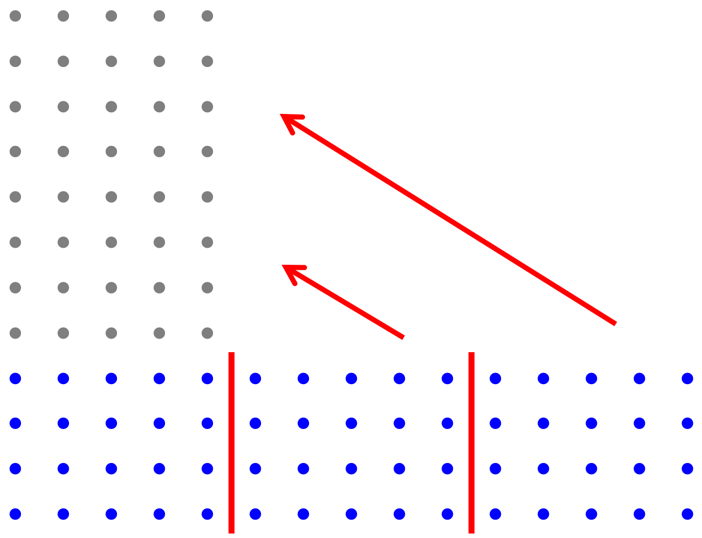
Zerlegungsbäume zur Startzahl 24 finden



Tippkarte am äußeren Rand ausschneiden, an der mittleren Linie falten und kleben.

Verändere zuerst die Zerlegungszahlen auf der 1. Stufe.



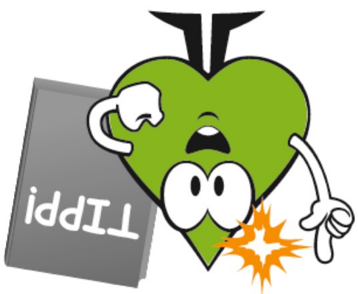


So kann es weitergehen. Wie sieht der nächste Baum aus?

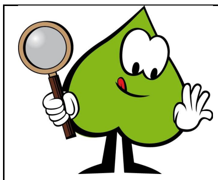
Erkennst du die Strategie?
Finde danach die Zerlegungszahlen auf der 2. Stufe.

Tippkarte

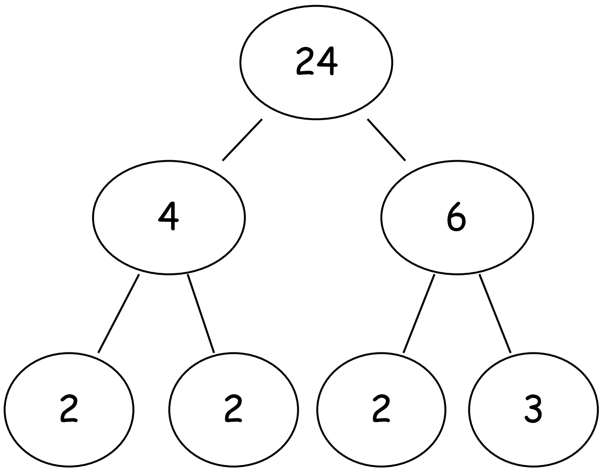
Zerlegungsbäume
zur Startzahl 60
finden



Tippkarte am äußeren Rand ausschneiden, an der mittleren Linie falten und kleben.

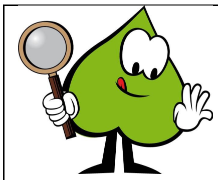


Weiterer Forscherauftrag

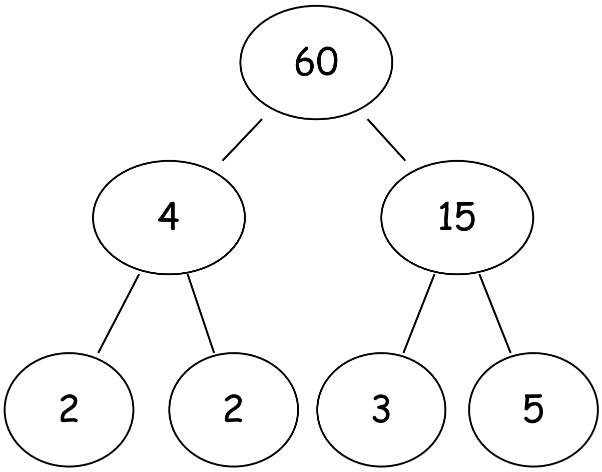


Schaut euch alle Zerlegungsbäume mit der Startzahl 24 genauer an.

Auf welchen Zahlen enden die Zerlegungsbäume immer? Nenne die Endzahlen.
Kann man die Endzahlen noch weiter zerlegen? Begründe.
Was haben die Endzahlen mit der Startzahl 24 zu tun?

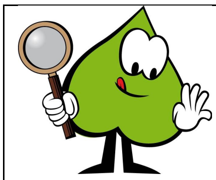


Weiterer Forscherauftrag



Schaut euch alle Zerlegungsbäume mit der Startzahl 60 genauer an.

Auf welchen Zahlen enden die Zerlegungsbäume immer? Nenne die Endzahlen.
Kann man die Endzahlen noch weiter zerlegen? Begründe.
Was haben die Endzahlen mit der Startzahl 60 zu tun?



Forscherauftrag

Piko vermutet:

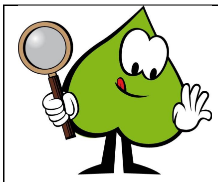
Findet jeweils für die Startzahlen 2 bis 13 alle möglichen Zerlegungsbäume. Findet also alle Zerlegungsbäume mit der Startzahl 2, alle mit der Startzahl 3, und so weiter.

Tragt in die Tabelle ein, wie viele Zerlegungsbäume jede Startzahl hat.

Stimmt ihr Pikos Vermutung zu oder nicht? Begründet.

Tabelle:

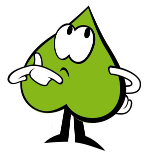
Startzahl	Wie viele Zerlegungsbäume?
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	



Forscherauftrag

Piko vermutet:

Je größer die Startzahl ist,
desto mehr Stufen und Äste hat
der Zerlegungsbaum.



Findet jeweils für die Startzahlen 2 bis 25 alle möglichen Zerlegungsbäume. Findet also alle Zerlegungsbäume mit der Startzahl 2, alle mit der Startzahl 3, und so weiter.

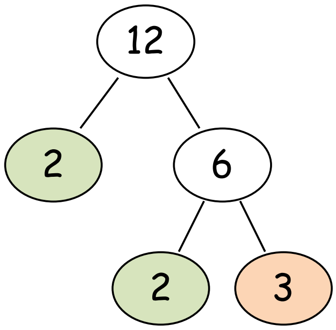
Tragt in die Tabelle ein, wie viele Zerlegungsbäume jede Startzahl hat.

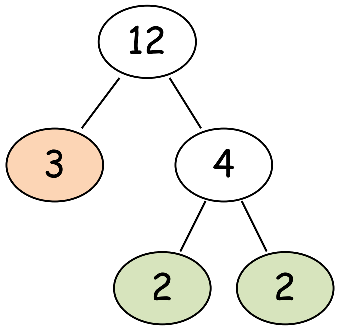
Stimmt ihr Pikos Vermutung zu oder nicht? Begründet.

Tabelle:

Startzahl	Wie viele Zerlegungsbäume?
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	

Zur Startzahl 12 gibt es mehrere Zerlegungsbäume. Zum Beispiel:





Zur Startzahl gibt es überhaupt keinen Zerlegungsbaum.

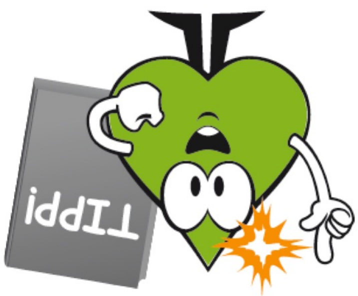
13

Woran liegt das? Die Startzahl 13 ist doch größer als die Startzahl 12.

Achte auf die Endzahlen der Zerlegungsbäume. Sie werden immer markiert.
Warum sind sie so besonders?

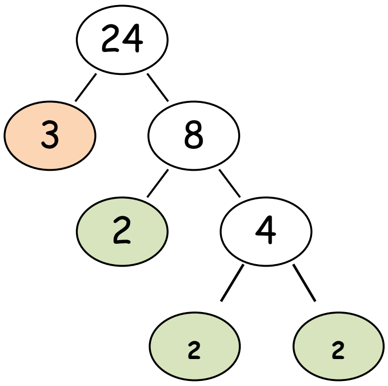
Tippkarte

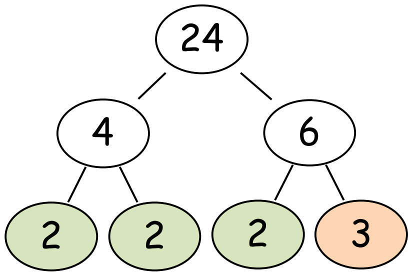
Je größer die Startzahl,
desto größer der
Zerlegungsbaum?
Stimmt das überhaupt?



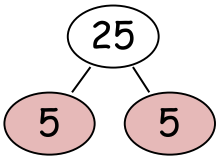
Tippkarte am äußeren Rand ausschneiden, an der mittleren Linie falten und kleben.

Zur Startzahl 24 gibt es mehrere Zerlegungsbäume. Zum Beispiel:





Zur Startzahl 25 gibt es nur einen Zerlegungsbaum.

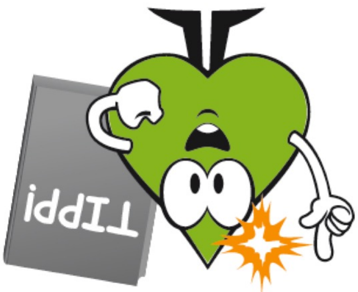


Woran liegt das? Die Startzahl 25 ist doch größer als die Startzahl 24.

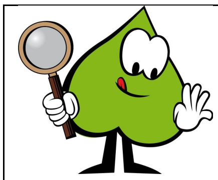
Achte auf die Endzahlen der Zerlegungsbäume. Sie werden immer markiert. Warum sind sie so besonders?

Je größer die Startzahl,
desto größer der
Zerlegungsbaum?
Stimmt das überhaupt?

