Infopapier:

Kontinuität von flächigen Darstellungen

Grundsätzliches

Alle Darstellungsmittel sind einerseits **Lernhilfen**, da sie mathematische Sachverhalte über einführende Phasen hinweg verständlich und kommunizierbar machen. Andererseits sind sie aber auch **Lernstoff**, weil ihre jeweiligen Bedeutungen und die Formen des Gebrauchs erst erlernt werden müssen. Daher ist ein kontinuierlicher Einsatz gut ausgewählter, miteinander harmonierender Darstellungsmittel über die (Vor-)Schulzeit hinweg wichtig.

Geeignete Darstellungsmittel ...

- verkörpern fundamentale Ideen der Arithmetik;
- sind über die Schuljahre hinweg fortsetzbar, sodass sie vielfältig nutzbar sind und sich ihre Strukturen auf unterschiedliche Inhaltsbereiche und Arbeitsformen anwenden lassen;
- helfen, die Verfestigung des zählenden Rechnens zu vermeiden bzw. abzubauen;
- gestatten Übertragungen in eine von den Schülern zeichenbare Form, sodass die Zahldarstellungen und die arithmetischen Operationen im Kopf vorstellbar sind;
- ermöglichen es den Schülern, eigene Vorgehensweisen zu entwickeln, um diese mit den Mitschülerinnen und Mitschülern auszutauschen und zu diskutieren;
- zeichnen sich durch Übersichtlichkeit und leichte Handhabbarkeit aus und verursachen möglichst geringe Kosten.

Punktefelder und Rechtecke von Klasse 1 bis 8

Das Punktefeldplakat liefert einen Gesamtüberblick über die vielfältigen sowie kontinuierlichen Einsatzmöglichkeiten von **Punktefeldern und damit verwandten Rechtecken**. Es handelt sich dabei um konkrete Beispiele für flächige Darstellungsmittel, mit deren Hilfe **multiplikative Strukturen** über mehrere Schuljahre hinweg verdeutlicht werden können. Diese Darstellungsmittel spielen also während der gesamten Schulzeit – aber durchaus auch davor und danach – eine bedeutende Rolle, weil sie zu den unterschiedlichsten mathematischen Inhalten zentrale, aufeinander aufbauende Vorstellungen vermitteln. Demzufolge beinhalten sie viele Analogien, die von den Schülerinnen und Schülern entdeckt, beschrieben und weiterentwickelt werden können.

Das Punktefeldplakat besteht aus vier Bereichen, die aufeinander abgestimmt sind und Kontinuität multiplikativer Strukturen von Klasse 1 bis 8 darstellen:

- **Bereich oben links:** *Multiplikation natürlicher Zahlen*

  Dieser Bereich visualisiert die Multiplikation von natürlichen Zahlen auf der Grundlage rechteckiger Punktefelder. Diese Punktefelder sollen nicht nur eine inhaltlich-anschauliche Vorstellung von der Multiplikation vermitteln, sondern darüber hinaus auch Verwandtschaften zwischen den Multiplikationsaufgaben aufzeigen. Dadurch können Zusammenhänge zwischen den Aufgaben erkannt und als Rechenstrategien genutzt werden, die später das Rechnen im „Großen Einmaleins“ verständlicher und nachvollziehbarer gestalten.

- **Bereich unten links:** *Multiplikation von Bruchzahlen*

  Die Multiplikation endet selbstverständlich nicht bei den natürlichen Zahlen. Auch nach der Grundschule geht es weiter. Die Schülerinnen und Schüler beschäftigen sich nämlich während der Sekundarstufe I mit der Multiplikation in anderen Zahlbereichen und dabei ist es äußerst wichtig, dass auf Darstellungsmittel zurückgegriffen wird, die bereits aus der Grundschule bekannt sind. Beispielsweise lassen sich die zuvor genannten rechteckigen Punktefelder dazu verwenden, um Bruchzahlen anschaulich darzustellen sowie die Multiplikation in diesem Zahlbereich zu visualisieren. Allerdings müssen die Punktefelder umgedeutet und teilweise weiterentwickelt werden. So wird eine gewisse Anzahl ausgewählter Punkte nun immer in Relation zu der gesamten Anzahl von Punkten innerhalb eines Punktefeldes gesehen. Daraus ergeben sich mathematische Begriffe wie Anteil und Ganzes, die fundamental für das Verständnis von Bruchzahlen und der Bruchrechnung sind. In diesem Zusammenhang kann es sogar sinnvoll sein, Punktefelder als Rechtecke zu verallgemeinern, weil die gleichmäßige Einteilung eines allgemeinen Rechtecks besser verändert werden kann als die eines Punktefeldes. Das macht sich nicht nur beim Vergröbern und Verfeinern von Einteilungen bemerkbar, die eine Vorstellung vom Kürzen und Erweitern von Brüchen vermitteln. Noch deutlicher wird der Vorteil dieser Verallgemeinerung, wenn man Anteile vervielfachen (Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl) oder den Anteil von einem Anteil (Multiplikation zweier Bruchzahlen) bilden möchte.

