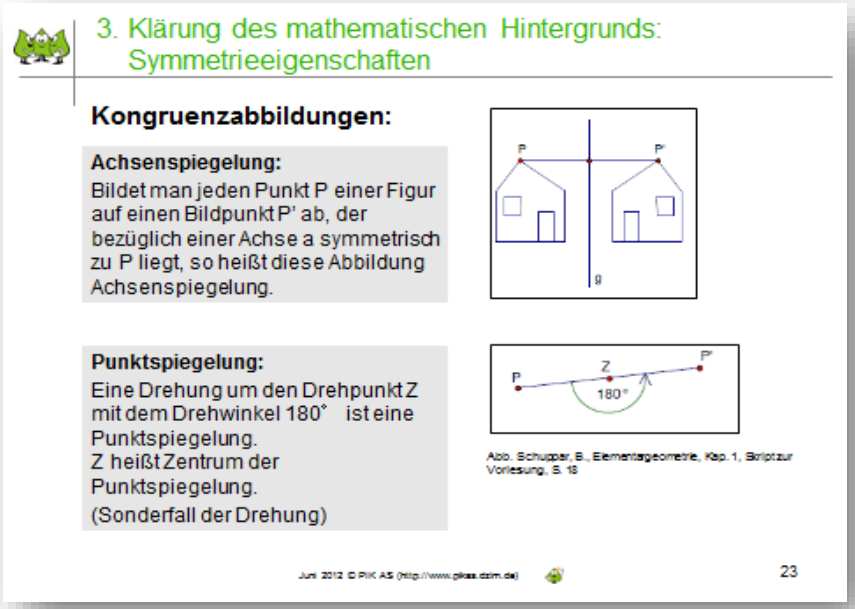
Haus 2: Kontinuität von Klasse 1 bis 6



3. Klärung des mathematischen Hintergrunds: Symmetrieeigenschaften

Kongruenzabbildungen:

Achsenspiegelung:
Bildet man jeden Punkt P einer Figur auf einen Bildpunkt P' ab, der bezüglich einer Achse a symmetrisch zu P liegt, so heißt diese Abbildung Achsenspiegelung.

Punktspiegelung:
Eine Drehung um den Drehpunkt Z mit dem Drehwinkel 180° ist eine Punktspiegelung.
Z heißt Zentrum der Punktspiegelung.
(Sonderfall der Drehung)

Abb. Schuppar, B., Elementargeometrie, Kap. 1, Skript zur Vorlesung, S. 18

Juni 2012 © PIK AS (http://www.pikas.dzlm.de)

23

Modul 2.3
Langfristiger Kompetenzaufbau aufgezeigt an der fundamentalen Idee „Symmetrie“

Ministerium für
Schule und Bildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

technische universität
dortmund

Deutsche
Telekom
Stiftung

Hinweise zu den Lizenzbedingungen

Diese Folie gehört zum Material und darf nicht entfernt werden.

- Dieses Material wurde vom PIKAS-Team für das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) konzipiert und kann unter der Creative Commons Lizenz BY-SA: Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International weiterverwendet werden.
- Das bedeutet: Alle Folien und Materialien können für Zwecke der Aus- und Fortbildung unter der Bedingung heruntergeladen, verändert und genutzt werden, dass alle Quellenangaben erhalten bleiben, PIKAS als Urheber genannt und das neu entstandene Material unter den gleichen Bedingungen weitergegeben wird.
- Von der Weitergabe ausgenommen sind Fotos, die erkennbar reale Personen zeigen.
- Bildnachweise und Zitatquellen finden sich auf den jeweiligen Folien bzw. in den Zusatzmaterialien.
- Weitere Hinweise und Informationen zu PIKAS finden Sie unter http://pikas.dzlm.de.

Annäherung an das Thema

Aufgabe:

- Betrachten Sie bitte das folgende Bild mit der „Symmetriebrille“.
- Halten Sie Ihre Beobachtungen / Entdeckungen stichpunktartig fest.
- Tauschen Sie sich bitte in einer „Murmelrunde“ mit Ihren Nachbarn / mit Ihrer Tischgruppe aus.

Annäherung an das Thema

Annäherung an das Thema

„Symmetrie, ob man ihre Bedeutung weit oder eng faßt, ist *eine* Idee, vermöge derer der Mensch durch die Jahrtausende seiner Geschichte versucht hat, Ordnung, Schönheit und Vollkommenheit zu begreifen und zu schaffen.“

(Hermann Weyl, Symmetrie, Basel 1955, S.13)

Aufbau des Fortbildungsmoduls 2.3

1. **Begriffsklärung:** Symmetrie als „fundamentale Idee“

2. **Bewusstmachung des Facettenreichtums:**
   Symmetrien in unterschiedlichen Kontexten

3. **Klärung des mathematischen Hintergrunds:**
   - Symmetrieeigenschaften: Um welche geht es?
   - Aktivität: Untersuchung ausgewählter Beispiele

4. **Aspekte der „Verallgemeinerten Symmetrie“ kennen lernen:** Ausgewogenheit – Optimalität – Regelmäßigkeit

5. **Über Konsequenzen für den Unterricht nachdenken:**
   - Wichtige Grunderfahrungen
   - Warum es sich lohnt, Symmetrien zu kennen

Aufbau des Fortbildungsmoduls 2.3

6. **Symmetrie als durchgängiges Prinzip an unterschiedlichen Unterrichtsinhalten in einer Jahrgangsstufe untersuchen:**
   - Horizontaler Schnitt: Inhalte aufgeführt am 3. und 4. Jahrgang
   - Aktivität: Zuordnung zu TOP 4 und/oder TOP 5

7. **Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen untersuchen:**
   - Aktivität: Auseinandersetzung mit ausgewählten Aufgabenstellungen zur Symmetrie in Zahlenfeldern
   - Dokumentation aus den jeweiligen Unterrichtsdurchführungen

8. **Abschluss und weitere Hinweise**

1. Begriffsklärung: Symmetrie als „fundamentale Idee“

Begriffsklärung (Heinrich Winter):

Bei der Auswahl, Anordnung und Akzentuierung der Inhalte mathematischen Lernens kommt es darauf an, „sich an fundamentalen Ideen der Mathematik zu orientieren; sie sind für das jetzige wie für das zukünftige Handeln von gleichbleibend großer Bedeutung.“

Winter, Heinrich: Fundamentale Ideen in der Grundschule: http://www.schulabakus.de/Wechselspiele/winter-ideen.html

Download vom 06.09.2011

1. Begriffsklärung: Symmetrie als „fundamentale Idee“

Begriffsklärung (Heinrich Winter):

„Fundamentale Ideen lassen sich im Unterricht anhand unterschiedlicher mathematischer Fragestellungen und auf verschiedenen Niveaustufen immer wieder aufgreifen. Zugleich öffnen sie Übergänge zu angrenzenden Lernfeldern (...). Damit verknüpfen sie mathematische und außermathematische Phänomene in inhaltlich sinnvoller Weise.“

Fundamentale Ideen sind ...

„Ideen, die starke Bezüge der Wirklichkeit haben, verschiedene Aspekte und Zugänge aufweisen, sich durch hohen inneren Beziehungsreichtum auszeichnen und in den folgenden Schuljahren immer weiter ausbauen lassen.“

Winter, Heinrich: Fundamentale Ideen in der Grundschule: http://www.schulabakus.de/Wechselspiele/winter-ideen.html

Download vom 06.09.2011

1. Begriffsklärung: Symmetrie als „fundamentale Idee“

Fundamentale Ideen in der Grundschule (Heinrich Winter):

- Stellenwertdarstellung von Zahlen
- Symmetrie
- Algorithmus
- Näherung
- Funktion
- Teil-Ganzes-Relation

1. Begriffsklärung: Symmetrie als „fundamentale Idee“

Fundamentale Ideen in der Grundschule (Heinrich Winter):

- Stellenwertdarstellung von Zahlen
- Symmetrie
- Algorithmus
- Näherung
- Funktion
- Teil-Ganzes-Relation

1. Begriffsklärung: Symmetrie als „fundamentale Idee“

„Die Symmetrie ist eine weit zu fassende Idee,
sie ist sozusagen kosmisches Prinzip“

„Überall, wo Muster erkennbar sind,
liegt ein Symmetriephänomen vor.“

„Offenbar ist unser Wahrnehmen von Erscheinungen der Welt um uns stark geprägt von unserer Fähigkeit, sensorische Eindrücke in zu vergleichende Teile zu gliedern. Wahrnehmen ist Erkennen von gegliederten Gestalten, von Mustern.“

Winter, Heinrich: Fundamentale Ideen in der Grundschule: http://www.schulabakus.de/Wechselspiele/winter-ideen.html

Download vom 06.09.2011

2. Bewusstmachung des Facettenreichtums: Symmetrien in unterschiedlichen Kontexten

Architektur:

Fotos privat
(A. Westermann, Dortmund)

2. Bewusstmachung des Facettenreichtums: Symmetrien in unterschiedlichen Kontexten

Natur und Umwelt:

Abb.: A. Westermann

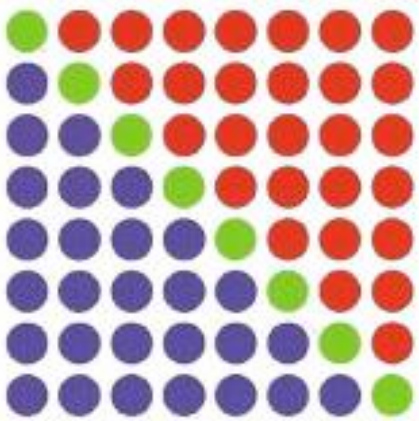
2. Bewusstmachung des Facettenreichtums: Symmetrien in unterschiedlichen Kontexten

Natur und Umwelt:

Hasenfenster, Spielkarte, : Privat (A. Westermann)

2. Bewusstmachung des Facettenreichtums: Symmetrien in unterschiedlichen Kontexten

Mathematik:



$11 \times 11 = 121$

$111 \times 111 = 12321$

$1111 \times 1111 = 1234321$

...

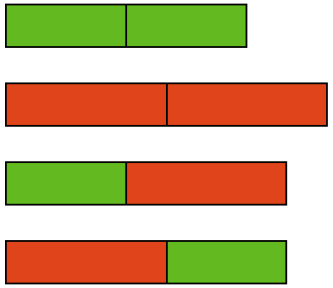
$111111111 \times 111111111 =$
12345678987654321

6 = 3 + 3

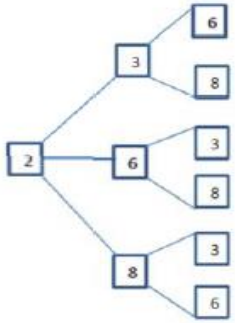
8 = 4 + 4

7 = 3 + 4

= 4 + 3



1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1



Abbildungen obere Reihe: 1 und 2: Heinz Klaus Strick: Mathematik ist schön: Immerwährender Kalender, Leverkusen 2011; restliche Bilder erstellt durch studentische Hilfskraft

3. Klärung des mathematischen Hintergrunds: Symmetrieeigenschaften

Grundtypen der Symmetrie

Kongruente Figuren

Kongruenzabbildungen in der Ebene

Verknüpfungen von Kongruenzabbildungen

3. Klärung des mathematischen Hintergrunds: Symmetrieeigenschaften

Grundtypen der Symmetrie:

- Spiegelung
- Drehung
- Verschiebung

3. Klärung des mathematischen Hintergrunds: Symmetrieeigenschaften

Kongruente Figuren:

Eine geometrische Figur heißt *symmetrisch*, wenn sie bei einer von der identischen Abbildung verschiedenen geometrischen Abbildung auf sich abgebildet wird (Kongruenz). Kongruente (deckungsgleiche) Figuren stimmen in entsprechenden Streckenlängen und Winkelgrößen überein.

Eine ebene Figur ist *achsensymmetrisch*, wenn sie bei Spiegelung an einer Geraden auf sich abgebildet wird. Die Spiegelachse heißt dann die *Symmetrieachse* der Figur.

3. Klärung des mathematischen Hintergrunds: Symmetrieeigenschaften

Kongruente Figuren:

Eine ebene Figur ist *punktsymmetrisch*, wenn sie bei Spiegelung an einem Punkt (Drehung um 180°) auf sich abgebildet wird. Der Punkt, an dem gespiegelt wird, heißt *Symmetriezentrum* der Figur.

Eine ebene Figur heißt *drehsymmetrisch*, wenn sie bei Drehung um einen Punkt (Drehwinkel α mit $0° < \alpha < 360°$) auf sich abgebildet wird. Man spricht von n-zähliger Drehsymmetrie, wenn für den Winkel $\alpha = \frac{1}{n} \cdot 360°$ gilt. Das Symmetriezentrum heißt dann n-zählig oder n-strahlig.

Abb. Schuppar, B., Elementargeometrie, Kap. 1, Skript zur Vorlesung, S. 17

3. Klärung des mathematischen Hintergrunds: Symmetrieeigenschaften

Kongruenzabbildungen:

Jede Art der Symmetrie lässt sich durch eine Bewegung (Kongruenzabbildung) erzeugen.

Eine Abbildung f nach f‘ heißt Kongruenzabbildung, wenn Bild und Urbild kongruent (deckungsgleich) sind.
Kongruenzabbildungen sind geraden-, längen- und winkeltreu.

Beispiele für Kongruenzabbildungen:

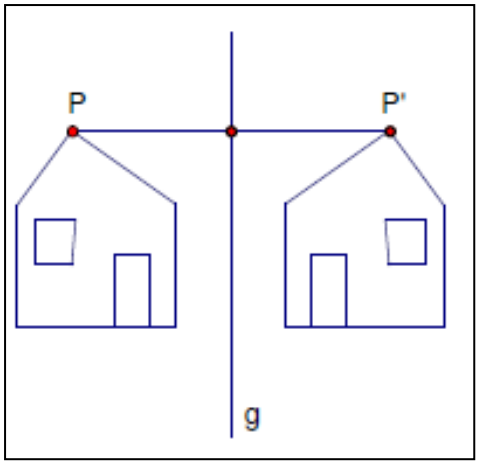
- Spiegelung
- Drehung
- Verschiebung
- Gleit-/Schubspiegelung

3. Klärung des mathematischen Hintergrunds: Symmetrieeigenschaften

Kongruenzabbildungen:

Achsenspiegelung:

Bildet man jeden Punkt P einer Figur auf einen Bildpunkt P' ab, der bezüglich einer Achse a symmetrisch zu P liegt, so heißt diese Abbildung Achsenspiegelung.



Punktspiegelung:

Eine Drehung um den Drehpunkt Z mit dem Drehwinkel 180° ist eine Punktspiegelung.
Z heißt Zentrum der Punktspiegelung.