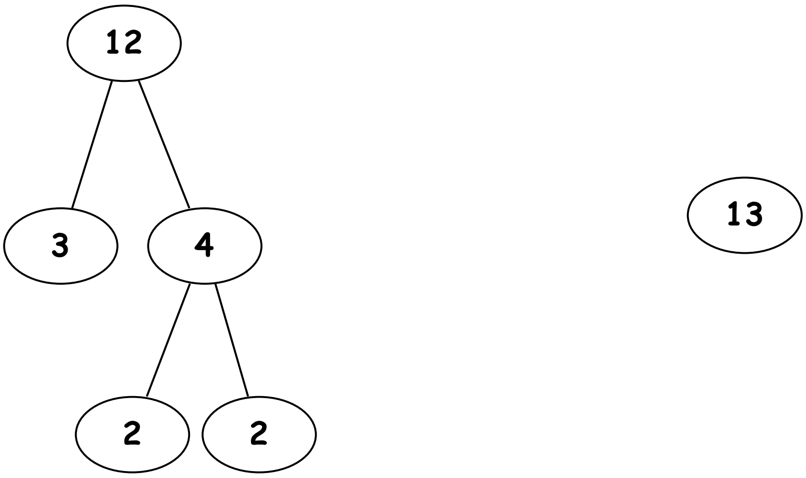
Tippkarte



Tippkarte am äußeren Rand ausschneiden, an der mittleren Linie falten und kleben.



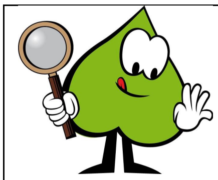
Weiterer Forscherauftrag



Schaut euch die Startzahlen und ihre Zerlegungsbäume genauer an.

Wann hat eine Startzahl keinen Zerlegungsbaum? Wann hat eine Startzahl sehr viele Zerlegungsbäume? Beschreibt.

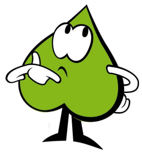
Benutzt die Mathewörter aus dem Wortspeicher



Forscherauftrag

Piko denkt sich besondere Startzahlen aus.

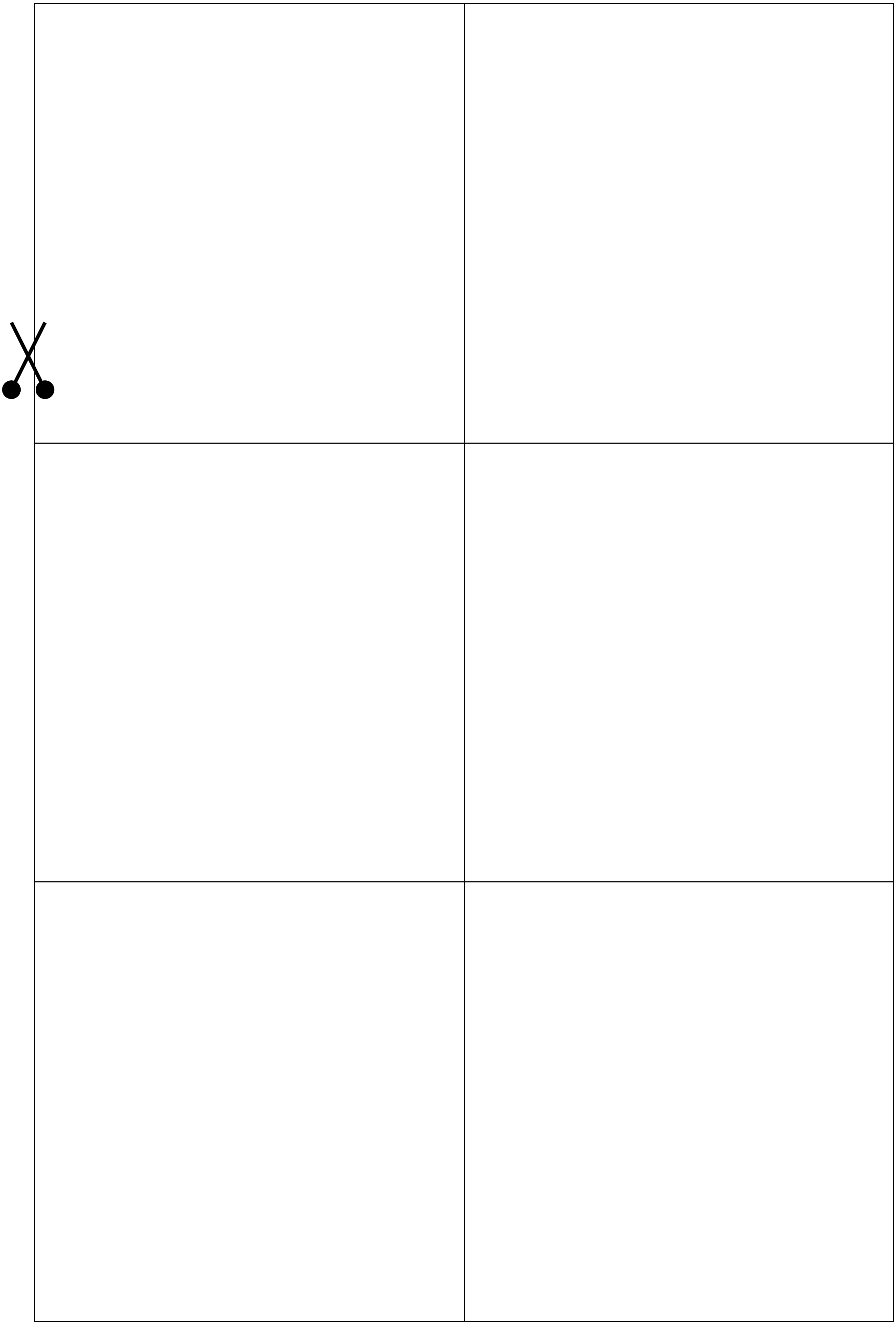
4, 9, 16, 25 und 36 sind
besondere Startzahlen.
Wie sehen eigentlich ihre
Zerlegungsbäume aus?

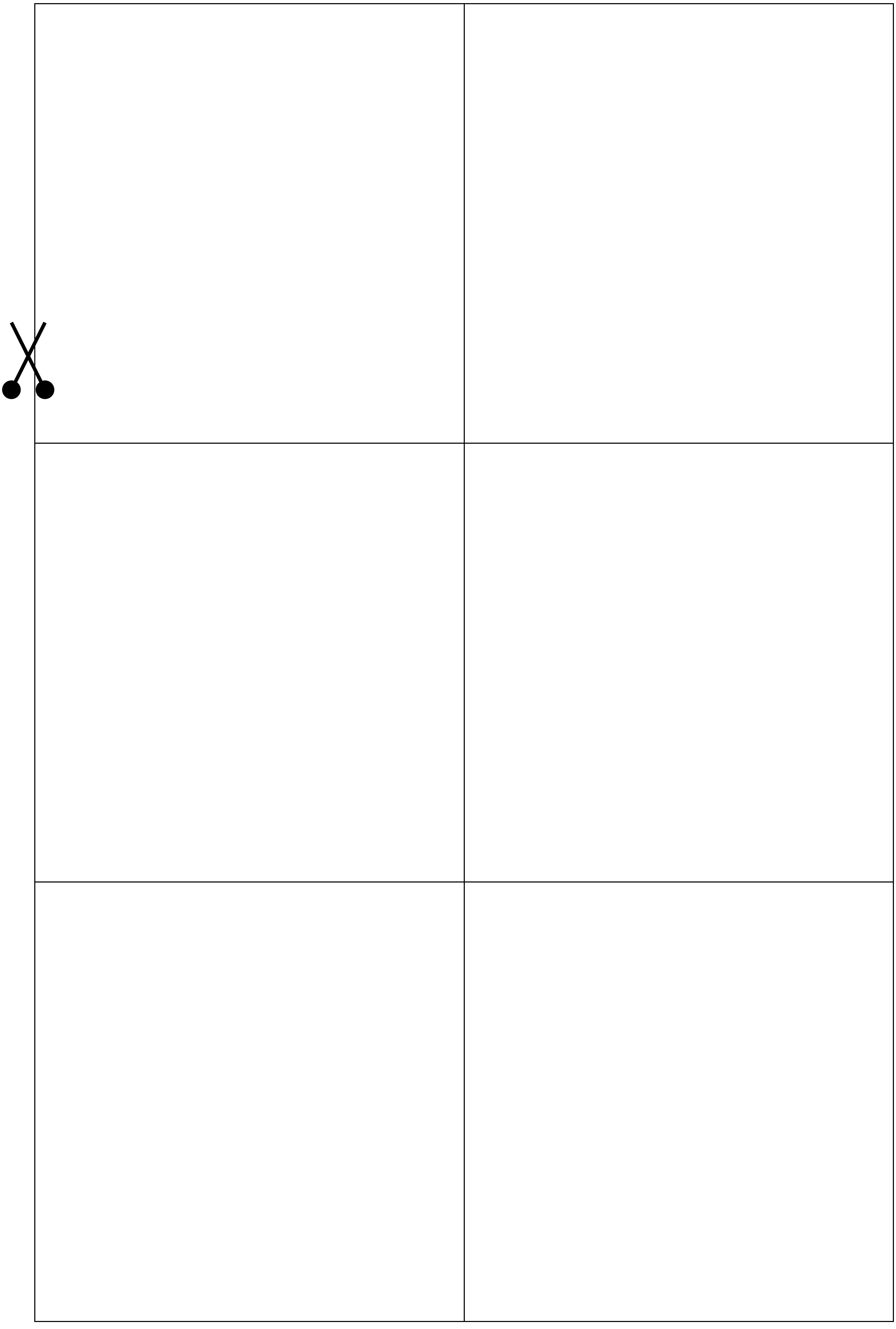


Finde jeweils für die Startzahlen 4, 9, 16, 25 und 36 alle möglichen Zerlegungsbäume.
Finde also alle Zerlegungsbäume mit der Startzahl 4, alle mit der Startzahl 9, und so weiter.
Zeichne jeden Zerlegungsbaum auf eine Karte.

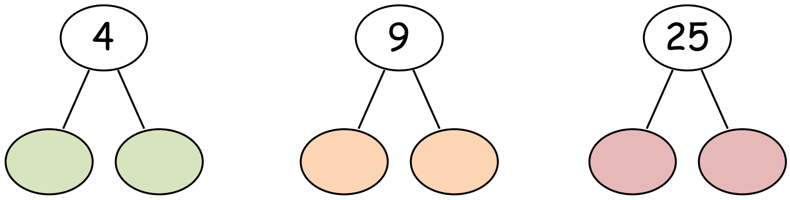
Sortiert eure Zerlegungsbäume.
Erklärt den anderen Kindern, wie die Zerlegungsbäume aussehen.

Warum sind die Startzahlen so besonders? Begründet.
Findet weitere besondere Startzahlen.





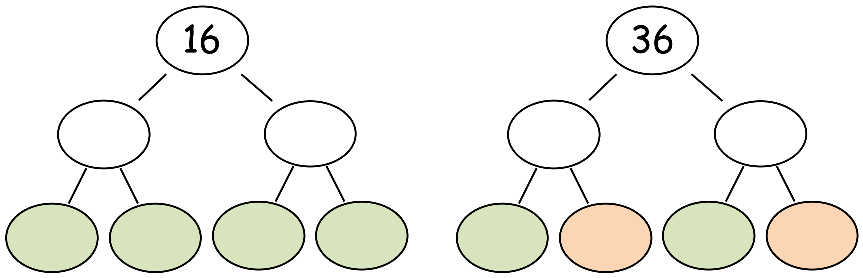
Diese Startzahlen haben jeweils nur einen Zerlegungsbaum:



Die Bäume haben nur eine Stufe.