- **Bereich oben rechts:** *Rechengesetze der Multiplikation*

  Dieser Bereich zeigt, wie rechteckige Punktefelder auf verschiedenste Weisen so umgebaut und strukturiert werden können, dass sich daraus mehrere Rechengesetze der Multiplikation ergeben. Wenn zum Beispiel ein Feld aus drei Reihen mit jeweils fünf Punkten (formal: 3 • 5) um 90° gedreht wird, dann erhält man ein Feld aus fünf Reihen mit jeweils drei Punkten (formal: 5 • 3), wobei die Anzahl sämtlicher Punkte trotz der Bewegung unverändert bleibt. Es handelt sich hierbei also um eine anschauliche Deutung des Kommutativgesetzes der Multiplikation. Beim Konstanzgesetz der Multiplikation findet in anschaulicher Hinsicht ebenfalls eine Bewegung des Punktefeldes statt, allerdings wird dabei eine vollkommen neue rechteckige Form geschaffen. Das ursprüngliche Punktefeld wird nämlich in gleich große Stücke eingeteilt (halbiert, gedrittelt, usw.) und diese Einzelteile werden an eine andere Stelle des Feldes verschoben. Dadurch erhält man ein neues Punktefeld, das jedoch weiterhin dieselbe Anzahl an Punkten aufweist. Etwas anders verhält es sich beim Assoziativgesetz der Multiplikation sowie beim Distributivgesetz. Dort werden zwar keine Einzelteile des Punktefeldes bewegt, aber dafür infolge von Handlungen des Zerlegens und Gruppierens gerade erst erzeugt.

Diese erzeugten Einzelteile stehen in einer bestimmten Beziehung zur Gesamtfigur und mit ihrer Hilfe lässt sich die gesamte Anzahl an Punkten besser ermitteln. So könnte man zum Beispiel hinsichtlich des Assoziativgesetzes ein Punktefeld aus sechs Reihen mit jeweils fünf Punkten entweder so zerlegen, dass man drei gleich große Gruppen erhält, die jedes Mal aus zwei Reihen mit jeweils fünf Punkten bestehen (formal: (2 • 5) • 3). Oder man teilt das Punktefeld in nur zwei Gruppen ein und jede Gruppe besteht aus drei Reihen mit jeweils fünf Punkten (formal: 2 • (5 • 3)).

- **Bereich unten rechts:** *Distributivgesetz*

  Zwar lernen die Schülerinnen und Schüler das Distributivgesetz bereits während der Grundschulzeit im Sinne einer Rechenstrategie zur Lösung komplexerer Multiplikationsaufgaben kennen, jedoch wird dieses Gesetz in der Sekundarstufe I wiederaufgegriffen, verallgemeinert und weiterentwickelt. Zur Verallgemeinerung des Gesetzes dienen insbesondere Rechtecke, die sich flexibler entlang ihrer Seiten zerlegen lassen. Das Malkreuz ist in diesem Zusammenhang ebenso ein ideales Mittel, um die zerlegten Seitenlängen formal darzustellen und sowohl die Größen der Teilflächen als auch die Flächengröße des gesamten Rechtecks tabellarisch zu bestimmen. Im weiteren Verlauf der Sekundarstufe I können die flächigen und tabellarischen Darstellungsmittel sogar zur Deutung der Binomischen Formeln genutzt werden. Es handelt sich nämlich bei den Binomischen Formeln um besondere Spezialfälle des Distributivgesetzes.