(Sonderfall der Drehung)

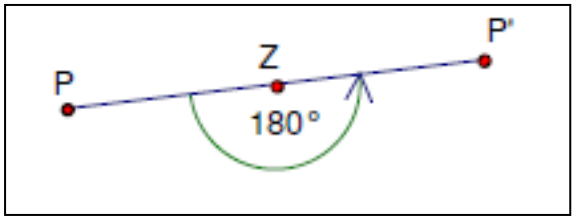


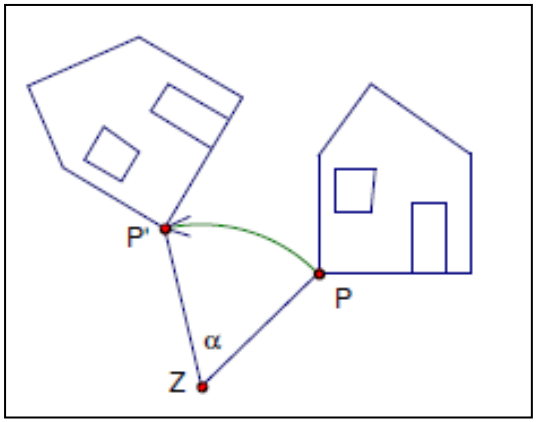
Abb. Schuppar, B., Elementargeometrie, Kap. 1, Skript zur Vorlesung, S. 18

3. Klärung des mathematischen Hintergrunds: Symmetrieeigenschaften

Kongruenzabbildungen:

Drehung:

Bewegt man jeden Punkt P einer Figur auf einem Kreis um den festen Punkt Z mit dem Radius um den Drehwinkel α , so entsteht eine Bildfigur. Diese Abbildung heißt Drehung (Rotation) um den Drehpunkt Z.



Verschiebung:

Verschiebt man jeden Punkt einer Figur gleich weit in dieselbe Richtung, so entsteht eine Bildfigur. Diese Abbildung heißt Verschiebung (Translation).

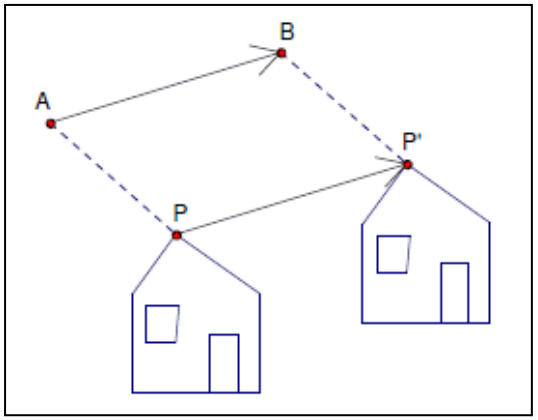


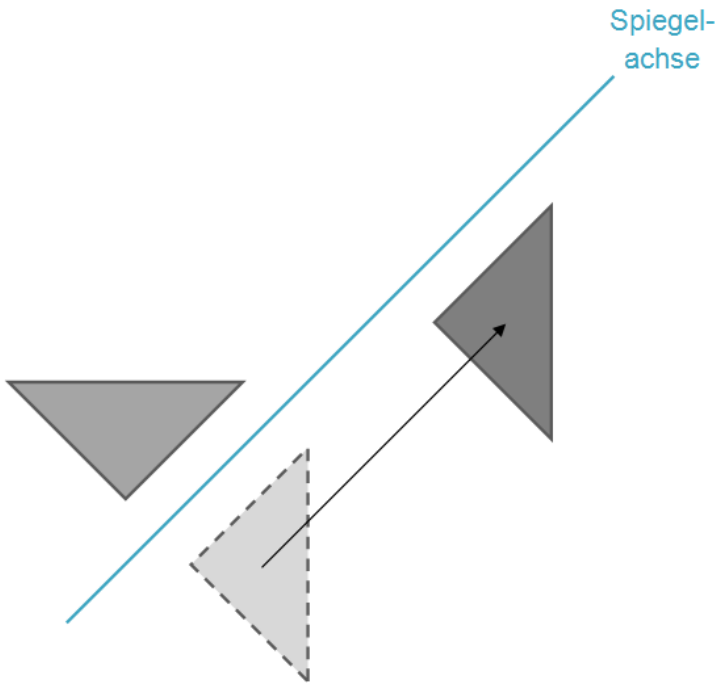
Abb. Schuppar, B., Elementargeometrie, Kap. 1, Skript zur Vorlesung, S. 18

3. Klärung des mathematischen Hintergrunds: Symmetrieeigenschaften

Kongruenzabbildungen:

Schubspiegelung:

Eine Schubspiegelung ist eine Hintereinanderausführung von Achsenspiegelung und Verschiebung parallel zur Achse oder umgekehrt.



3. Klärung des mathematischen Hintergrunds: Symmetrieeigenschaften

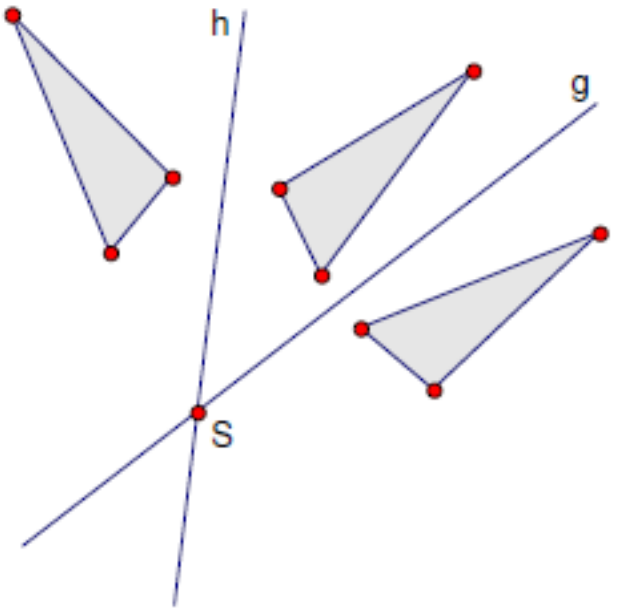
Verkettungen von Kongruenzabbildungen:

Das Hintereinanderausführen von Kongruenzabbildungen liefert stets eine Kongruenzabbildung.

Beispiel:

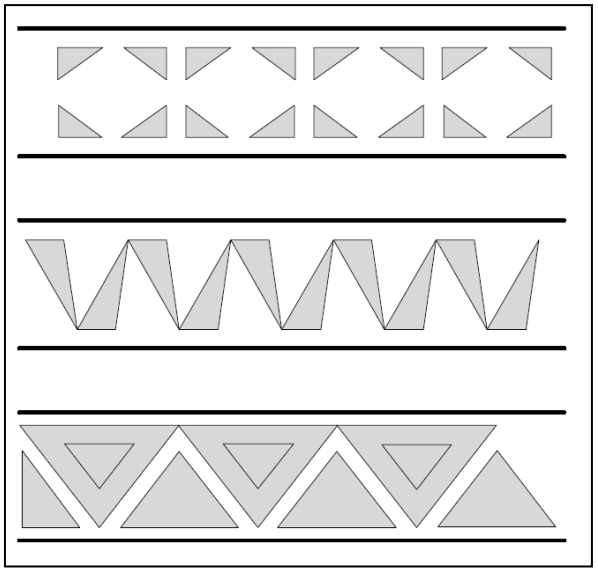
Das Hintereinanderausführen von zwei Achsenspiegelungen (g schneidet h im Punkt S) lässt sich ersetzen durch eine Drehung.

Schuppar, B., Elementargeometrie, Kap. 6, Skript zur Vorlesung, S. 12



3. Klärung des mathematischen Hintergrunds: Aktivität: Untersuchung ausgewählter Beispiele

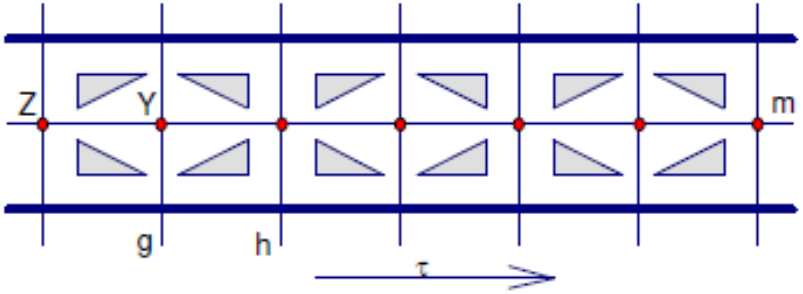
- Wählen Sie bitte allein oder zu zweit eine oder beide Abbildungen aus.
- Untersuchen Sie die Abbildung auf ihre Symmetrieeigenschaften.
- Halten Sie bitte Ihre Überlegungen und Entdeckungen durch Einzeichnen, Aufschreiben etc. fest.



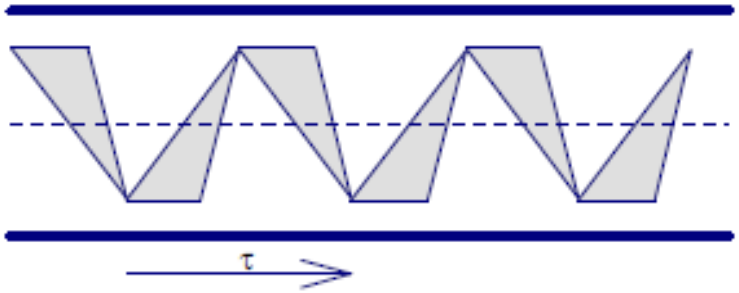
Schuppar, B., Elementargeometrie, Kap. 6, Skript zur Vorlesung, S. 12

3. Klärung des mathematischen Hintergrunds: Aktivität: Untersuchung ausgewählter Beispiele

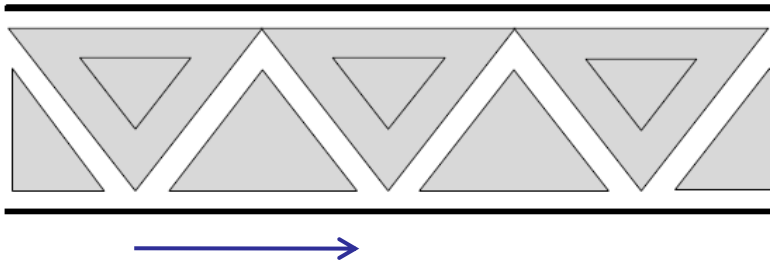
Beispiel 1:



Verschiebungs-, Dreh- und Achsensymmetrie



Schubspiegelung



Verschiebungs- und Achsensymmetrie

Schuppar, B., Elementargeometrie, Kap. 6, Skript zur Vorlesung, S. 12

4. Aspekte der „Verallgemeinerten Symmetrie“: Ausgewogenheit – Optimalität - Regelmäßigkeit

Die fundamentale Idee der Symmetrie spielt nicht nur in der Geometrie eine Rolle. In der sogenannten **„Verallgemeinerten Symmetrie“** wird eine Unterteilung in drei Aspekte unternommen:

1. Ausgewogenheit

- Prinzip des Gleichgewichts (z.B. Balance von Flugkörpern, aber auch von Argumenten, Kräften und Einflüssen)
- Prinzip der Gleichberechtigung (z.B. Positionen und Richtungen)
- Prinzip der Harmonie, des Ebenmaßes, der Vollkommenheit und der Schönheit (Musik, Architektur,...)

Graumann, Günter: Verallgemeinerte Symmetrie, in: mathematik lehren, 161/219, S. 12-15

2. Optimalität

Symmetrische Zustände sind optimal

- in Bezug auf besondere Zustände und Lagen (z.B. Lage von Extrema bei Parabeln)
- in Bezug auf die Funktionalität von Konstruktionen in Natur und Technik
- in Bezug auf die Ökonomie von Konstruktionen, Problembearbeitungen und Beweisführungen

Graumann, Günter: Verallgemeinerte Symmetrie, in: mathematik lehren, 161/219, S. 12-15

4. Aspekte der „Verallgemeinerten Symmetrie“: Ausgewogenheit – Optimalität - Regelmäßigkeit

3. Regelmäßigkeit

- Wiederholung bei geometrischen Formen (z.B. Ornamente)
- Wiederholung bei allgemeinen Formungen und Prozessen (z.B. Wochen- und Jahresrhythmus, Musik)
- Gesetzmäßigkeiten und Ordnungsprinzipien (z.B. Kommutativgesetz)

Graumann, Günter: Verallgemeinerte Symmetrie, in: mathematik lehren, 161/219, S. 12-15

5. Über Konsequenzen für den Unterricht nachdenken

Wie kann Schule helfen,
dass Schüler diesen kraftvollen,
verallgemeinerten, übertragbaren Begriff
der Symmetrie entwickeln,
der sich als durchdringendes Konzept
in vielen Aspekten des Lebens,
der Natur und der Kunst wieder findet?

Lorenz, Jens Holger: Symmetrie – Entwicklung einer Idee über dreizehn Schuljahre,
in: Schönbeck, Jürgen (ed.), Mosaiksteine moderner
Schulmathematik. Werner Ast zum 65. Geburtstag.
Heidelberg: Mattes Verlag (ISBN 978-3-86809-005-5/pbk).
Schriftenreihe der Pädagogischen Hochschule Heidelberg 51, 127-136 (2008)., S. 128

5. Über Konsequenzen für den Unterricht nachdenken

Symmetrie sollte als durchgängiges Prinzip beachtet werden,

- innerhalb einer Jahrgangsstufe in verschiedenen Themen (horizontal)
- in unterschiedlichen Jahrgangsstufen (vertikal)

damit die Schülerinnen und Schüler erfahren, dass es sich lohnt, Symmetriekenntnisse zu erwerben.

5. Über Konsequenzen für den Unterricht nachdenken

Das bedeutet:

Der Unterricht muss Lerngelegenheiten bieten, in denen die Schülerinnen und Schüler erfahren können, warum es sich lohnt, Symmetrien zu kennen ...

- als kreatives Mittel
- als Ordnungsmerkmal
- als Nebeneffekt
- als Anlass für Problemstellungen
- als Hilfe beim Problemlösen

A, M, W

B, D, E

H, U

11x11 = 121
111x111 = 12321
1111x1111 = 1234321
...
111 111 111 x 111 111

111=12345678987654321

5. Über Konsequenzen für den Unterricht nachdenken

Darin eingebunden sind Grunderfahrungen zum Symmetriebegriff:

- **sich bewegen (Gleichgewicht, sym. Körperformen bilden, sym. Bewegungsabläufe)**
- **ertasten (sym. Flächen und Körper)**
- **hören (harmonische Klänge, periodische und sym. Melodien)**
- **falten (Klecksbilder, Origami, Faltschnitte)**
- **spiegeln (auch mehrfach)**
- **Dinge bewegen (klappen, drehen, verschieben)**
- **sortieren (nach Symmetrieeigenschaften)**
- **erzeugen sym. Formen (Geobrett, Ornamente, Parkette)**
- **Symmetrieorgane einzeichnen (Spiegelachsen und –punkte, Drehzentren, Verschiebungspfeile)**
- **Kongruenzabbildungen ausführen (Papier und Bleistift, Zirkel und Lineal)**

Heitzer, Johanna: Symmetrie im Mathematikunterricht, in: mathematik lehren, 161/2010, S. S. 7

5. Über Konsequenzen für den Unterricht nachdenken

**Welche Inhalte lassen
sich im Laufe der Schulzeit behandeln,
um diese Kernidee
in ihrem Facettenreichtum entstehen
und als Heuristik wirksam werden?**

J. H. Lorenz, a.a.O., S. 128

Horizontaler Schnitt 3./4. Schuljahr

TN-Aktivität: Variante 1

Untersuchen Sie die im horizontalen Schnitt aufgeführten Beispiele bezogen auf folgende Fragestellungen:

- Welche Aspekte der „verallgemeinerten Symmetrie“ finden Beachtung?
- Bieten sich Lerngelegenheiten im Sinne der aufgeführten Punkte zu: Warum es sich lohnt, Symmetrien zu kennen?