Auf welche Zahlen enden die Bäume? Achte auf die gleichen Farben.

Diese Startzahlen haben jeweils mehrere Zerlegungsbäume:



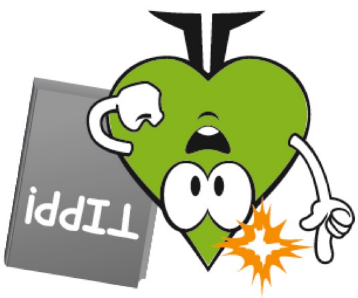
Die Bäume haben zwei Stufen.

Auf welche Zahlen enden die Bäume? Achte auf die gleichen Farben.

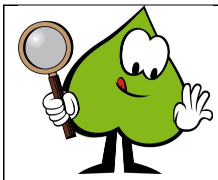
Finde weitere Zerlegungsbäume. Beginne mit gleichen Endzahlen.

Zerlegungsbäume mit besonderen Startzahlen

Tippkarte

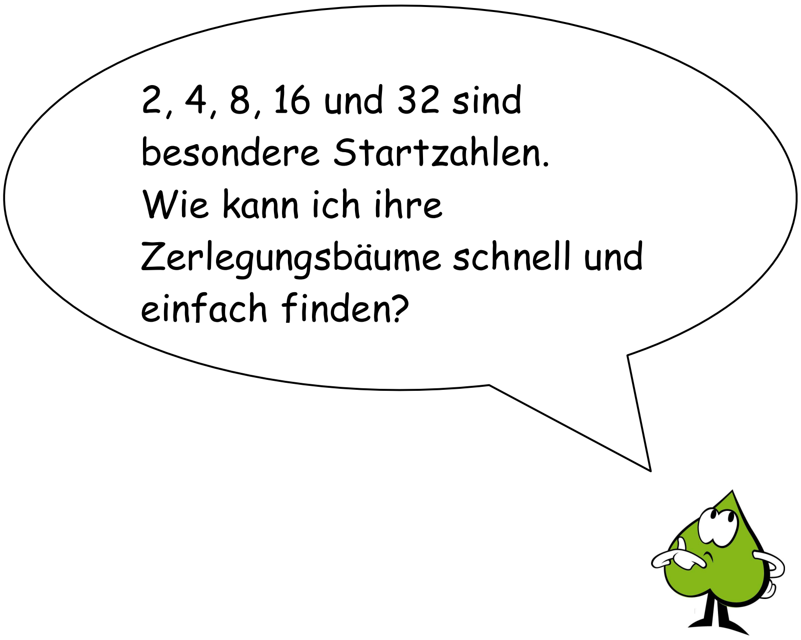


Tippkarte am äußeren Rand ausschneiden, an der mittleren Linie falten und kleben.



Weiterer Forscherauftrag

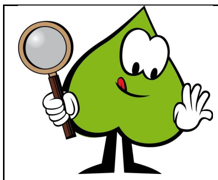
Piko denkt sich noch mehr besondere Startzahlen aus.



Finde jeweils für die Startzahlen 2, 4, 8, 16 und 32 einen Zerlegungsbaum.
Finde also einen Zerlegungsbaum mit der Startzahl 2, einen mit der Startzahl 4, und so weiter.

Vergleicht die Zerlegungsbäume miteinander. Welche Zerlegungszahlen kommen immer wieder vor?

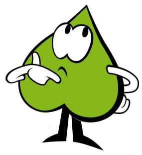
Zeigt den anderen Kindern, wie man schnell und einfach die Zerlegungsbäume finden kann.
Findet weitere besondere Startzahlen und ihre Zerlegungsbäume.



Weiterer Forscherauftrag

Piko denkt sich noch mehr besondere Startzahlen aus.

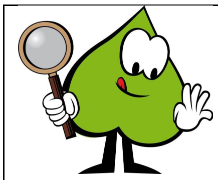
3, 9, 27 und 81 sind
besondere Startzahlen.
Wie kann ich ihre
Zerlegungsbäume schnell und
einfach finden?



Finde jeweils für die Startzahlen 3, 9, 27 und 81 einen Zerlegungsbaum.
Finde also einen Zerlegungsbaum mit der Startzahl 3, einen mit der Startzahl 9, und so weiter.

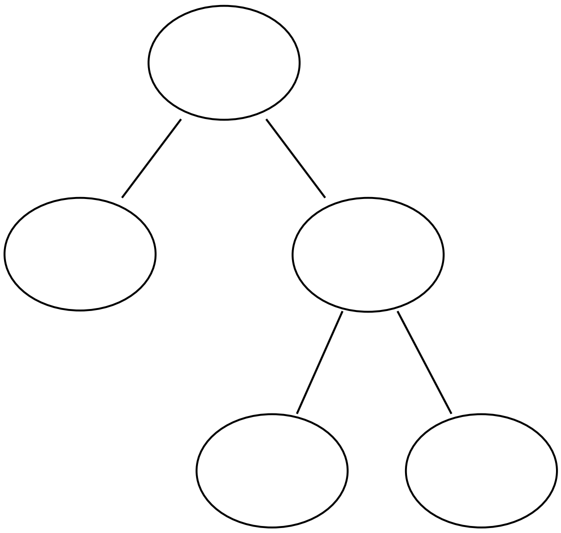
Vergleicht die Zerlegungsbäume miteinander. Welche Zerlegungszahlen kommen immer wieder vor?

Zeigt den anderen Kindern, wie man schnell und einfach die Zerlegungsbäume finden kann.
Findet weitere besondere Startzahlen und ihre Zerlegungsbäume.



Forscherauftrag

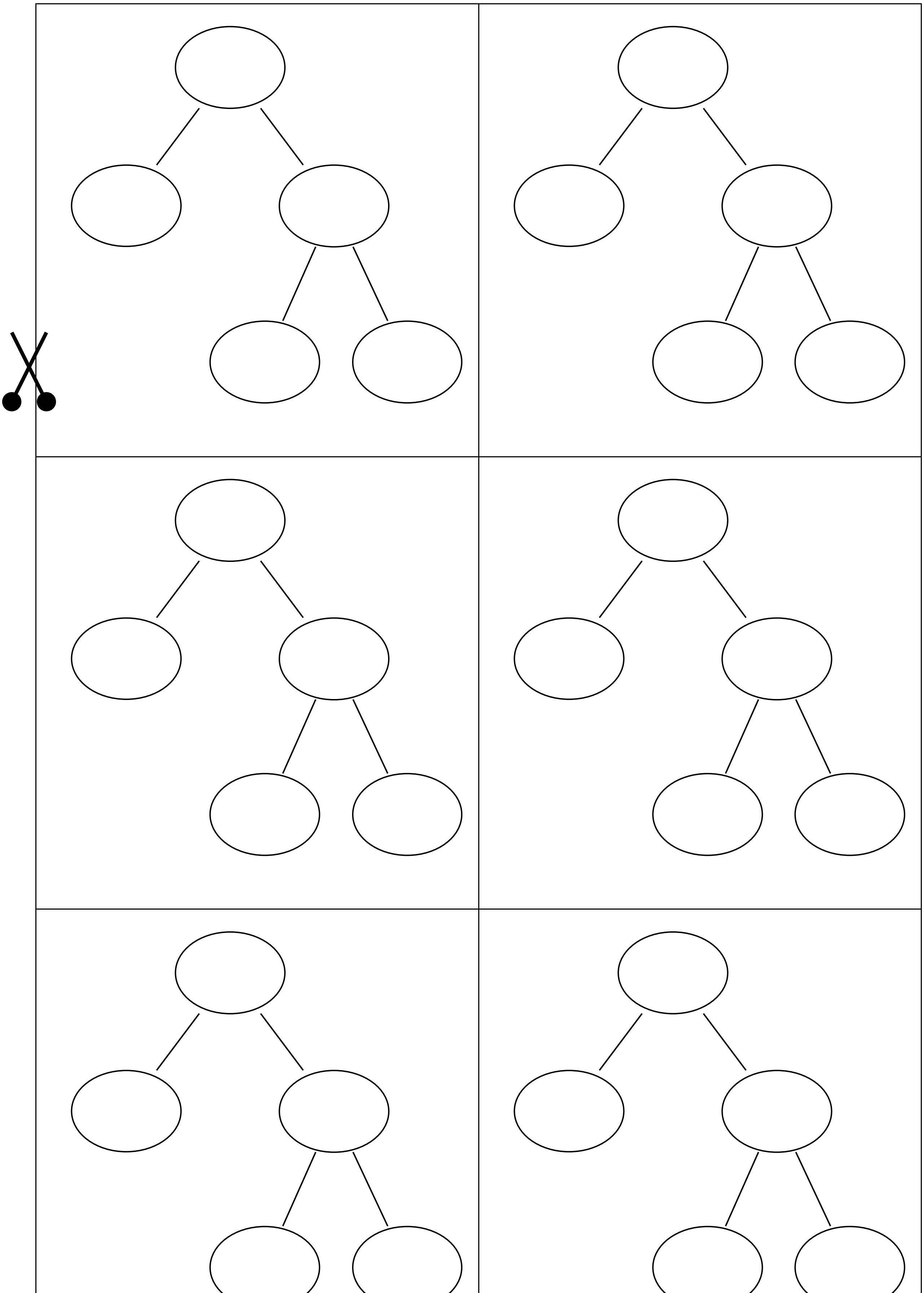
Piko hat einen leeren Zerlegungsbaum gezeichnet:

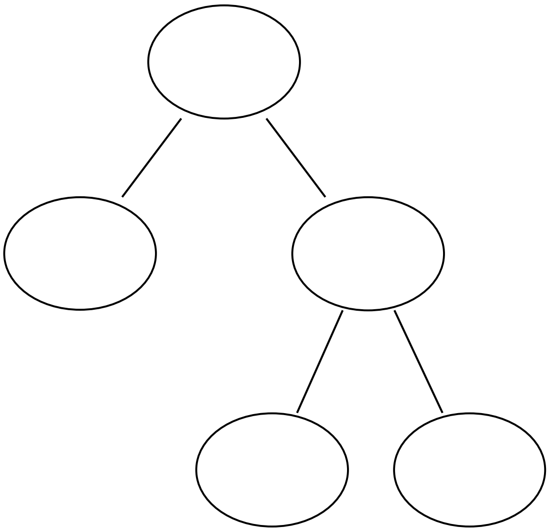
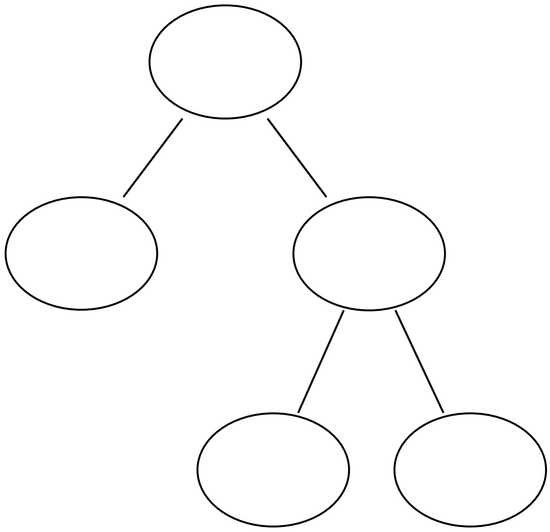
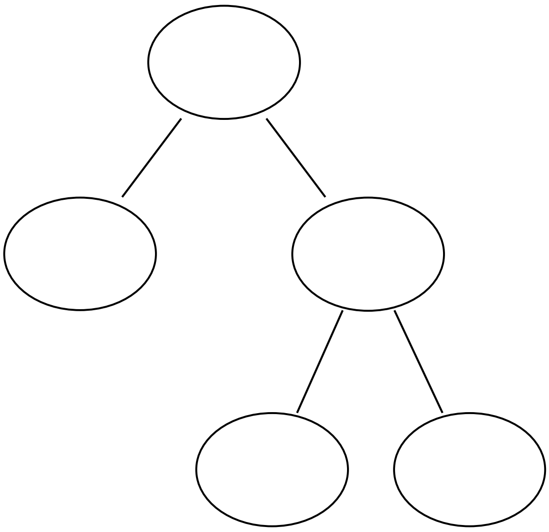
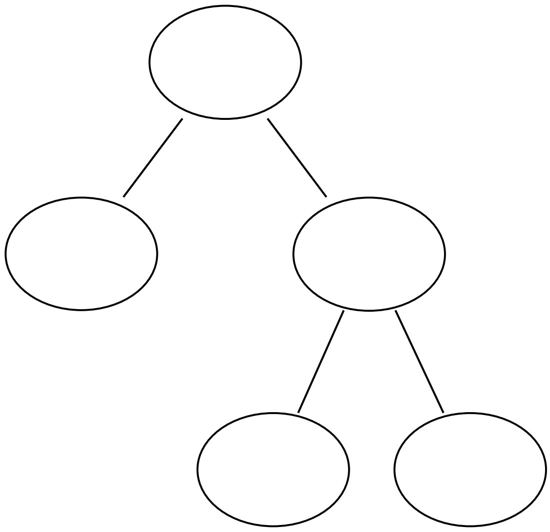
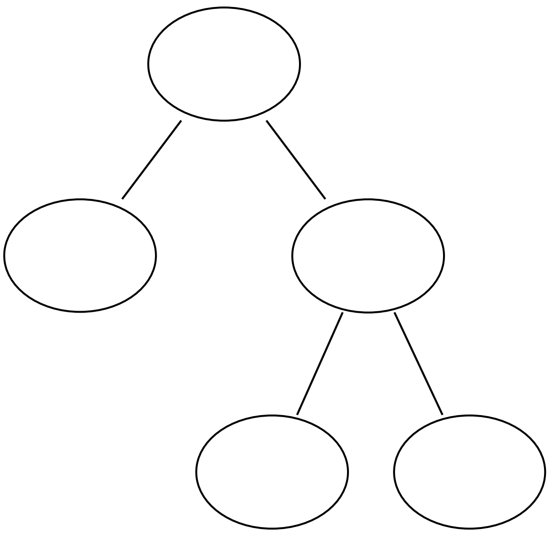
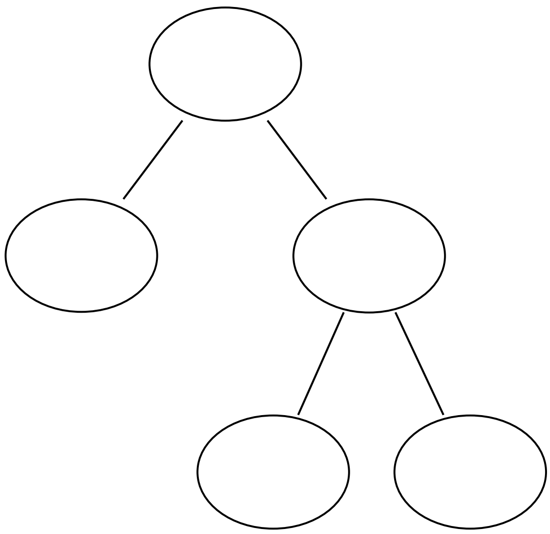


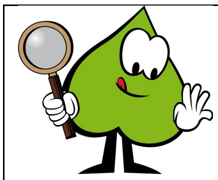
Finde möglichst **viele verschiedene Startzahlen** für den leeren Zerlegungsbaum.
Achte darauf, dass die Zahlen zum Zerlegungsbaum passen.
Benutze die Karten mit den leeren Zerlegungsbäumen.

Wie gehst du vor? Erkläre dein Vorgehen einem anderen Kind.

Vergleicht eure Zerlegungsbäume miteinander.
Zeigt den anderen Kindern, wie man schnell und einfach passende Startzahlen finden kann.

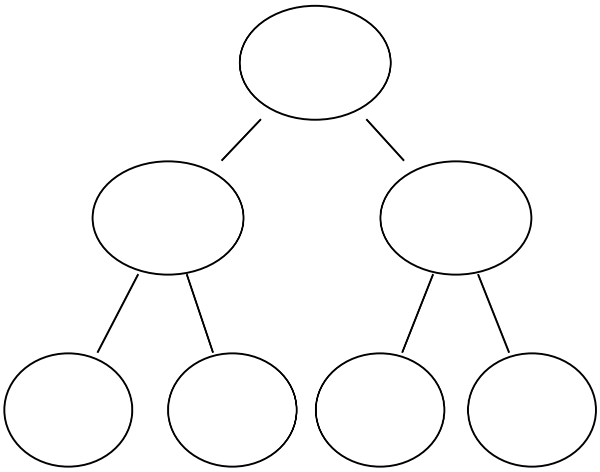




Forscherauftrag

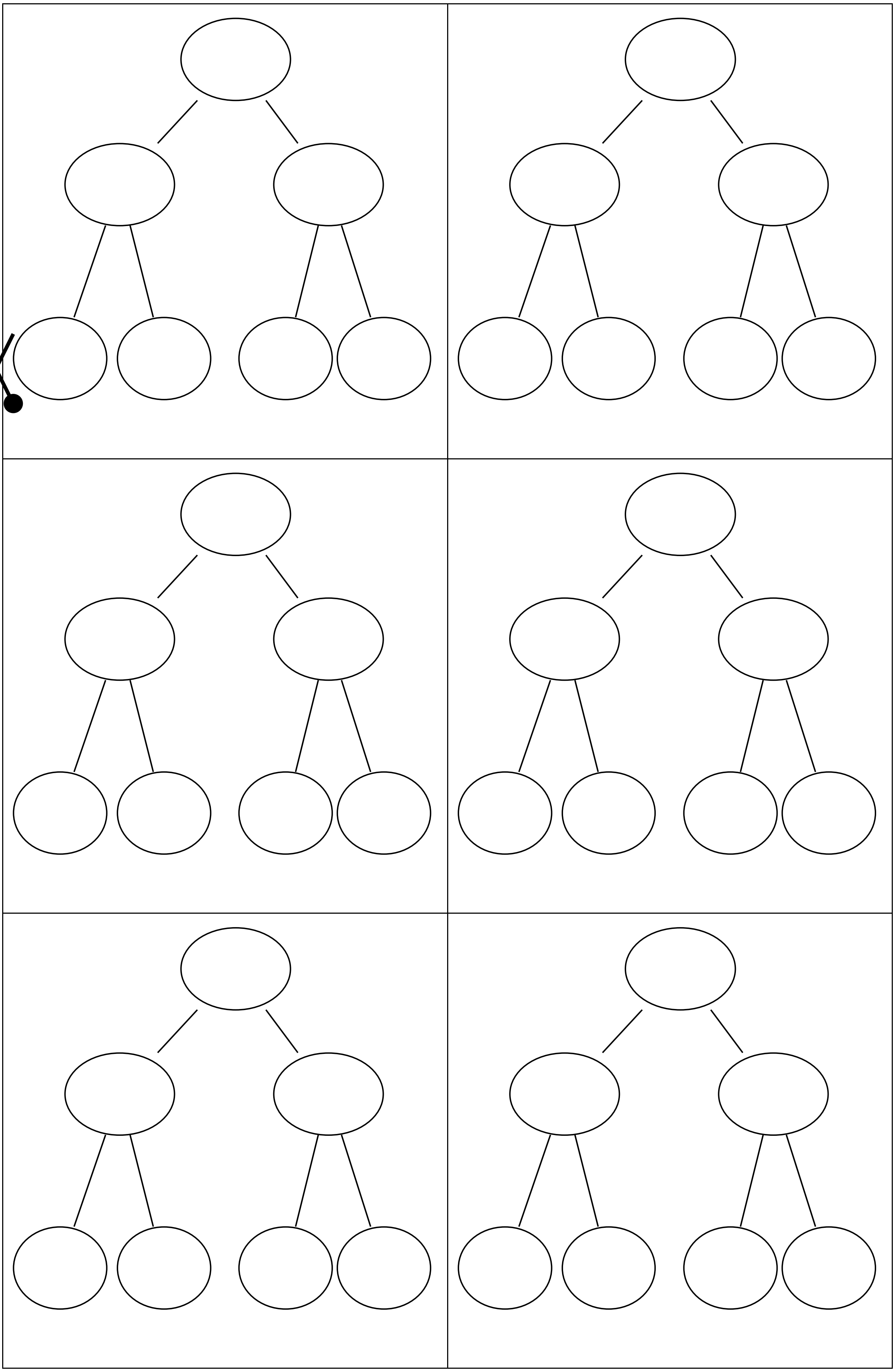
Piko hat einen leeren Zerlegungsbaum gezeichnet:

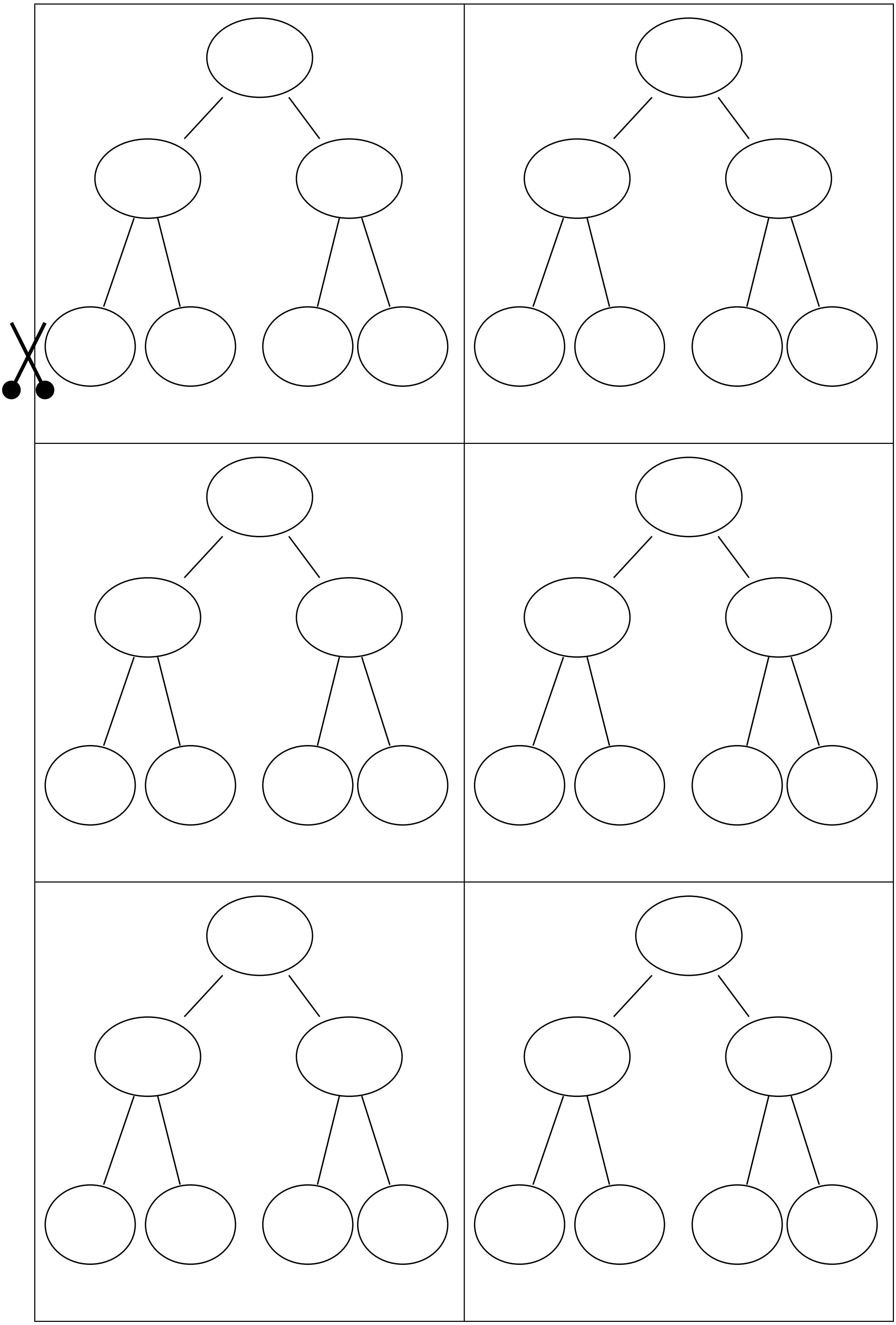


Finde möglichst **viele verschiedene Startzahlen** für den leeren Zerlegungsbaum.
Achte darauf, dass die Zahlen zum Zerlegungsbaum passen.
Benutze die Karten mit den leeren Zerlegungsbäumen.

Wie gehst du vor? Erkläre dein Vorgehen einem anderen Kind.

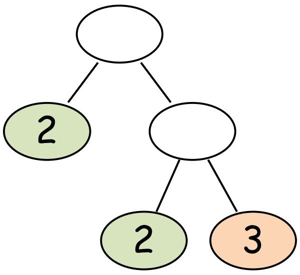
Vergleicht eure Zerlegungsbäume miteinander.
Zeigt den anderen Kindern, wie man schnell und einfach passende Startzahlen finden kann.





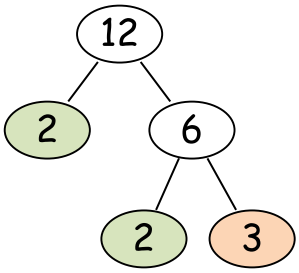
Fülle den leeren Zerlegungsbaum von unten nach oben aus.

1. Suche dir zuerst drei Endzahlen aus.



Achtung:
Suche dir Zahlen aus, die man nicht mehr zerlegen kann!

2. Rechne dich dann bis zur Startzahl nach oben.

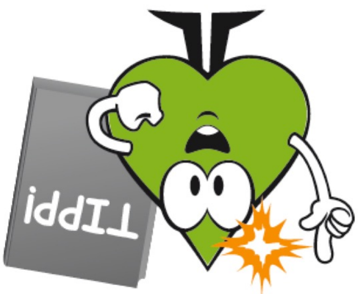


Achtung:
Die Zahlen werden Schritt für Schritt malgenommen!

Finde auf diese Weise weitere Startzahlen. Warum funktioniert das?

Tippkarte

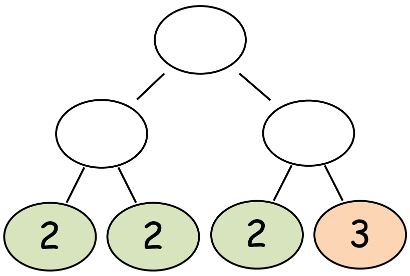
Startzahlen und Zerlegungszahlen einfach finden



Tippkarte am äußeren Rand ausschneiden, an der mittleren Linie falten und kleben.

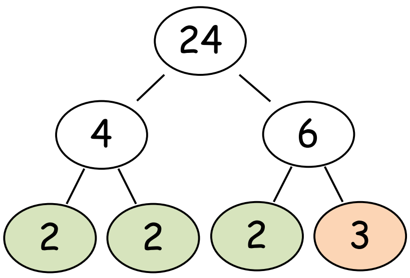
Fülle den leeren Zerlegungsbaum von unten nach oben aus.

1. Suche dir zuerst drei Endzahlen aus.



Achtung:
Suche dir Zahlen aus, die man nicht mehr zerlegen kann!

2. Rechne dich dann bis zur Startzahl nach oben.

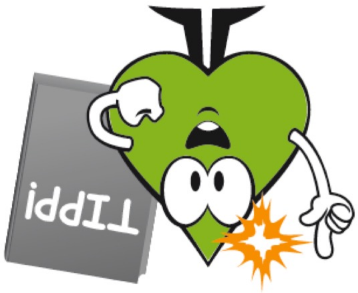


Achtung:
Die Zahlen werden Schritt für Schritt malgenommen!

Finde auf diese Weise weitere Startzahlen. Warum funktioniert das?

Tippkarte

Startzahlen und Zerlegungszahlen einfach finden



Tippkarte am äußeren Rand ausschneiden, an der mittleren Linie falten und kleben.

Mathewörter

der Zerlegungsbaum

12 : 3 = 4
12 dividiert durch 3 ergibt 4

12 : 4 = 3
12 dividiert durch 4 ergibt 3

12

die Startzahl

wird zerlegt in 3 und 4,
denn 3 multipliziert mit 4 ergibt 12

1. Stufe

$3 \cdot 4 = 12$

3

ist **ein Teiler** von 12

die Primzahl

lässt sich nicht
weiter zerlegen

ist **ein Teiler** von 12

4

die Zerlegungszahl

wird zerlegt in 2 und 2,
denn 2 multipliziert mit 2 ergibt 4

2. Stufe

$2 \cdot 2 = 4$

multipliziert mit

ergibt

ist **ein Teiler** von 4

2 2

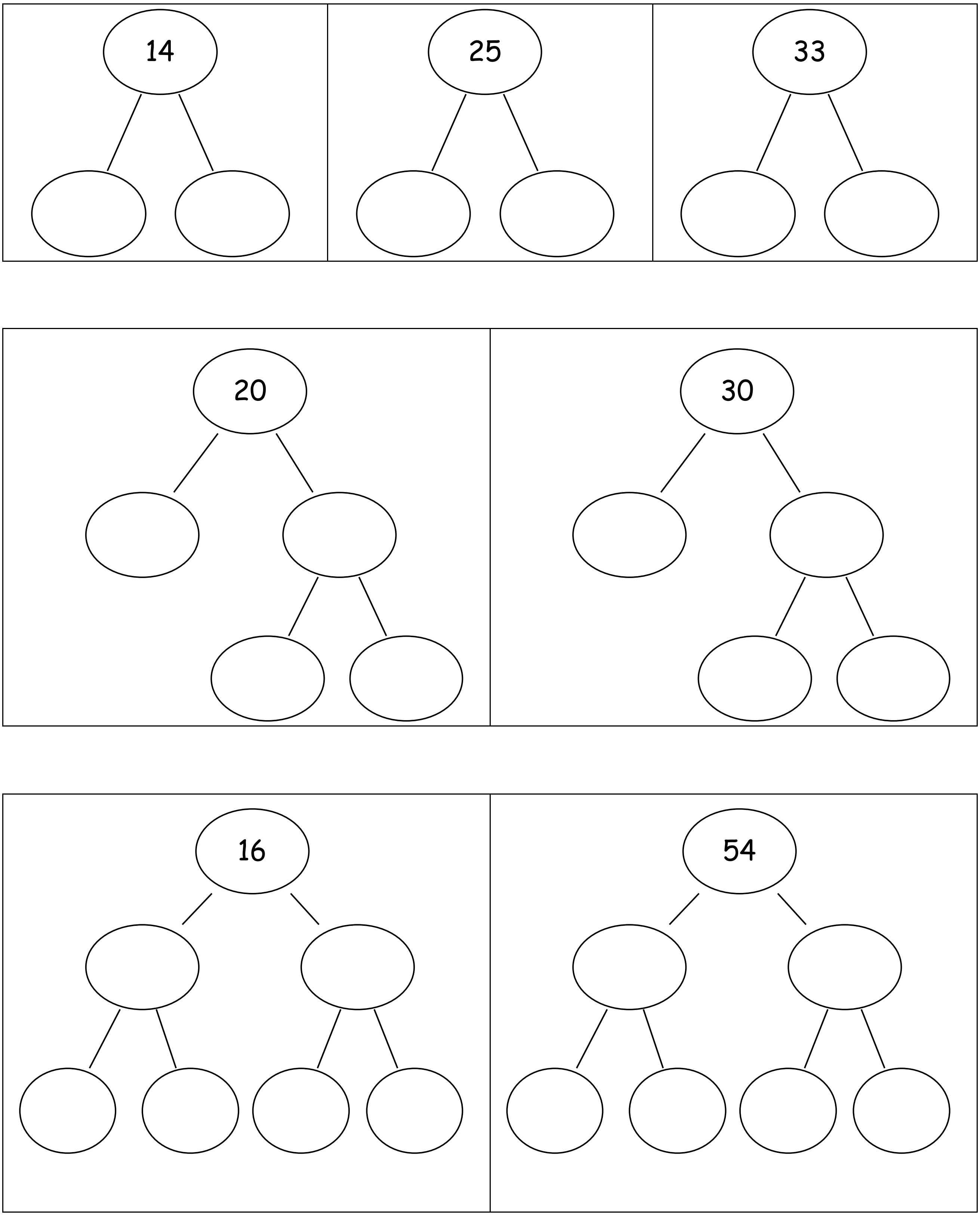
die Primzahl

lässt sich nicht
weiter zerlegen

die Zerlegungszahlen

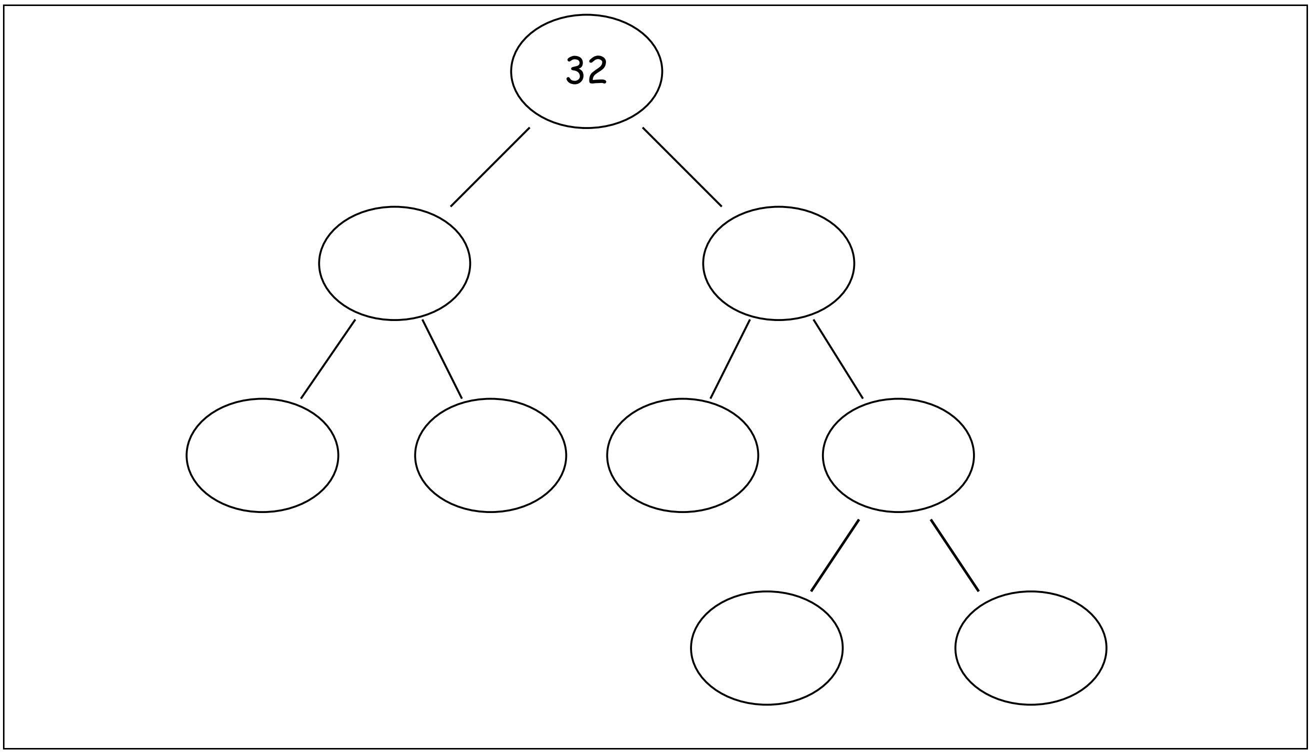
Zerlegungsbäume lösen

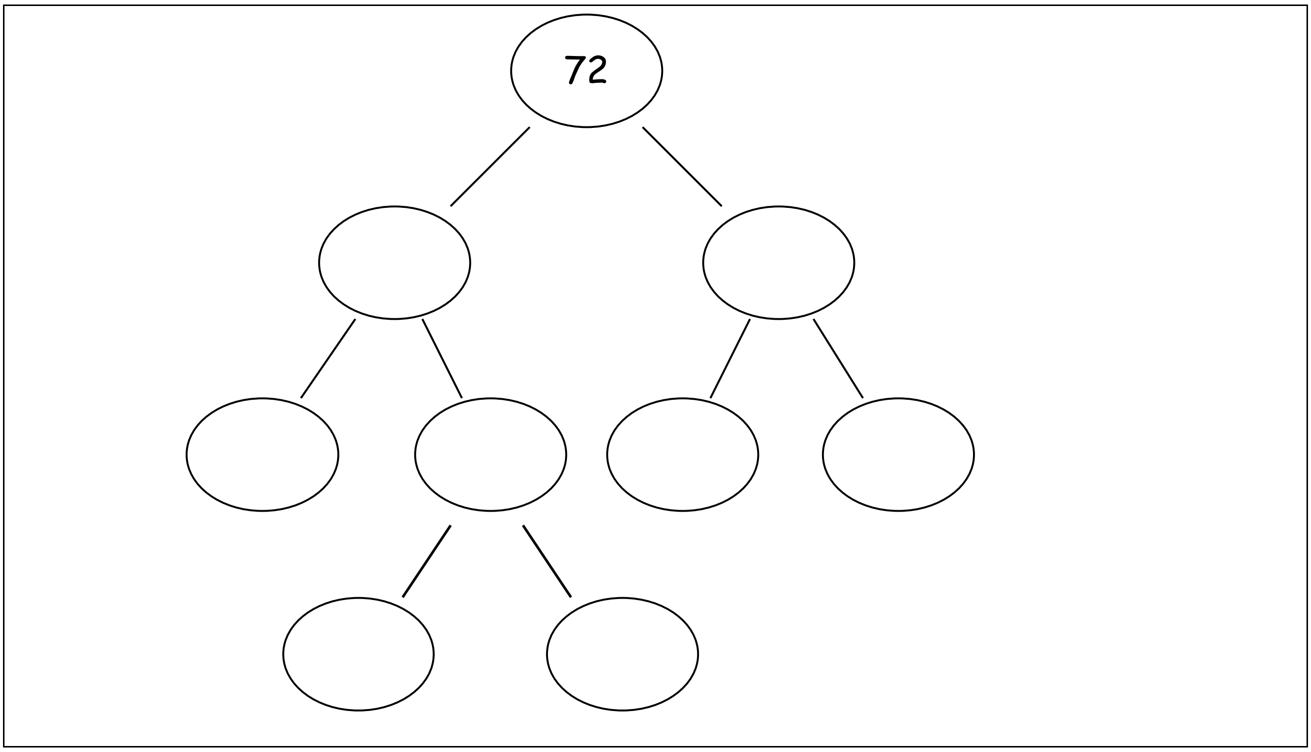
Rechne die Zerlegungsbäume aus.



Zerlegungsbäume lösen

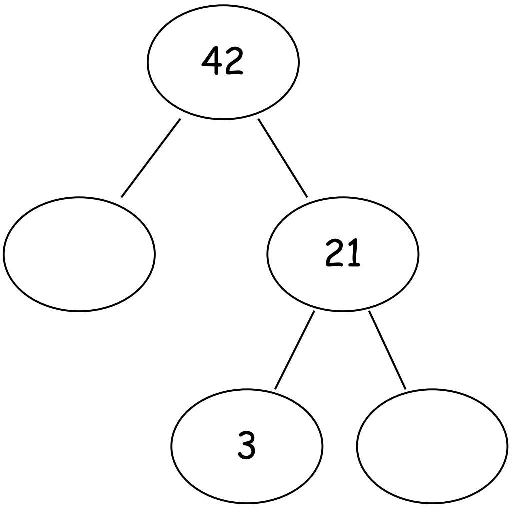
Rechne die Zerlegungsbäume aus.





Zerlegungsbäume lösen

Könnt ihr die Zerlegungsbäume lösen? Begründet.



Kann man den Zerlegungsbaum lösen?

Ja ☐ Nein ☐ , weil

____

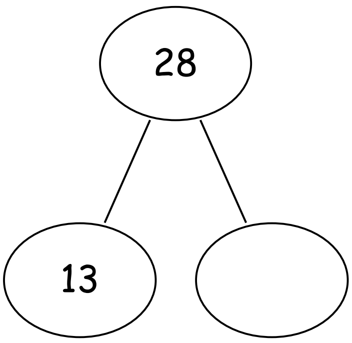
____

____

____

____

____



Kann man den Zerlegungsbaum lösen?

Ja ☐ Nein ☐ , weil

____

____

____

____

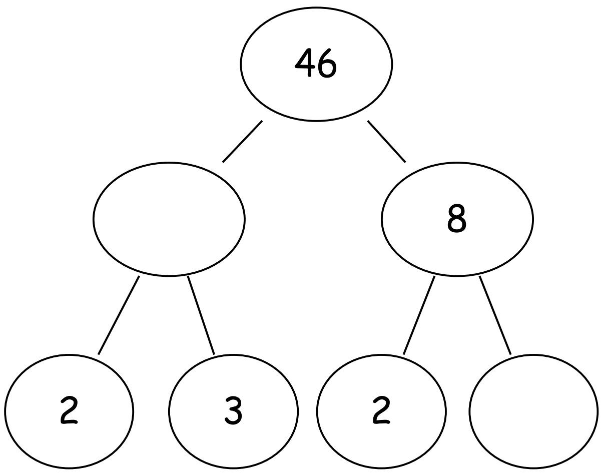
____

____

Benutzt die Mathewörter aus dem Wortspeicher.

Zerlegungsbäume lösen

Könnt ihr die Zerlegungsbäume lösen? Begründet.



Kann man den Zerlegungsbaum lösen?

Ja ☐ Nein ☐ , weil

____

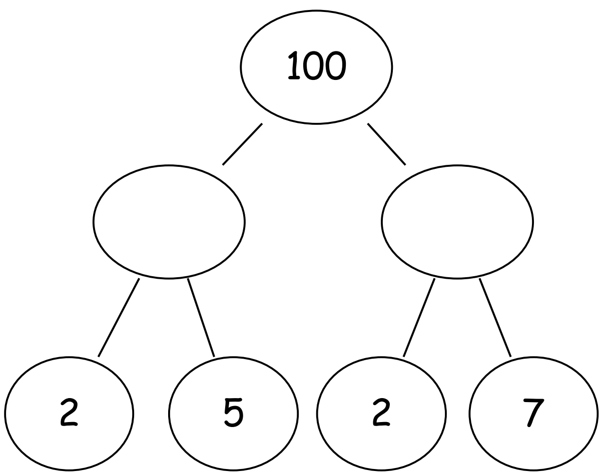
____

____

____

____

____



Kann man den Zerlegungsbaum lösen?