Horizontaler Schnitt 3./4. Schuljahr

TN-Aktivität: Variante 2

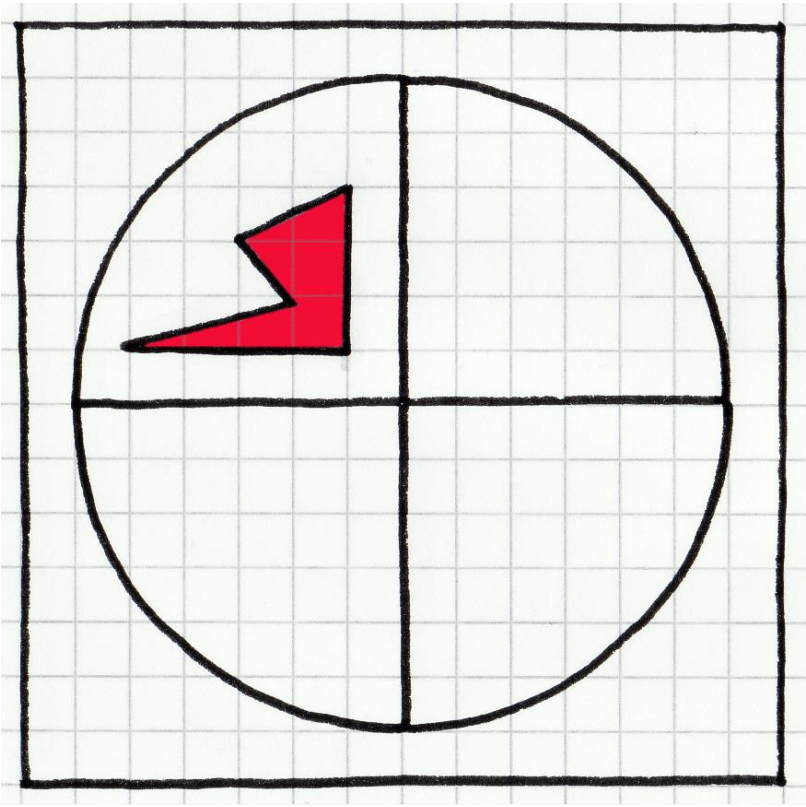
Untersuchen Sie die im horizontalen Schnitt aufgeführten Beispiele bezogen auf folgende Fragestellungen:

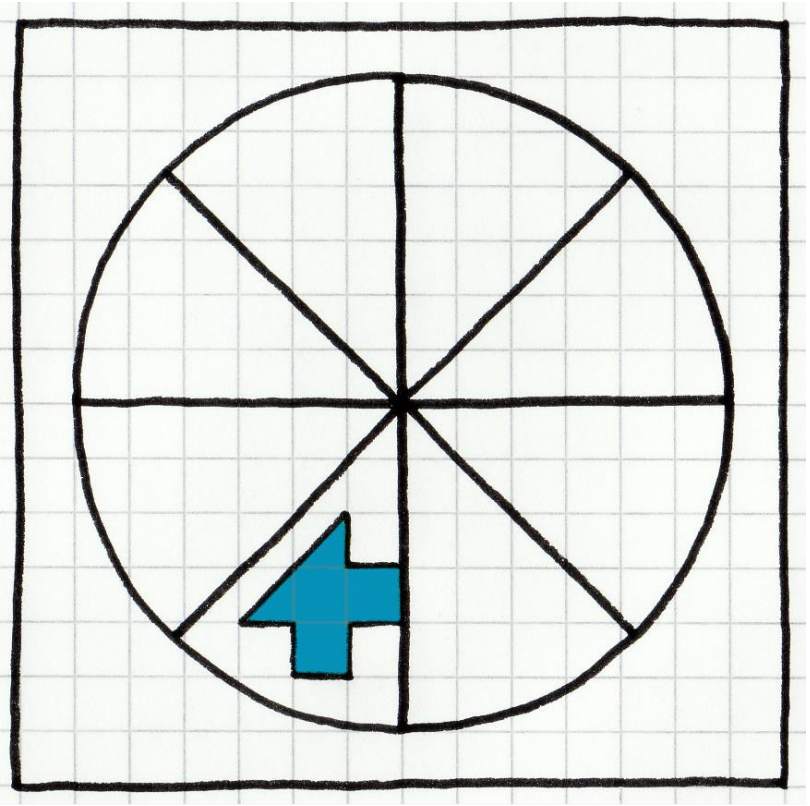
- Welche Grunderfahrungen sind möglich?
- Bieten sich Lerngelegenheiten im Sinne der aufgeführten Punkte zu: Warum es sich lohnt, Symmetrien zu kennen?

Horizontaler Schnitt 3./4. Schuljahr

MU: Raum und Form

Übertrage die Figuren in dein Heft und spiegele sie entlang der Achsen.





Horizontaler Schnitt 3./4. Schuljahr

MU: Zahlen und Operationen

Forschen und Finden:

Umkehrzahlen subrahieren – Ergebnis 9

Gewählte Zahl: 34
Umkehrzahl: 43
43 – 34 = 9

Gewählte Zahl: 56
Umkehrzahl: 65
65 – 56 = 9

Gewählte Zahl: 23
Umkehrzahl: 32
32 – 23 = 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15		17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

a) Bei welchen Zahlen gelangst du zum Ergebnis 9?
b) Färbe die Zahlen an der Hundertertafel!

Horizontaler Schnitt 3./4. Schuljahr

Umwelt /Technik

Bastelt einen Papierflieger!

Warum ist er symmetrisch?

Was passiert mit einem Papierflieger, der nicht symmetrisch ist?

Kann das auch günstig sein?

Horizontaler Schnitt 3./4. Schuljahr

Architektur

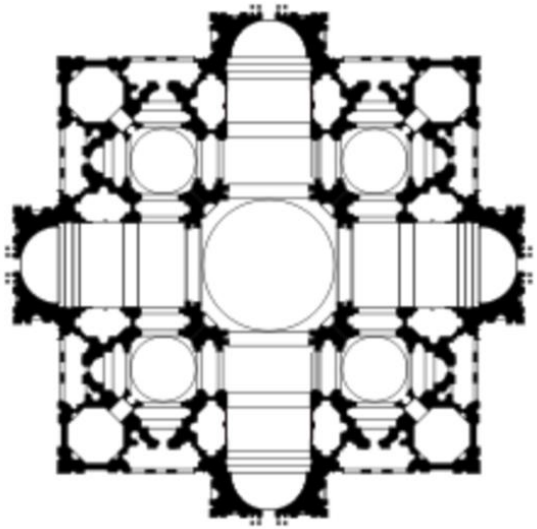
Berühmte Bauwerke

St. Peterskirche in Rom

Die Peterskirche in Rom wurde in der Zeit von 1444 – 1514 gebaut.

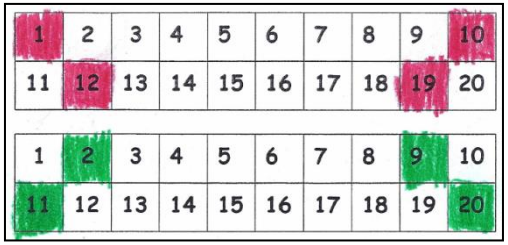
Beschreibe den Grundriss.

Zeichne den Umriss vergrößert in dein Heft.

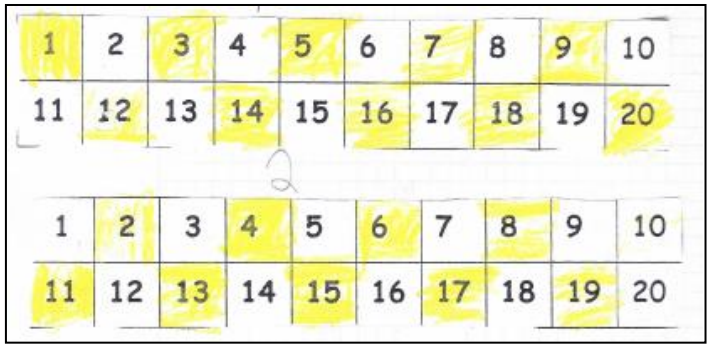


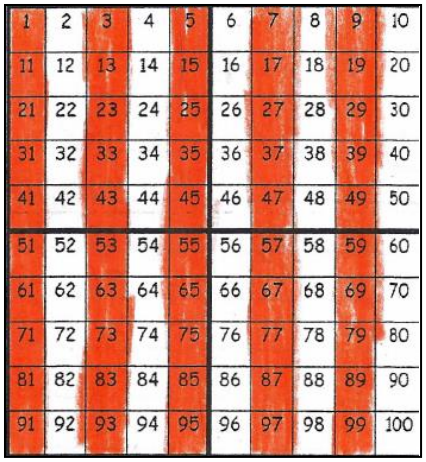
Lorenz, Jens Holger: Mathematikus 4, Braunschweig 2005, S. 89

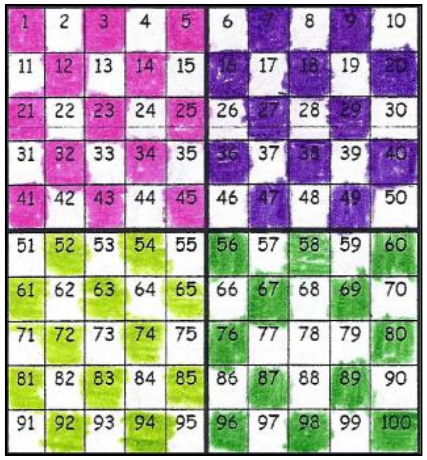
Vertikaler Schnitt: Symmetrien in Zahlenfeldern

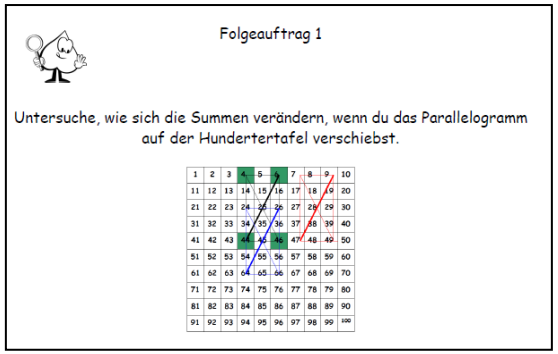


Symmetrie als Hilfe beim Problemlösen









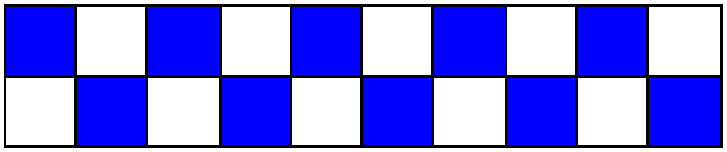
Folgeauftrag 1

Untersuche, wie sich die Summen verändern, wenn du das Parallelogramm auf der Hundertertafel verschiebst.

Symmetrien in Zahlenfeldern

Beispiel 1: Die Hälfte färben

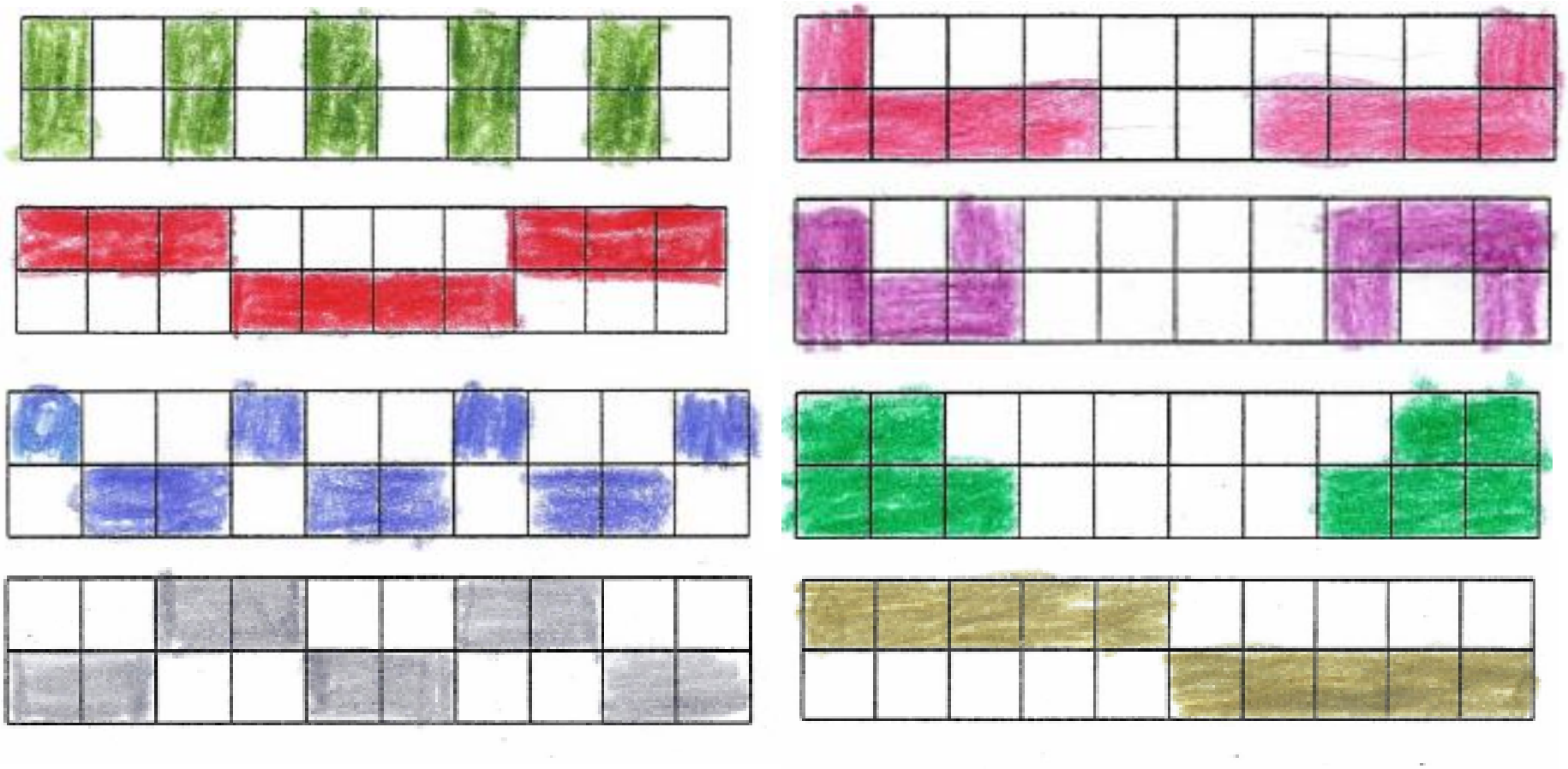
In diesem Zwanzigerfeld ist die Hälfte der Felder gefärbt.



1. Machen Sie sich bitte mit der Aufgabenstellung vertraut, indem Sie in weiteren Zwanzigerfeldern die Hälfte färben. Dabei sollen schöne Muster entstehen.
2. Wie kann „geschickt“ vorgegangen werden?

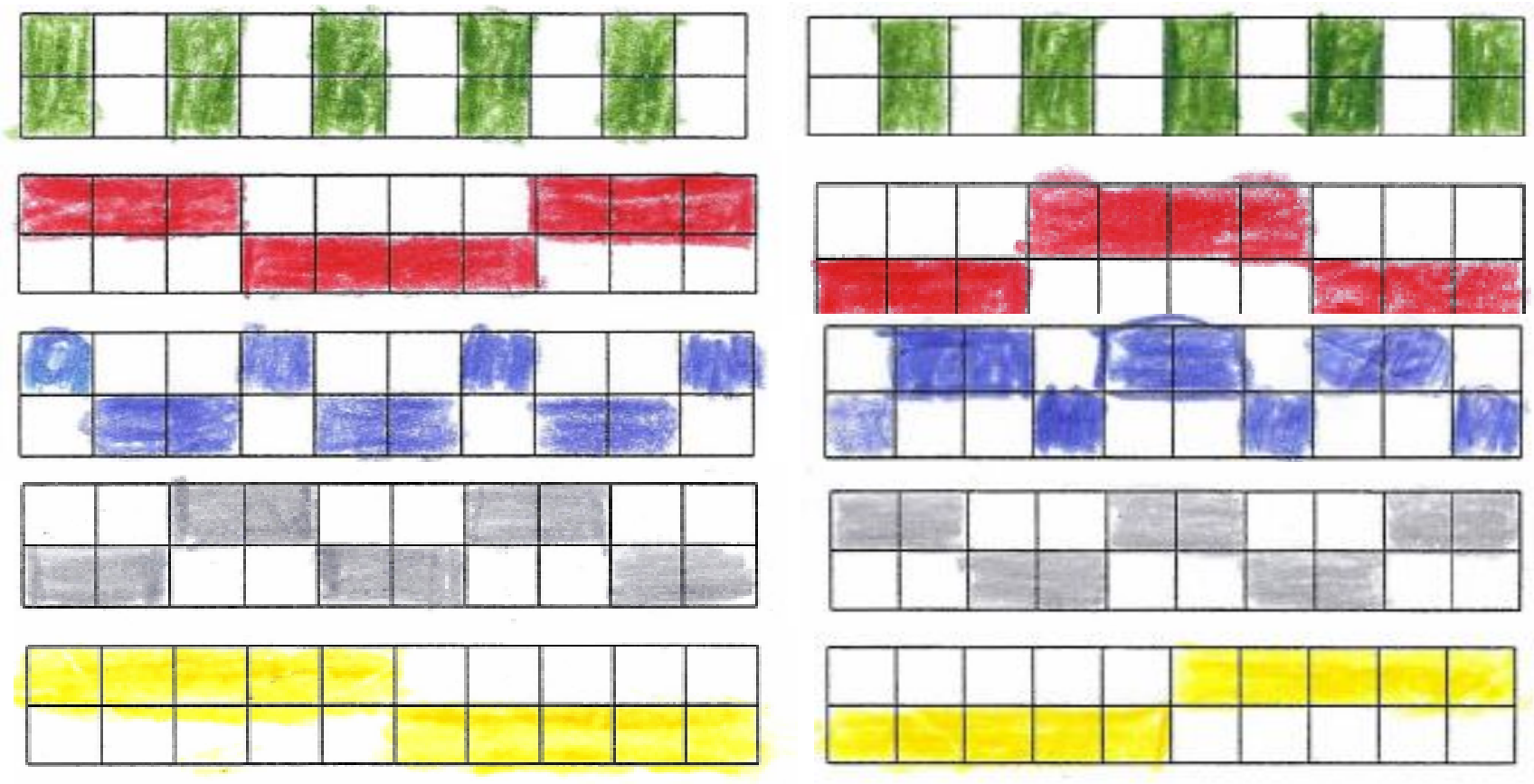
Symmetrien in Zahlenfeldern

Beispiel 1: Die Hälfte färben



Symmetrien in Zahlenfeldern

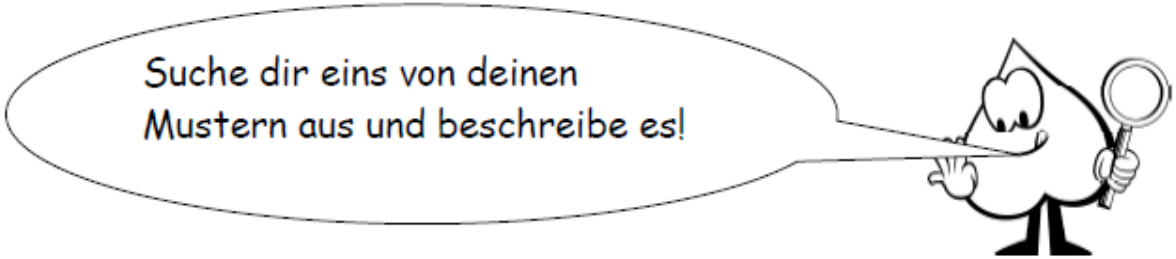
„Musterpaare“



Symmetrien in Zahlenfeldern

Beschreibungen des Musters

*

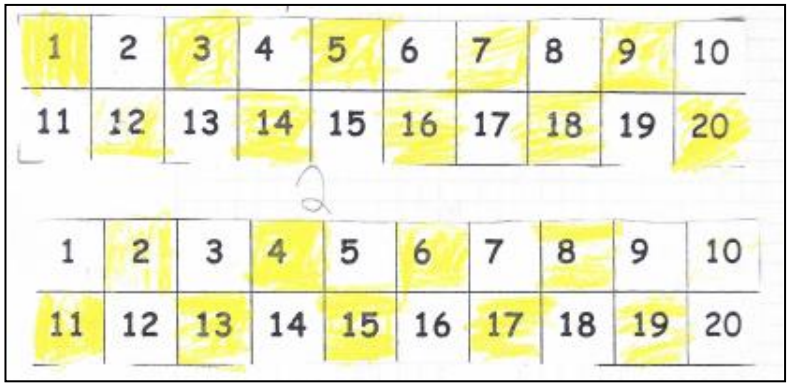


Dieses Muster habe ich ausgesucht!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Die ersten fünf sind in der ersten Reihe angemalt und in der zweiten Reihe sind die letzten fünf angemalt

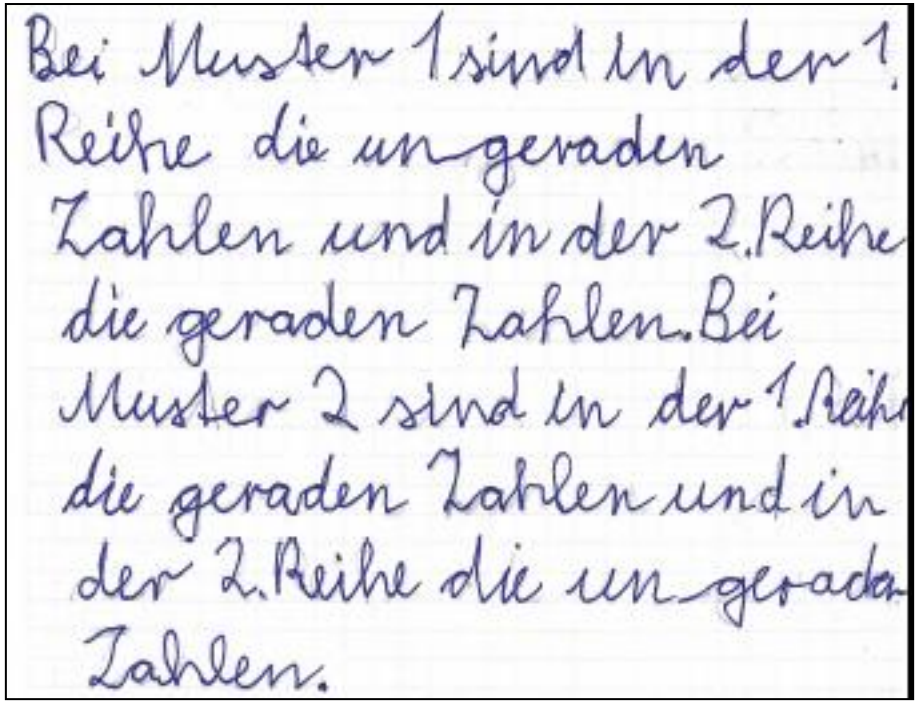
Symmetrien in Zahlenfeldern



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

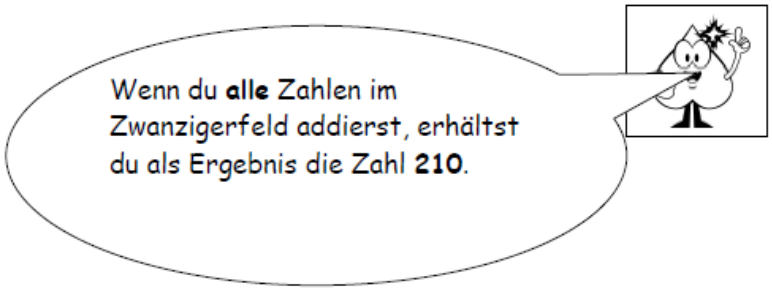


Bei Muster 1 sind in der 1. Reihe die ungeraden Zahlen und in der 2. Reihe die geraden Zahlen. Bei Muster 2 sind in der 1. Reihe die geraden Zahlen und in der 2. Reihe die ungeraden Zahlen.

Symmetrien in Zahlenfeldern

Arithmetischer Bezug

Rechnen mit den Mustern am Zwanzigerfeld



Forscherfrage

Piko behauptet:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

„Wenn ich die Zahlen in den gefärbten Feldern addiere, erhalte ich immer als Ergebnis die Hälfte von 210".

Überprüfe Pikos Behauptung mit deinen gefundenen Mustern!

Symmetrien in Zahlenfeldern

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Beim 1. Muster sind die oberen Zahlen größer als bei Muster 2. In der 2. Reihe beim 1. Muster sind sie auch größer. Beim ersten Muster ist das ergebniss auch größer. Beim 1. Muster ist das ergebnis 130. und das ergebnis vom 2. Muster ist 80.

Symmetrien in Zahlenfeldern

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Bei beiden Mustern kommt die Summe 105 raus Warum ist das so?

Es sind die gleichen muster sie sind nur spiegel-verkehrt wo oben die 1 weiß ist ist unten die 1 angemalt. Derhalb ist bei beiden die Summe 105 und wen oben die 2 ist ist unten die 12 angemalt dabei wechseln sozusagen die Zehner.

Symmetrien in Zahlenfeldern

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Das erst Muster ergibt 55 und das zweite ergibt 155 weil die 1 zu 11 und 2 zu 12 und imer weiter so. Es sind 100 mer weil es immer +10 ist.

Symmetrien in Zahlenfeldern

Transfer auf die Hundertertafel

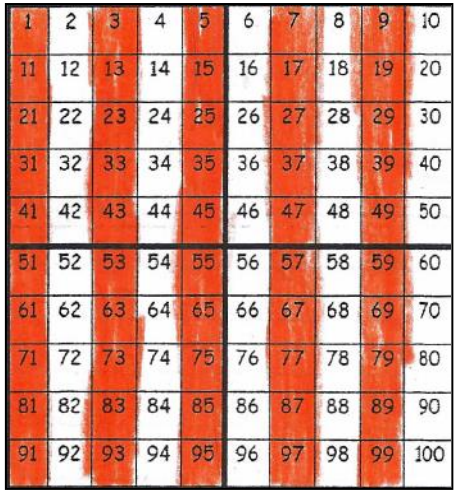
Die Hälfte färben

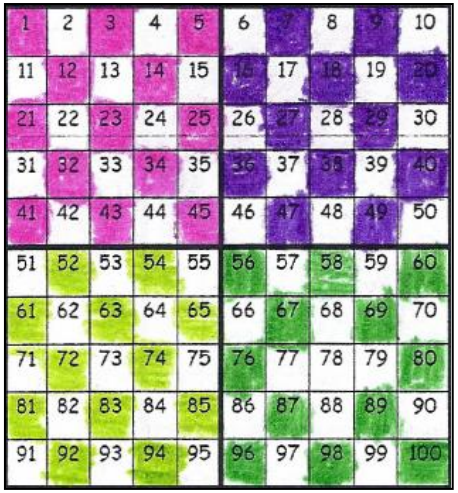
Piko hat die **Hälfte** der Felder auf der Hunderttafel gefärbt.
Dabei ist ein schönes Muster entstanden.

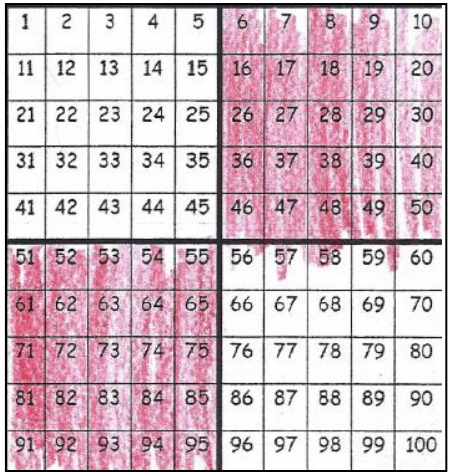
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

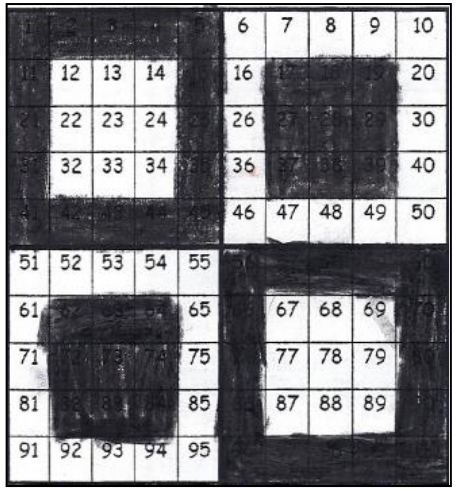
1. Färbe immer die **Hälfte** der Felder auf der Hundertertafel.
2. Achte darauf, dass **schöne Muster** entstehen! Man soll auf einen Blick erkennen, dass die Hälfte der Zahlenfelder gefärbt ist.
3. Wie kannst du geschickt neue Muster finden?