Ja ☐ Nein ☐ , weil

____

____

____

____

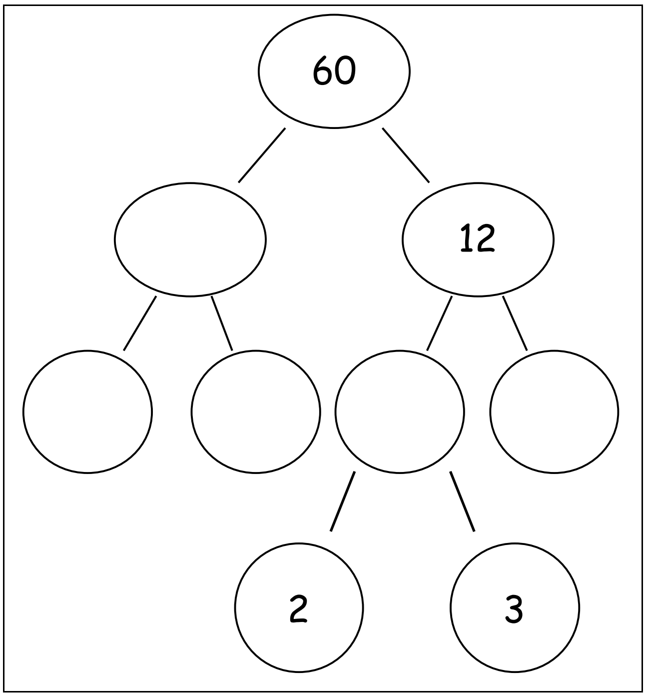
____

____

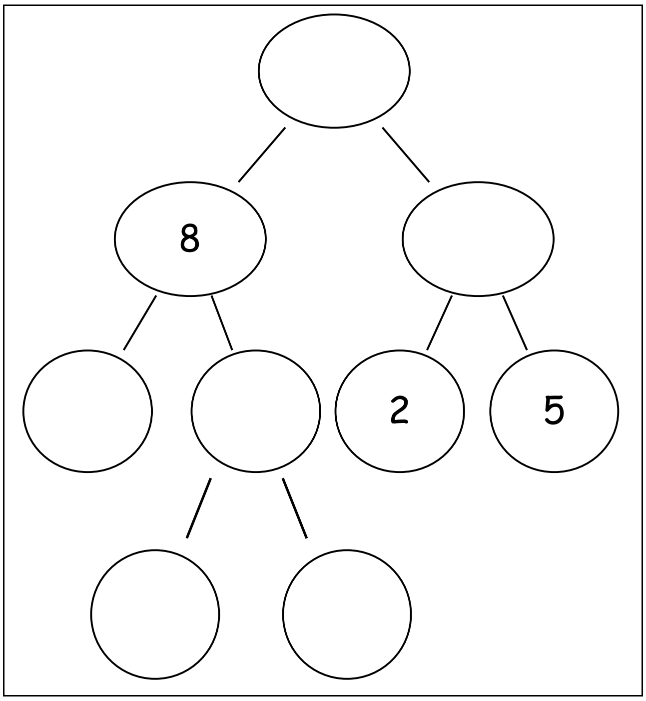
Benutzt die Mathewörter aus dem Wortspeicher.

Zerlegungsbäume lösen

Vervollständigt die Zerlegungsbäume. Beschreibt, wie ihr vorgegangen seid.



So gehen wir vor:

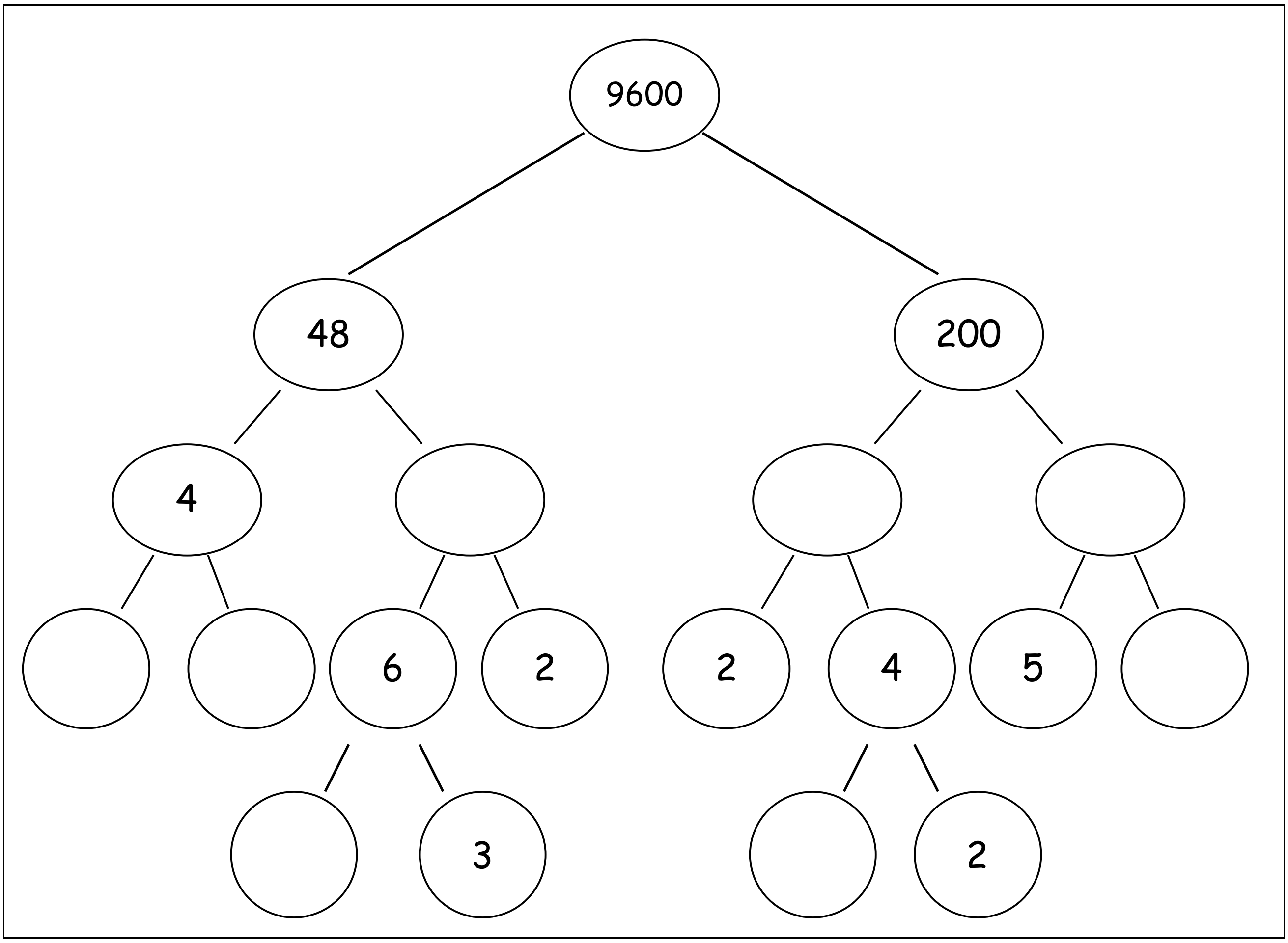


So gehen wir vor:

Benutzt die Mathewörter aus dem Wortspeicher.

Zerlegungsbäume lösen

Vervollständigt die Zerlegungsbäume. Beschreibt, wie ihr vorgegangen seid.



So gehen wir vor:

____

____

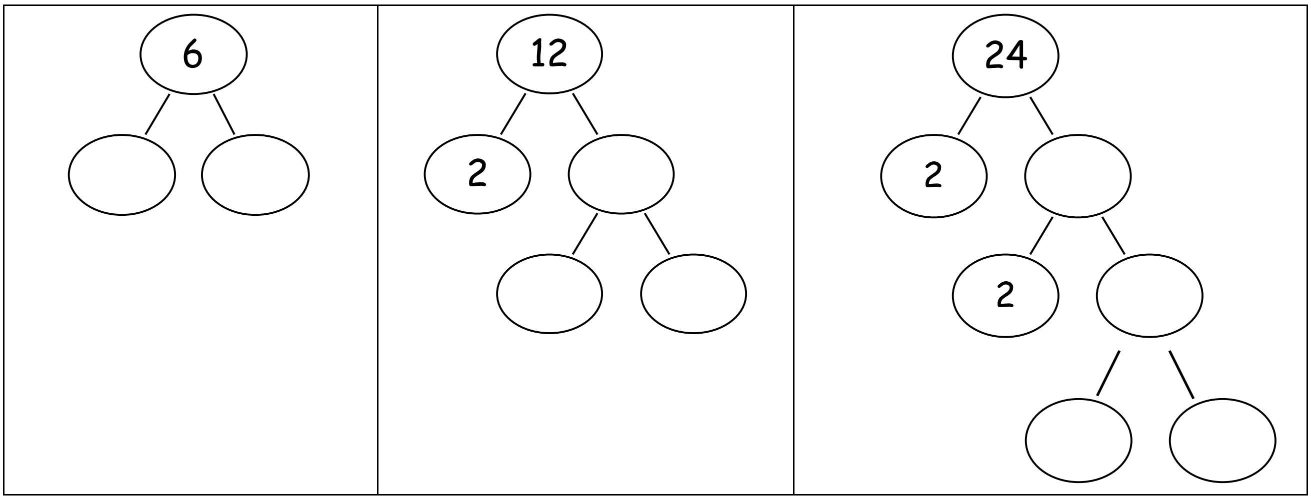
____

____

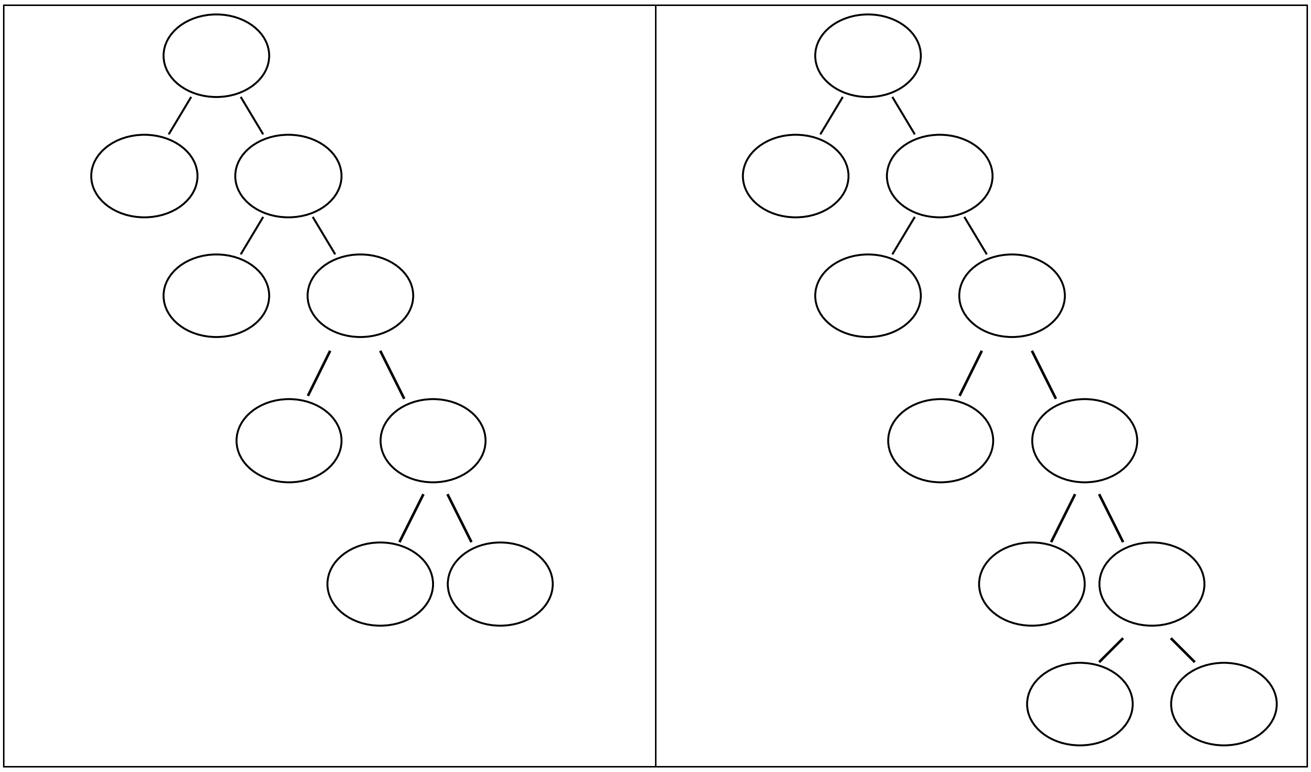
Benutzt die Mathewörter aus dem Wortspeicher.