Symmetrien in Zahlenfeldern









Symmetrien in Zahlenfeldern

„Musterpaare“

Muster-Paare

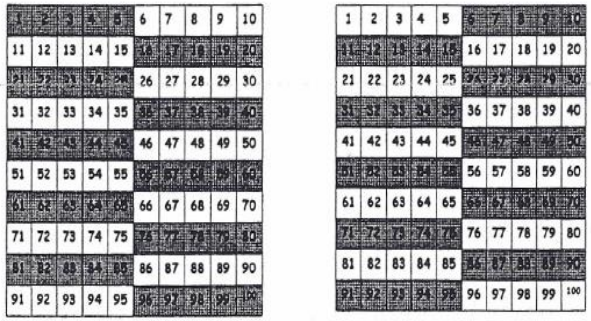
1. Diese beiden Muster gehören zusammen. Erkläre, warum sie ein „Muster-Paar“ sind.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Symmetrien in Zahlenfeldern

1. Diese beiden Muster gehören zusammen. Erkläre, warum sie ein „Muster-Paar" sind.



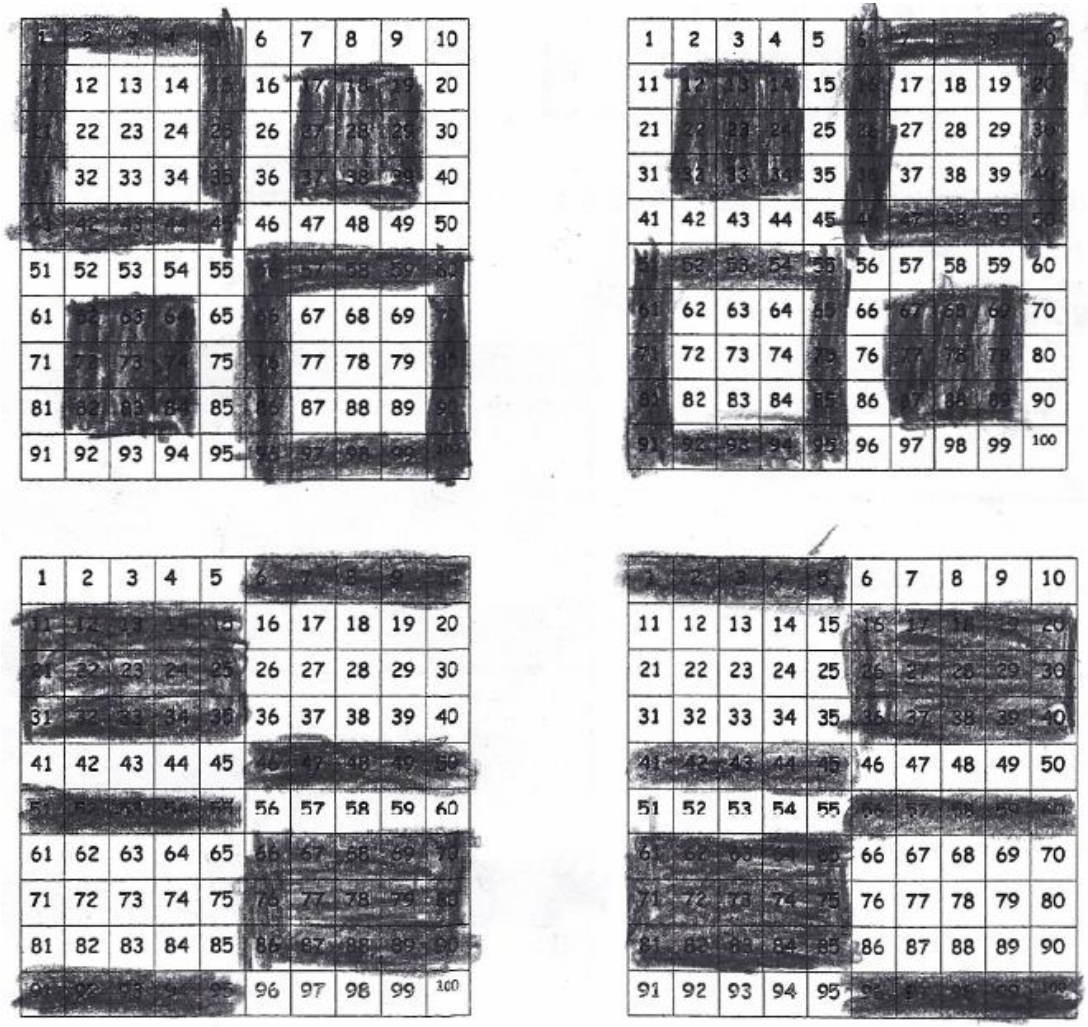
Die Muster wurden gespiegelt, die Seiten sind einfach nur vertauscht sonst ist alles gleich.

Diese Muster wurden einfach nur gespiegelt.

Sie sind von links nach rechts und von rechts nach links geschoben.

Symmetrien in Zahlenfeldern

„Musterpaare“



Symmetrien in Zahlenfeldern

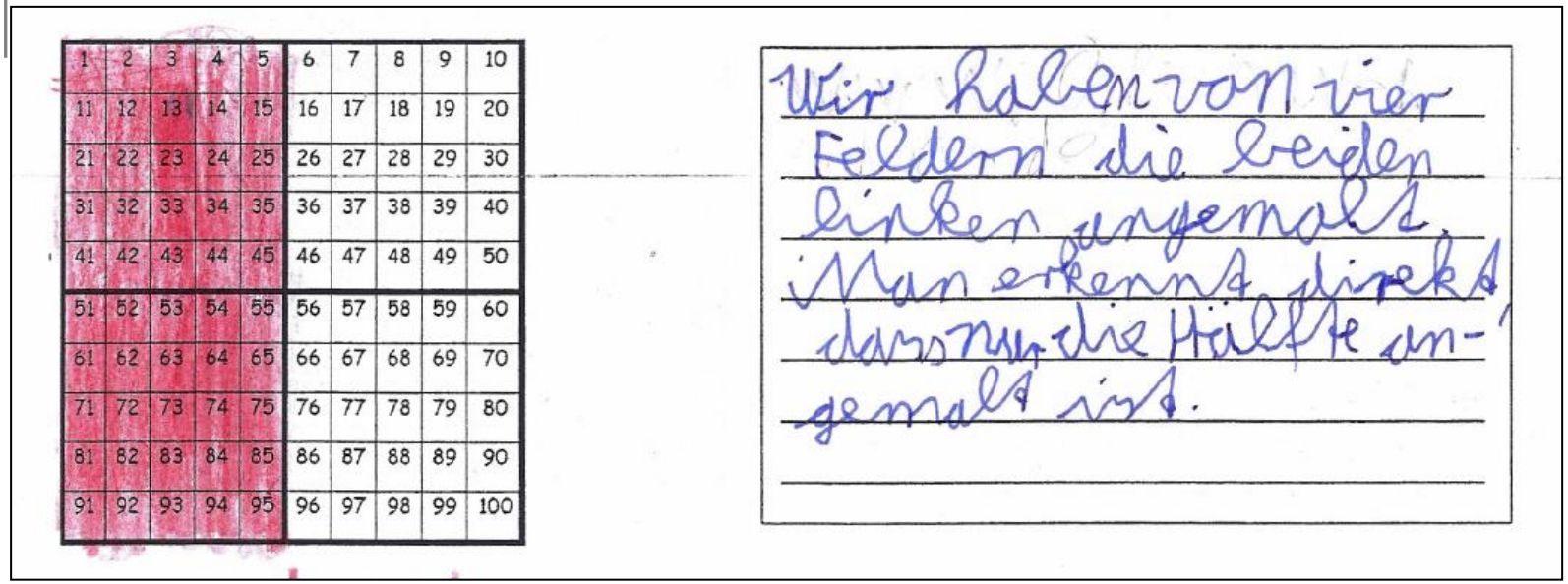
„Musterbeschreibungen“

- Die Hälfte färben -

Wie bist du vorgegangen?
Beschreibe einige deiner Muster!

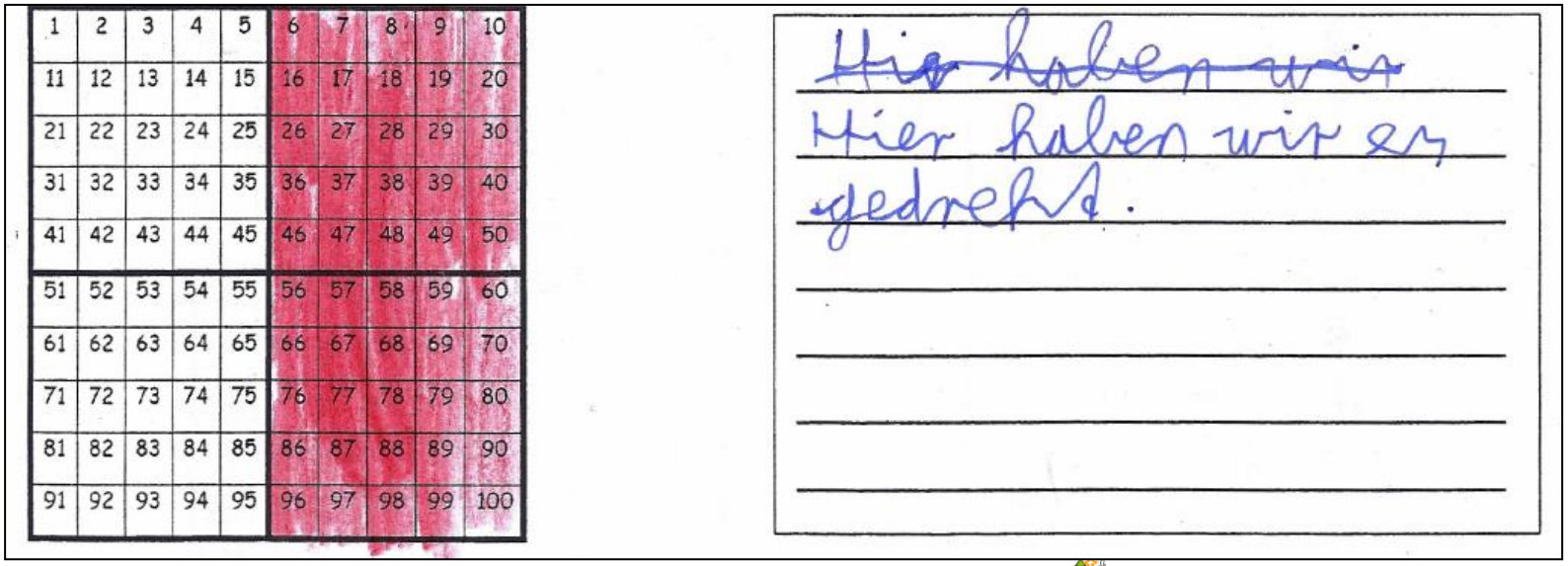
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

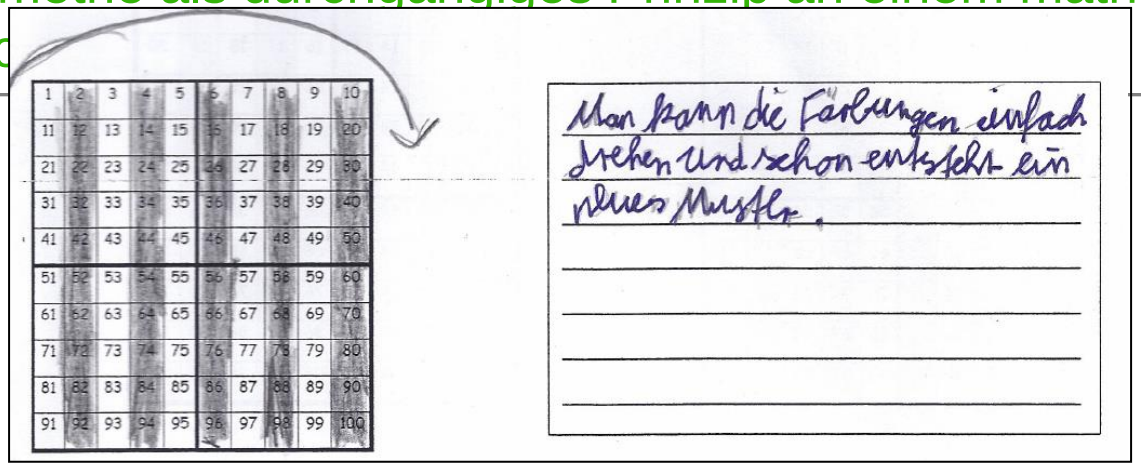
Wir haben von vier Feldern die beiden linken angemalt. Man erkennt direkt, dass nun die Hälfte angemalt ist.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

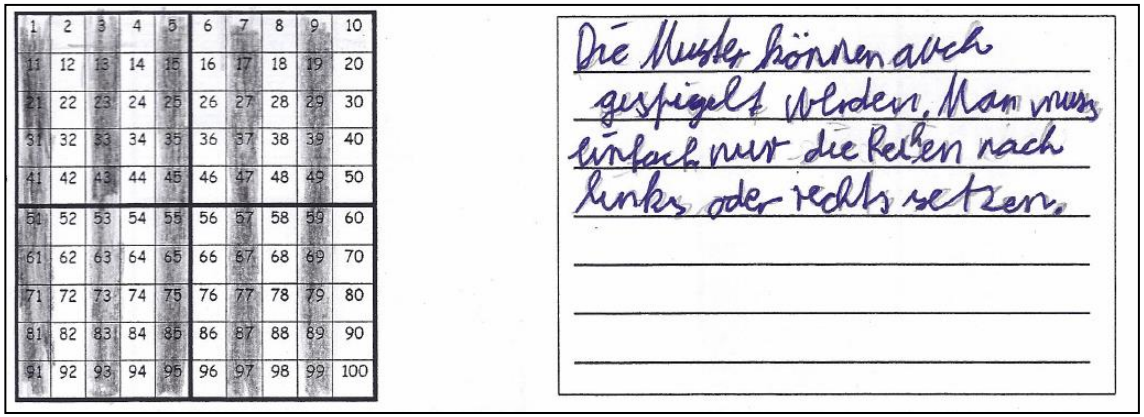
~~Hier haben wir~~
Hier haben wir es gedreht.

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterric



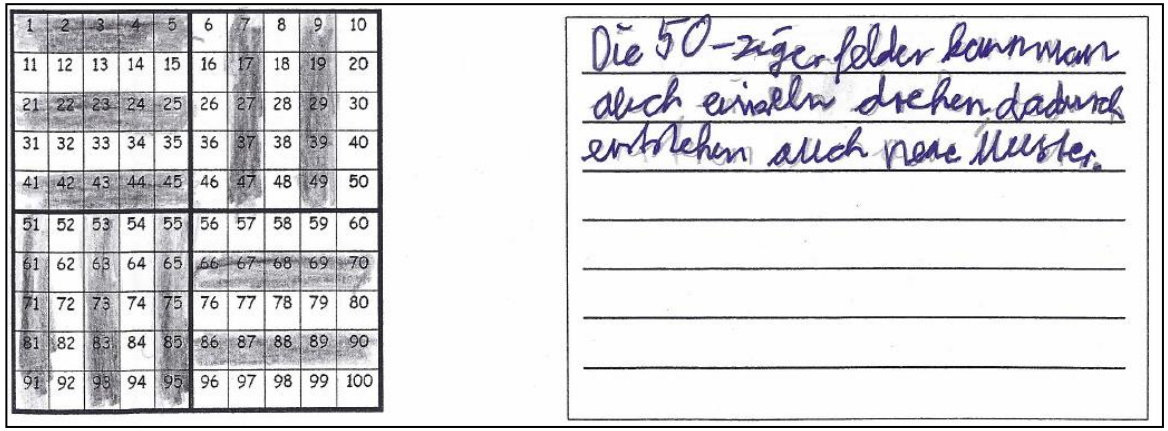
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Man kann die Färbungen einfach drehen und schon entsteht ein neues Muster.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Die Muster können auch gespiegelt werden. Man muss einfach nur die Reihen nach links oder rechts setzen.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Die 50-zigerfelder kann man auch einzeln drehen dadurch entstehen auch neue Muster.

Symmetrien in Zahlenfeldern

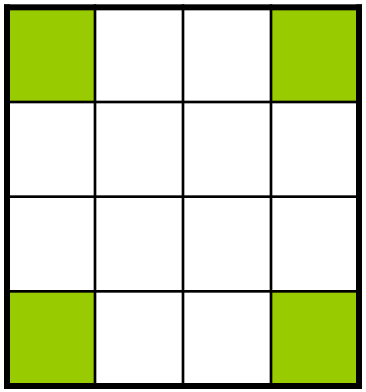
Beispiel 2: Vierersummen in Ausschnitten aus der Hundertertafel

15	16	17	18
25	26	27	28
35	36	37	38
45	46	47	48

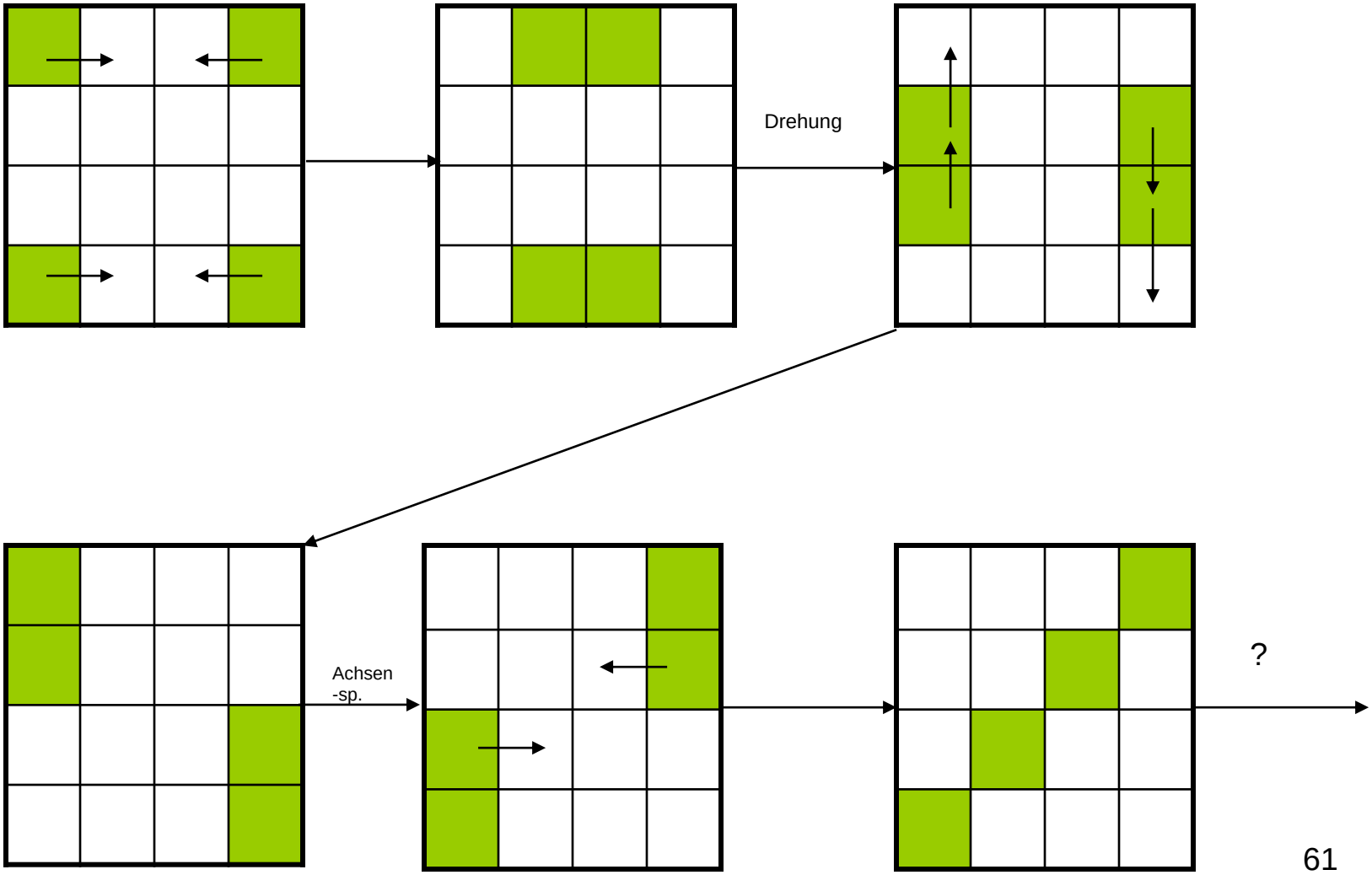
Links sehen Sie ein Zahlenquadrat aus der Hundertertafel.

Addieren Sie die im unteren Quadrat markierten Zahlen.

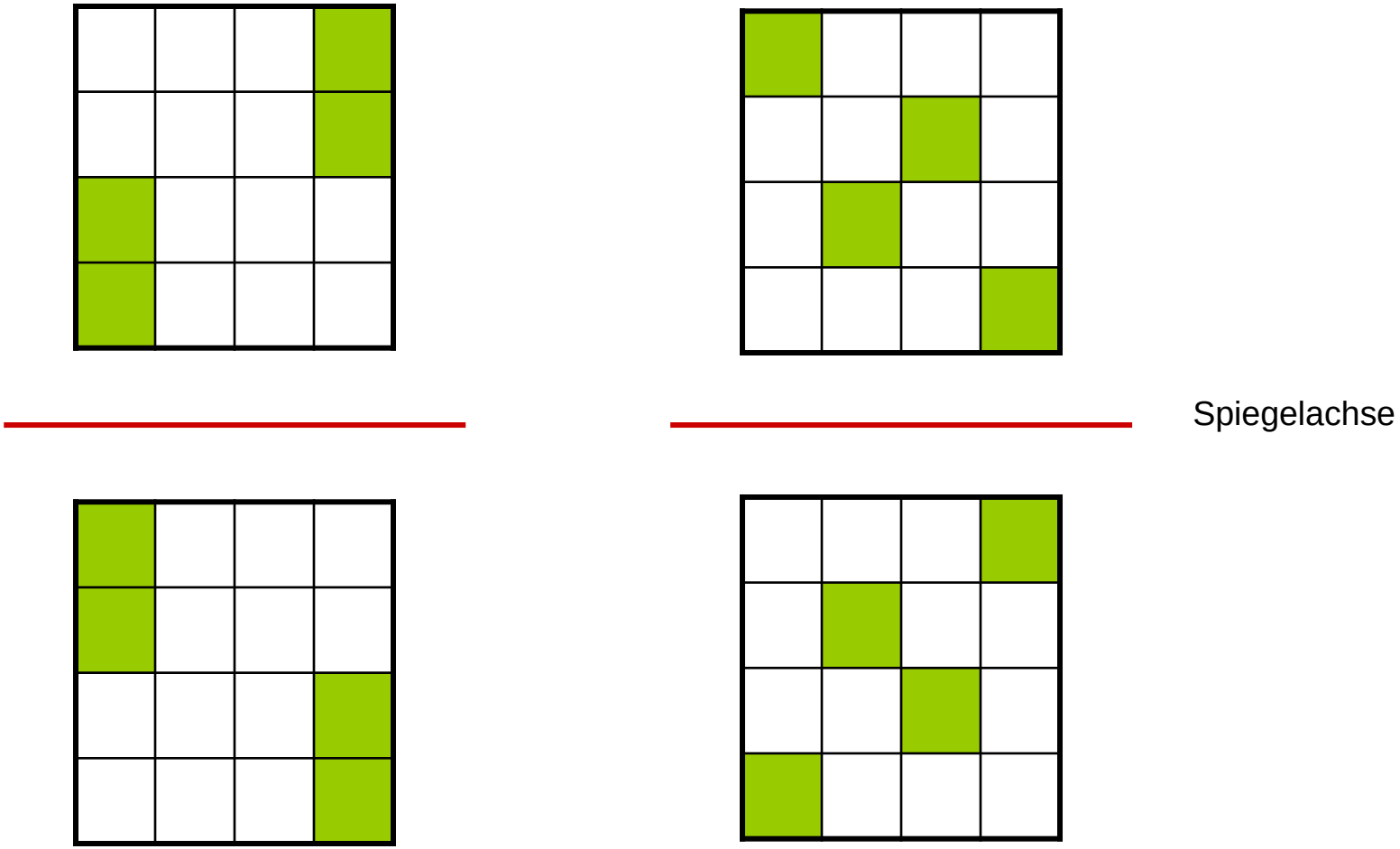
Suchen sie –möglichst geschickt- weitere Kombinationen von vier Zahlen, die zu diesem Ergebnis passen.



Symmetrien in Zahlenfeldern



Symmetrien in Zahlenfeldern



Symmetrien in Zahlenfeldern

Aufgabenvariationen

Ist die Größe des Quadrats von Bedeutung?

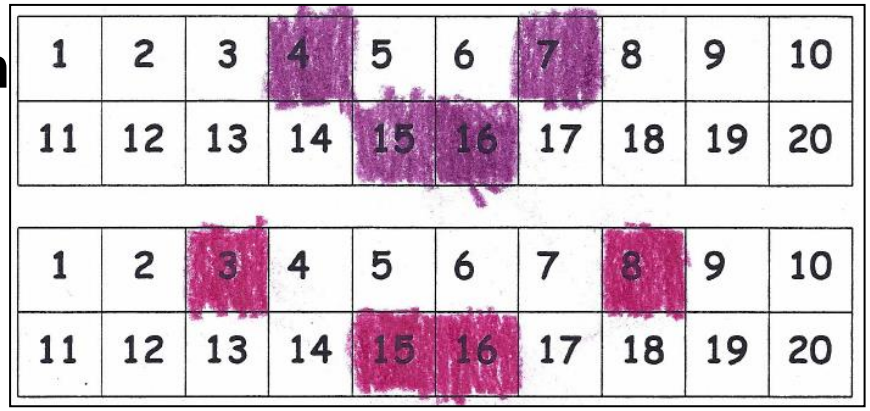
Wie unterscheiden sich Quadrate mit gerader Anzahl und mit ungerader Anzahl?

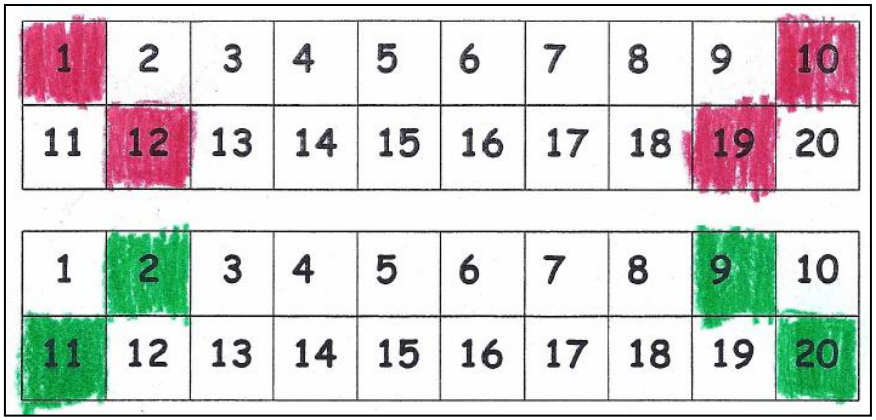
Lassen sich die Kombinationsmöglichkeiten aus der Hundertertafel auf Multiplikationstafeln übertragen?

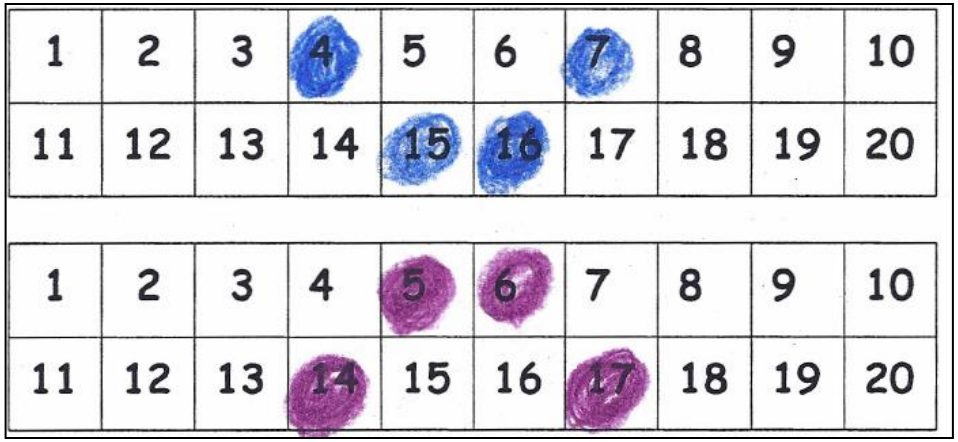
Kann man auch Muster für vier Zahlen aus Rechtecken der Hundertertafel untersuchen?