Zerlegungsbäume lösen

Rechne die Zerlegungsbäume mit den Startzahlen 6, 12 und 24 aus.



Was fällt dir auf? Setze das Muster fort.



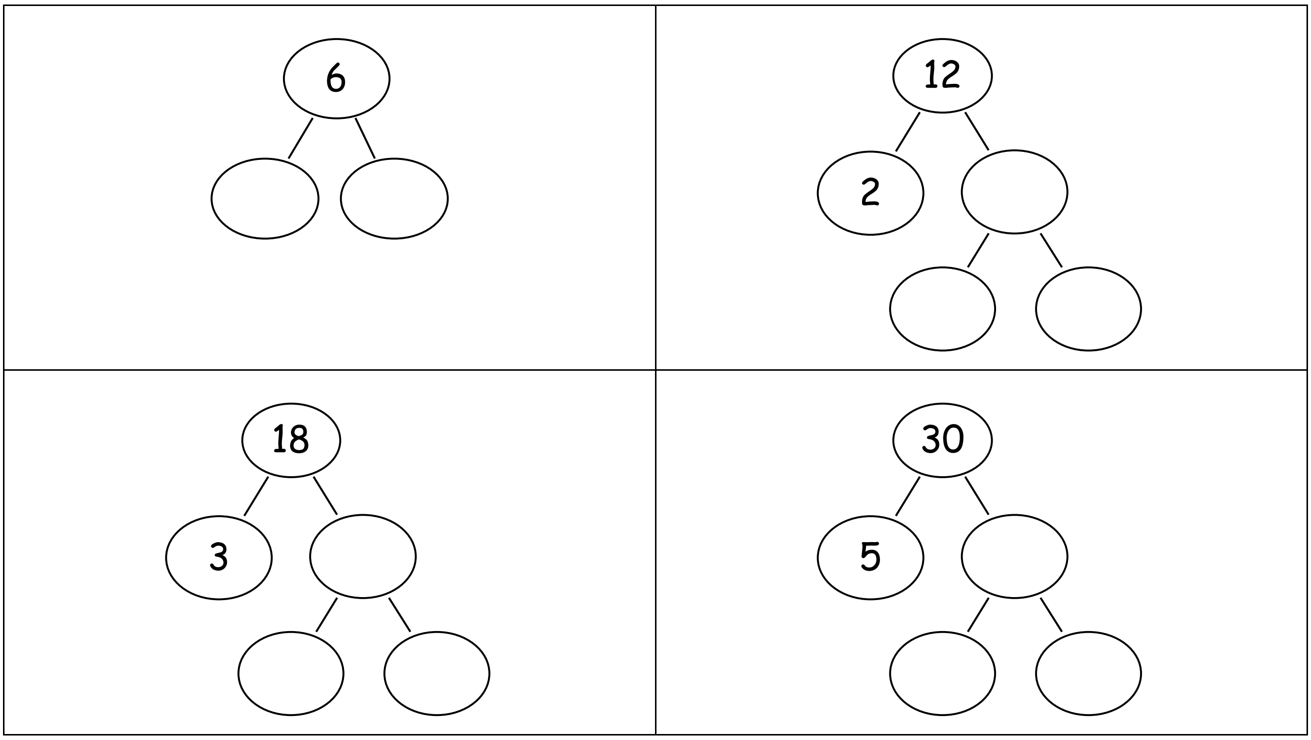
Beschreibt das Muster. Die Mathewörter aus dem Wortspeicher können euch helfen.

____

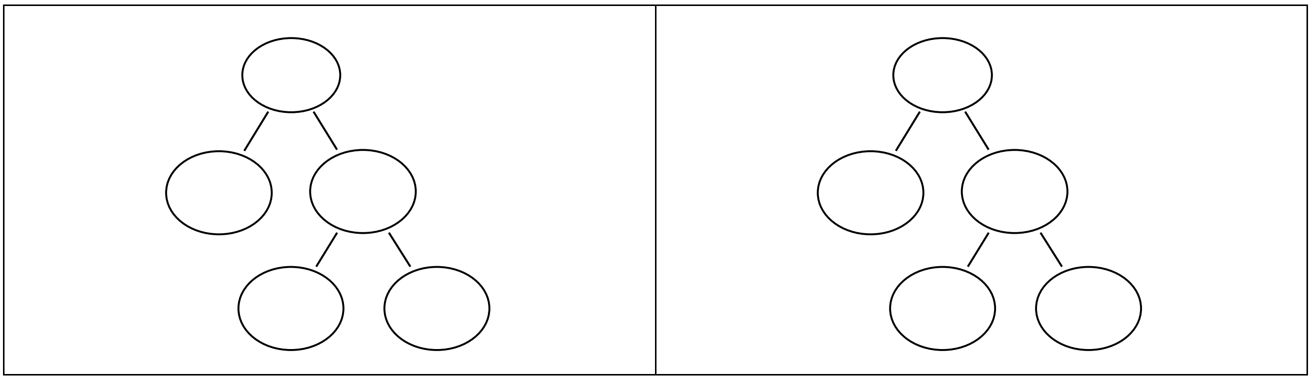
____

Zerlegungsbäume lösen

Rechne die Zerlegungsbäume mit den Startzahlen 6, 12, 18 und 30 aus.



Was fällt dir auf? Setze das Muster fort.



Beschreibt das Muster. Die Mathewörter aus dem Wortspeicher können euch helfen.

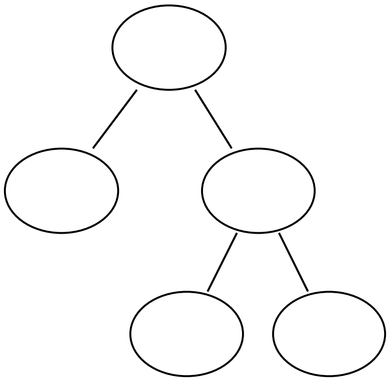
____

____

____

Zerlegungsbäume lösen

Welche Zahlen passen in die Zerlegungsbäume?
Füge die passenden Zahlen ein. Begründe deine Entscheidung.



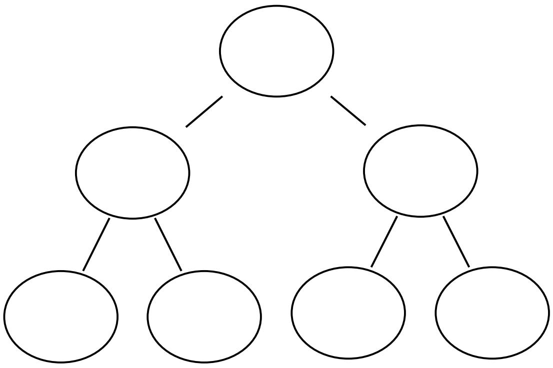
5
12
2 7
3
70
35 6

Diese Zahlen passen in den Zerlegungsbaum, weil ...

___

___

___



2 10 7 2
5
24
6
60
3
4

Diese Zahlen passen in den Zerlegungsbaum, weil ...

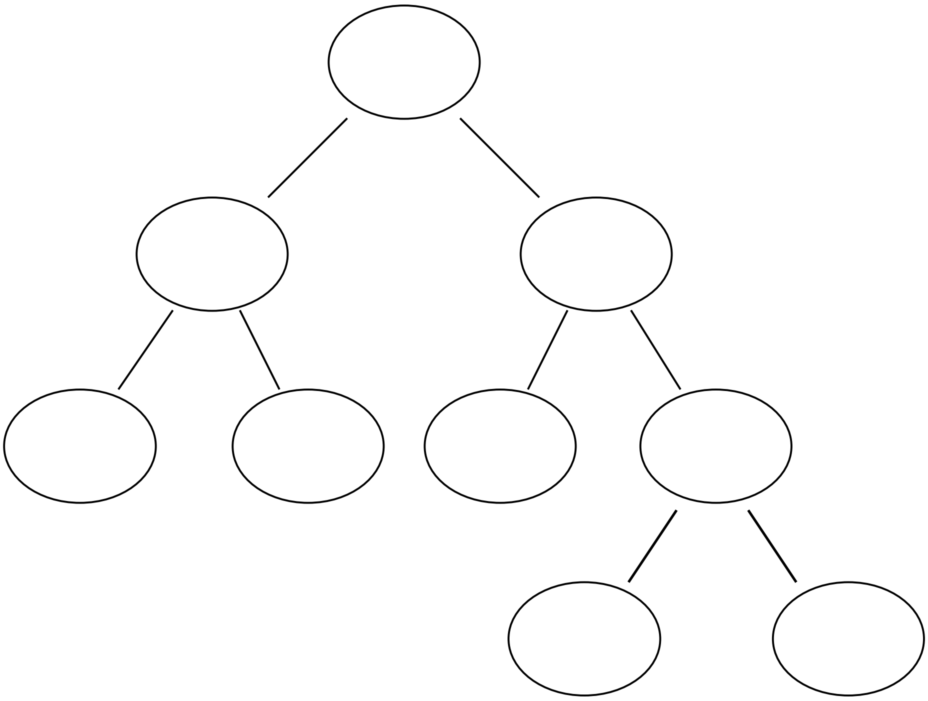
___

___

___

Zerlegungsbäume lösen

Welche Zahlen passen in den Zerlegungsbaum?
Füge die passenden Zahlen ein. Begründe deine Entscheidung.



2

3 72

9

2

5

6 8

2

4 48 2

Diese Zahlen passen in den Zerlegungsbaum, weil ...

____

____

____

Zerlegungsbäume sichern

Erfinde eigene Zerlegungsbäume. Male wie Piko.

Erkläre einem anderen Kind, wie du in einem Zerlegungsbaum rechnen musst.