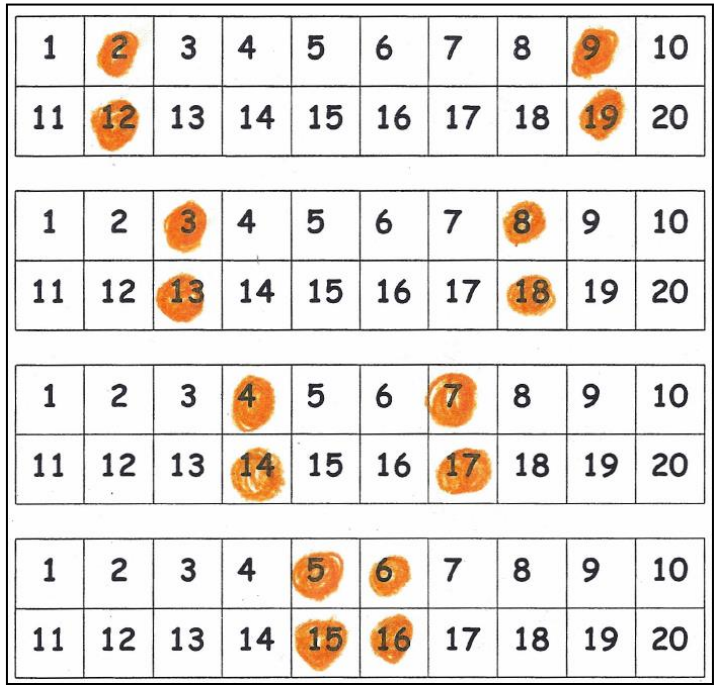
Symmetrien in Zahlenfeldern

Vierersummen am 20er-Feld









7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

Mein erstes Muster:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Beschreibung: Ich hab mit 4 reichen ein muster gelegt und da kam 42 raus

Mein zweites Muster:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Beschreibung: Es ergibt 42 weil 12+8=20 19+3=22 20+22=42

Kannst du erklären, warum das Ergebnis bei beiden Mustern gleich ist?

Weil unden die zahlen geich gbliben sind und oben worde es eine mer und einer weniger deshalb beibt es 42

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Beschreibung:
In der 1 Reihe ergibt es 11 und in den 2 Reihe ergibt es 31 so ergibt es zusammen 42.

Mein zweites Muster:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Beschreibung: In der 1. Reihe ergibt es 11 und in der 2 Reihe ergibt es 31 deshalb ist das ergebnis 42.

Kannst du erklären, warum das Ergebnis bei beiden Mustern gleich ist?

In der 1 Reihe ergibt es immer 11 und in der 2 Reihe ergibt es immer 31. So ergibt es zusammen immer 42.

7. Symmetrie als durchgängiges Prinzip an einem mathematischen Unterrichtsinhalt in unterschiedlichen Jahrgangsstufen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Beschreibung: Oben sind die einer 4 und 7. Unten kommen zehn dazu.

Mein zweites Muster:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

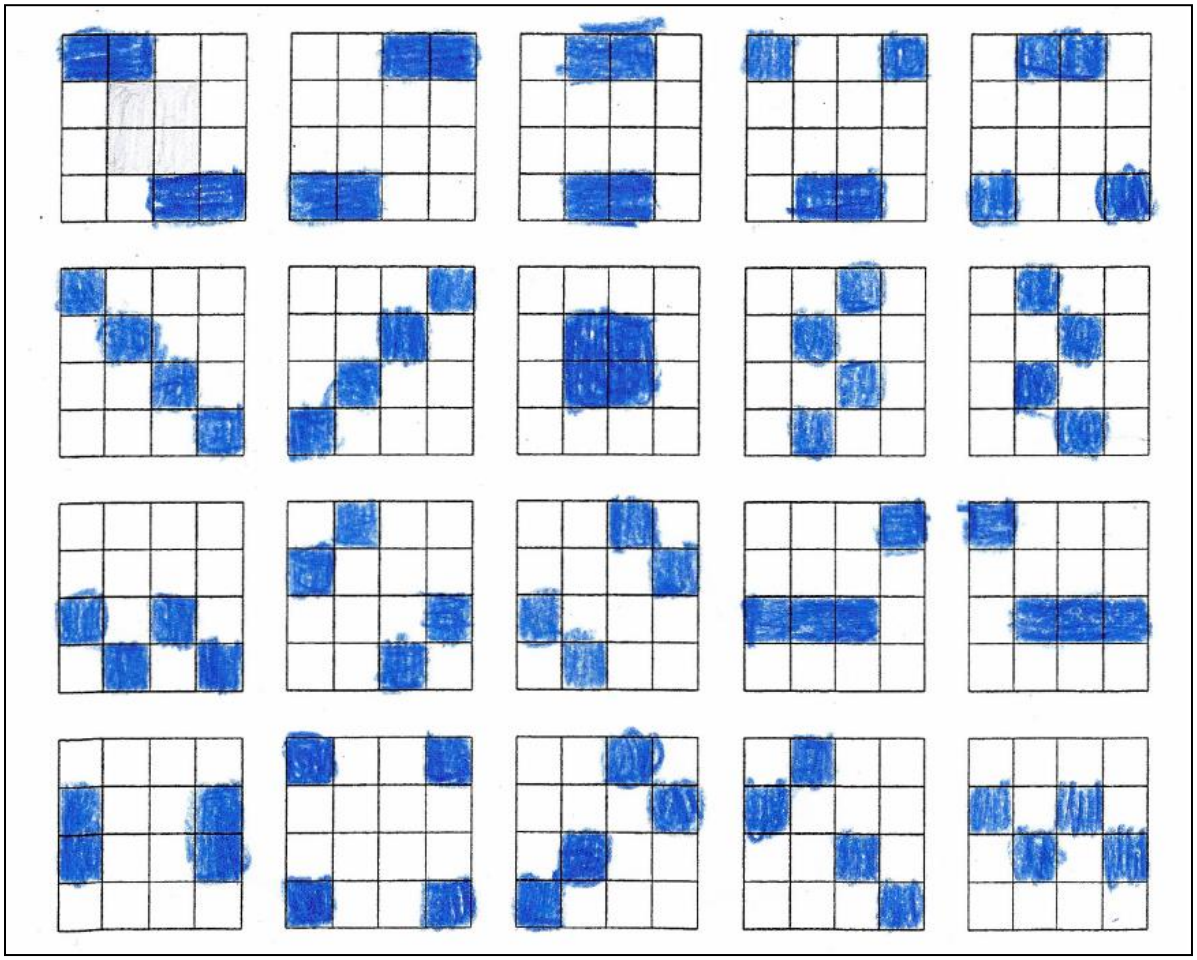
Beschreibung: Oben sind die einer Zahlen 5+6. Unten kommen zehn dazu.

Kannst du erklären, warum das Ergebnis bei beiden Mustern gleich ist?

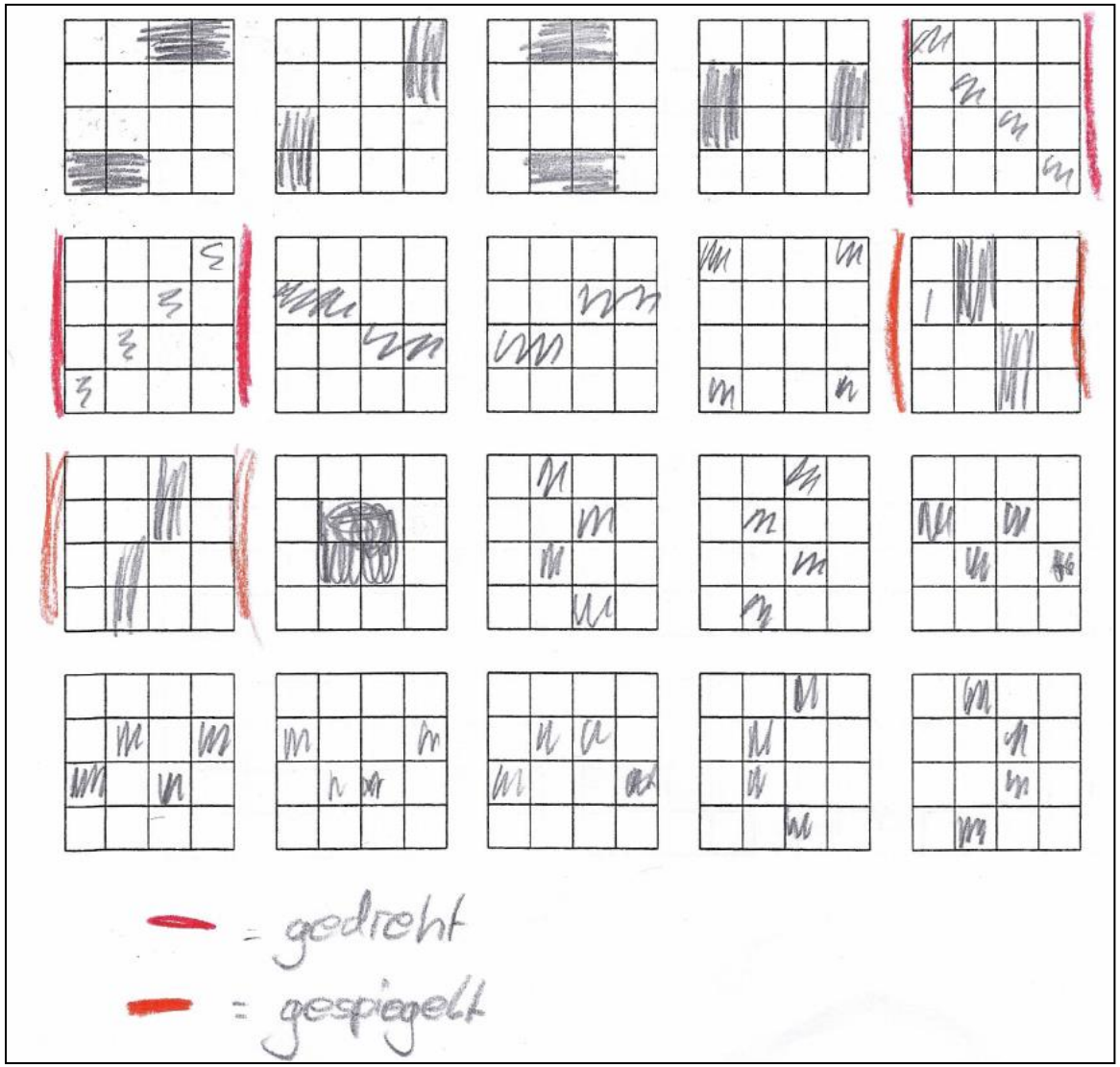
Weil man von links nach rechts einen mehr macht. Und von rechts nach links einen weniger macht.

Symmetrien in Zahlenfeldern

Vierersummen in Ausschnitten aus der Hundertertafel

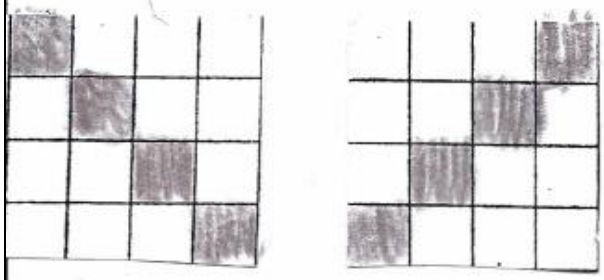


Symmetrien in Zahlenfeldern



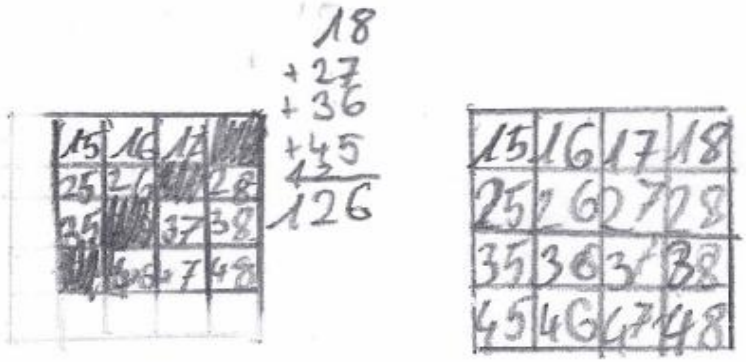
Symmetrien in Zahlenfeldern

Wir haben am Anfang zuerst einfache Zahlen aus dem Ausschnitt genommen und die zu einer bestimmten Summe (126)
Es ging einfacher, wenn man die Zahlen spiegelverkehrt genommen oder gedreht hat, z.B



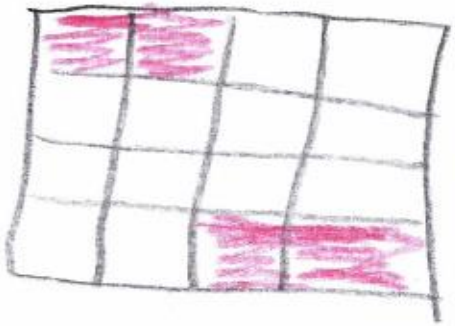
Symmetrien in Zahlenfeldern

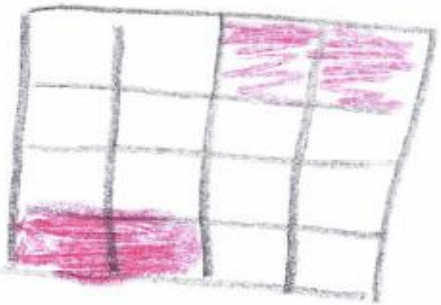
Wir haben zum Beispid einen nach Links und einen nach rechts gerückt, also -1 u. +1, deswegen kam auch 126 raus. Das geht auch mit oben u. unten: „-10, +10" immernoch 126:



Symmetrien in Zahlenfeldern

Wen man zB rechts oben zwei Zahlen angemalt hat und wenn man noch links unten 2zahlen anmalt, dann ergibt es das Ergebnis 126 Dann kann man tauschen, also dass nun zwei Kästchen oben links und zwei oben rechts. Es ergibt wieder 126. Das Gleiche macht man mit anderen Zahlen.





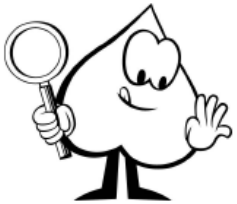
Symmetrien in Zahlenfeldern

Sekundarstufe I

Vierersummen auf der Hundertertafel

Piko hat in der Hundertertafel vier Felder gefärbt und addiert. Als Summe dieser vier Zahlen erhält er 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



Forscherauftrag

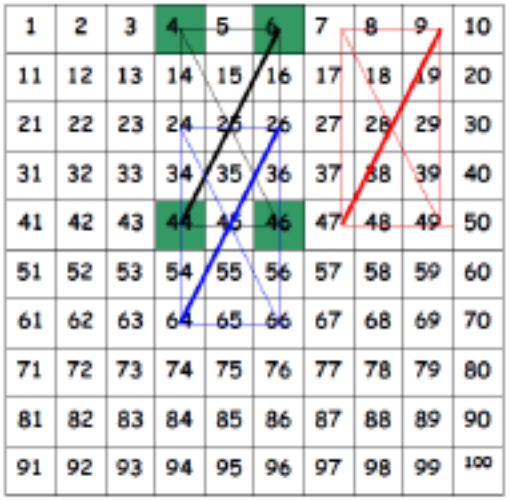
1. Suche **geschickt** weitere Möglichkeiten, die Summe 100 mit vier Zahlen zu erreichen.
2. Zeichne die Möglichkeiten farbig ein.
3. Vergleiche deine Ergebnisse mit einem Partner.

* Verbinde gleich gefärbte Zahlen mit Linien und beschreibe die Figuren.

Symmetrien in Zahlenfeldern

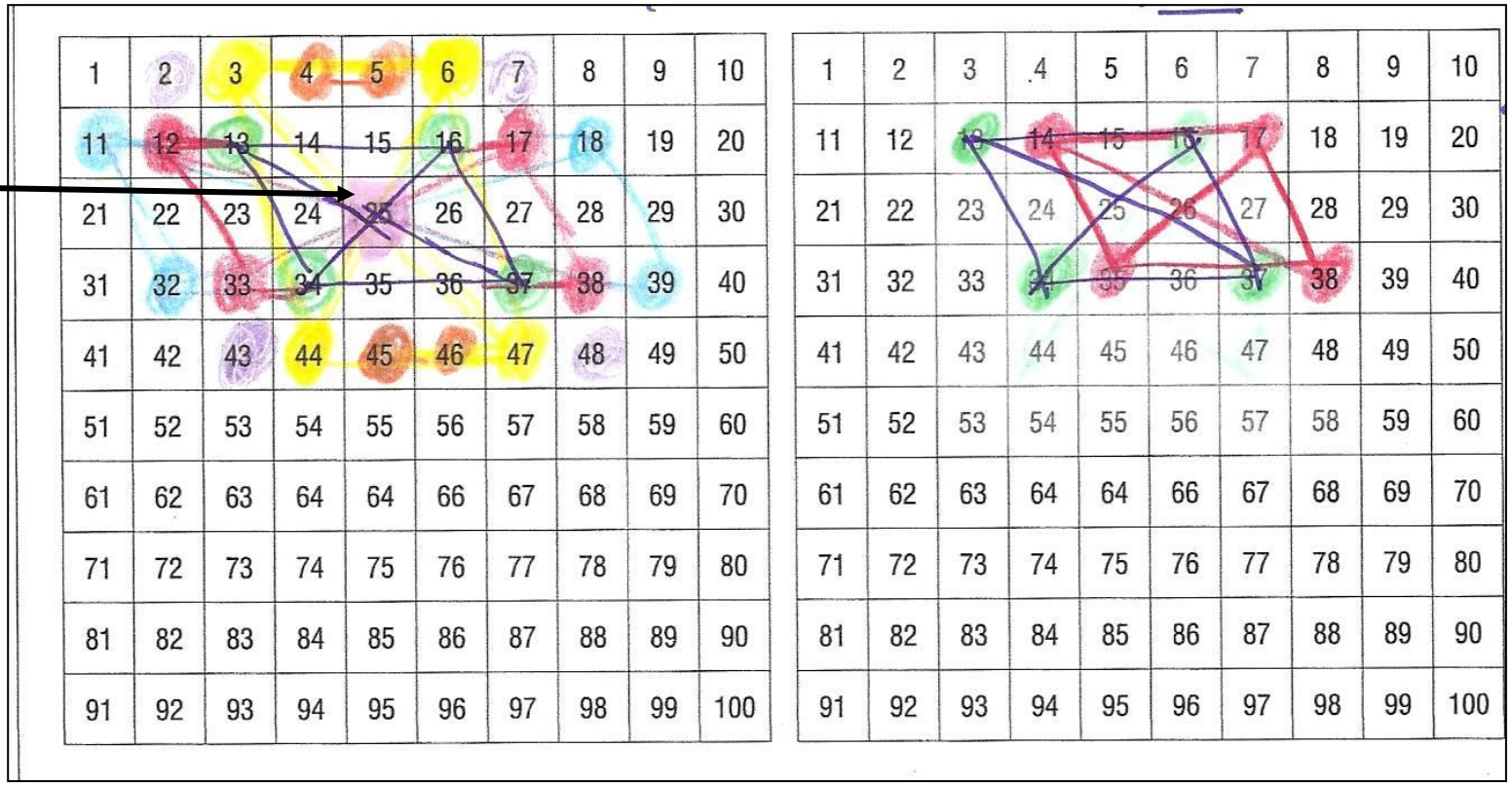
Folgeauftrag 1

Untersuche, wie sich die Summen verändern, wenn du das Parallelogramm auf der Hundertertafel verschiebst.



Symmetrien in Zahlenfeldern

Mittelzahl 25

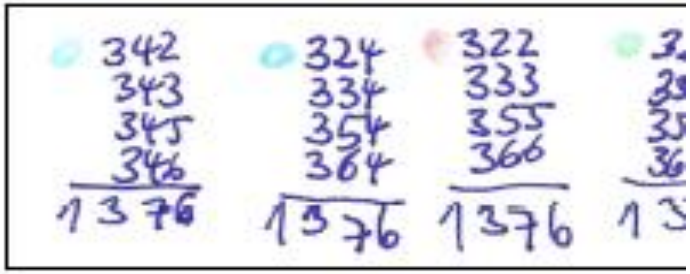


Symmetrien in Zahlenfeldern

Die Zahlenmuster mit vier Summanden können auf die Tausendertafel übertragen w

Mittelzahl 344

301	302	303	304	305	306	307	308	309	310
311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330
331	332	333	334	335	336	337	338	339	340
341	342	343	344	345	346	347	348	349	350
351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
381	382	383	384	385	386	387	388	389	390
391	392	393	394	395	396	397	398	399	400

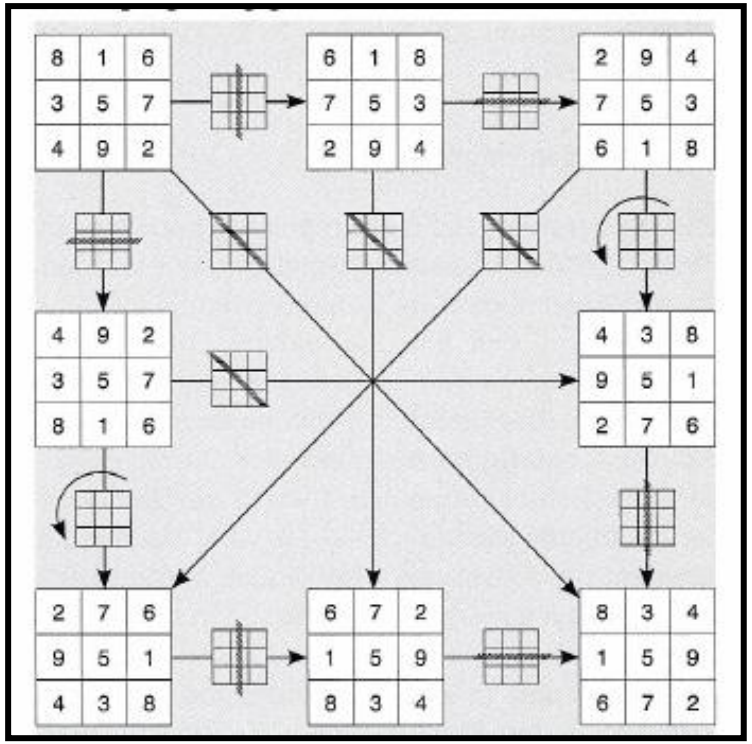


Symmetrien in Zahlenfeldern

Magische Quadrate

8	1	6
3	5	7
4	9	1

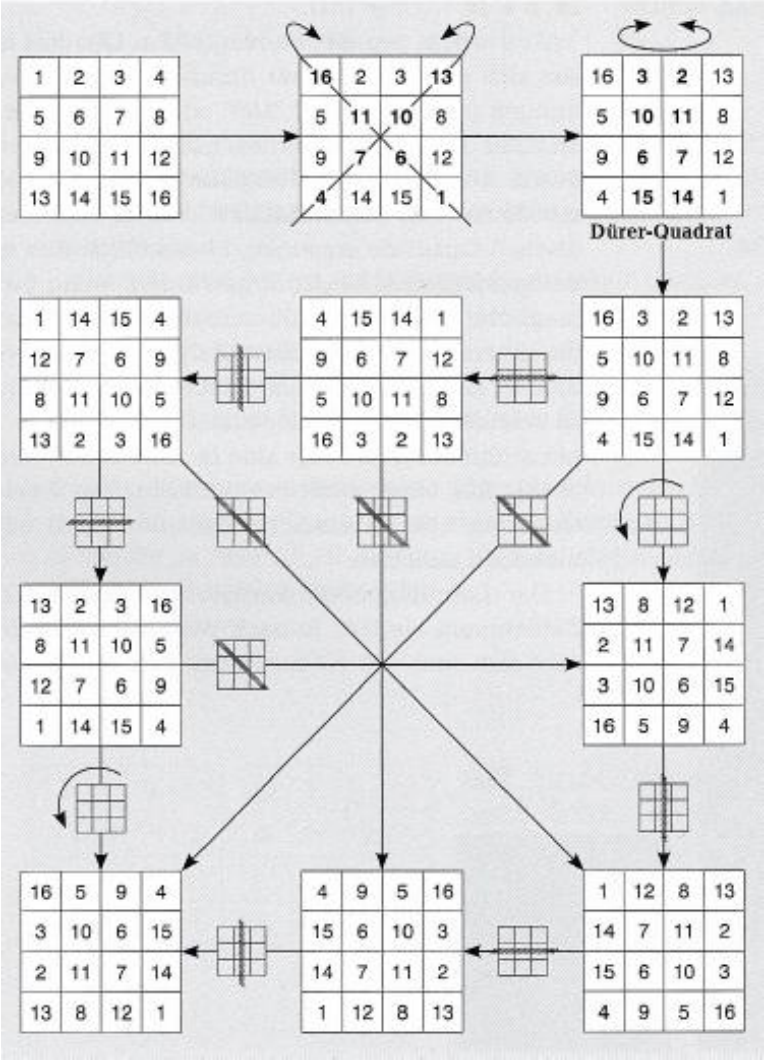
Finde weitere magische Quadrate mit den Zahlen in diesem Quadrat!



Hirt/Wälti: Lernumgebungen im MU, Seelze, 2008, S. 93

Symmetrien in Zahlenfeldern

Dürerquadrat



Hirt/Wälti: Lernumgebungen im MU, Seelze, 2008, S. 99/100

Symmetrien in Zahlenfeldern

Berechne die Summen der roten, der orangen, der hell- und der dunkelgrünen Felder.

17	4	3	14
6	11	12	9
10	7	8	13
5	16	15	2

17	4	3	14
6	11	12	9
10	7	8	13
5	16	15	2

Färbe immer 4 Felder mit der Summe 38 und schreibe die Aufgaben auf.

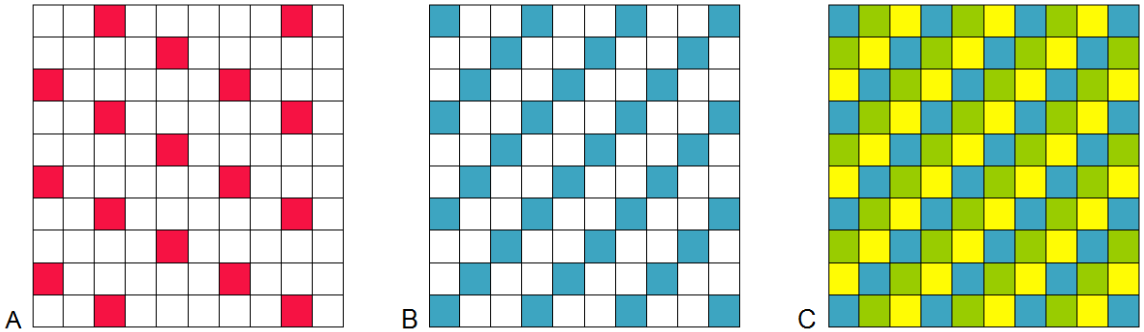
17	4	3	14
6	11	12	9
10	7	8	13
5	16	15	2

Symmetrien in Zahlenfeldern

Teiler/Vielfache

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1. Färbe an der Hundertertafel alle durch 3 teilbaren Zahlen. Beschreibe das Muster.
2. Vergleiche die Muster A,B,C mit dem Muster aus Aufgabe 1. Beschreibe, was dir auffällt.



3. Untersuche die Muster A, B, C:
   Welche Eigenschaften haben die gefärbten Kästchen?

Das Mathematikbuch 6, Leipzig 2008, S.24

8. Abschluss und weitere Hinweise

„Symmetrie ist eine Weise, Begriffe und Erfahrungen miteinander zu verbinden, Analogien und Ähnlichkeiten zu suchen und damit neue Einsichten zu gewinnen.

Der Mathematikunterricht hat die Aufgabe, Schüler in dieser Heuristik zu bestärken und ihnen Anlässe zu geben, Symmetrien in vielfältigen Situationen zu begegnen.

Es gibt genügend Anlässe, mathematische Ideen nicht nur in ihrer symbolischen Form darzustellen, sondern ihren symmetrischen Gehalt sichtbar werden zu lassen. “

(J. H. Lorenz, a.a.O., S. 130)

Unterrichtsmaterial: Symmetrien in Zahlenfeldern

2.-3. Schuljahr	**Zwanzigerfeld:** **•Die Hälfte färben** **•Symmetrien auf dem Zwanzigerfeld**	**Magische Quadrate:** • 3x3-Zahlen
3. – 6. Schuljahr	**Hundertertafel:** **•Die Hälfte färben** **•Symmetrien auf der Hundertertafel (Ausschnitte)** **•Symmetrie auf der Hundertertafel**	**Magische Quadrate:** •Dürerquadrat •Symmetrien im Dürerquadrat
5.-7. Schuljahr	**Tausenderbuch:** **•Die Hälfte färben** **•Symmetrien auf der Tausendertafel**	**Magische Quadrate:** •Transfer auf magische Quadrate höherer Ordnung

8. Abschluss und weitere Hinweise

Bildungsstandards umsetzen

pikas.dzlm.de

Herausforderungen begegnen

pikas-kompakt.dzlm.de

Digitale Medien nutzen

pikas-digi.dzlm.de

Fachfremd unterrichten

primakom.dzlm.de

Mathe inklusiv unterrichten

pikas-mi.dzlm.de

Lernen wie Kinder rechnen

kira.dzlm.de

Beim Mathelernen unterstützen

online ab Sommer 2020

Diagnosegeleitet fördern

mathe-sicher-koennen.dzlm.de

Haus 2.3: Kontinuität von Klasse 1-6

- **Fortbildungsmaterial**
  - Ppt, Moderationspfad, TN-Materialien
  - Basisinfo: Symmetrie – eine fundamentale Idee
  - Sachinfo : Symmetrie – mathematischer Hintergrund
- **Unterrichtsmaterial**
  - Die Hälfte färben
    - Schülermaterial (20er-Feld / Hundertertafel)
    - Lehrermaterial: Hinweise zur Durchführung
  - Vierersummen
    - Schülermaterial (20er-Feld / Ausschnitte aus der Hundertertafel / Hundertertafel)
    - Lehrermaterial: Hinweise zur Durchführung
- **Informationsmaterial**
  - Pdf-Dokumente, Links, Literaturhinweise

Haus 2: Modul 2.3