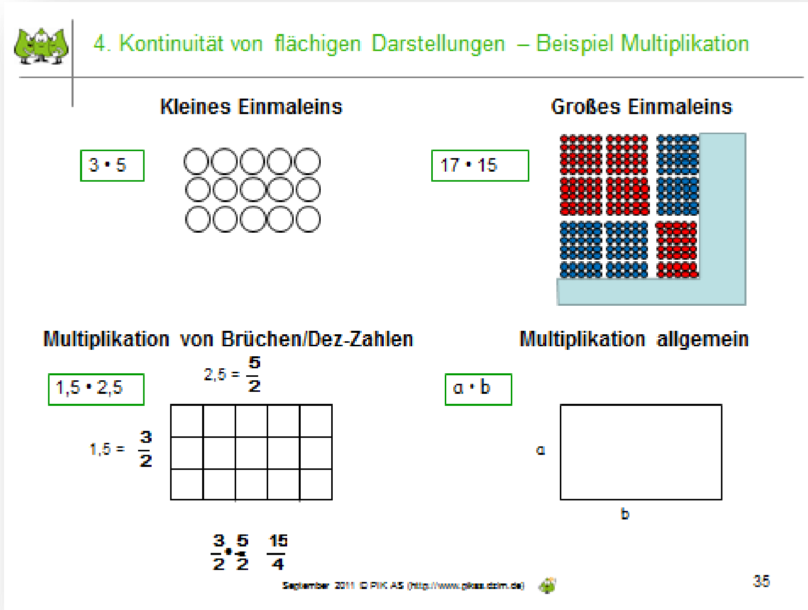
Haus 2: Kontinuität von Klasse 1 bis 6



Modul 2.2:
Darstellungsmittel für Grundschule und Sek I

Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

technische universität
dortmund

Deutsche
Telekom
Stiftung

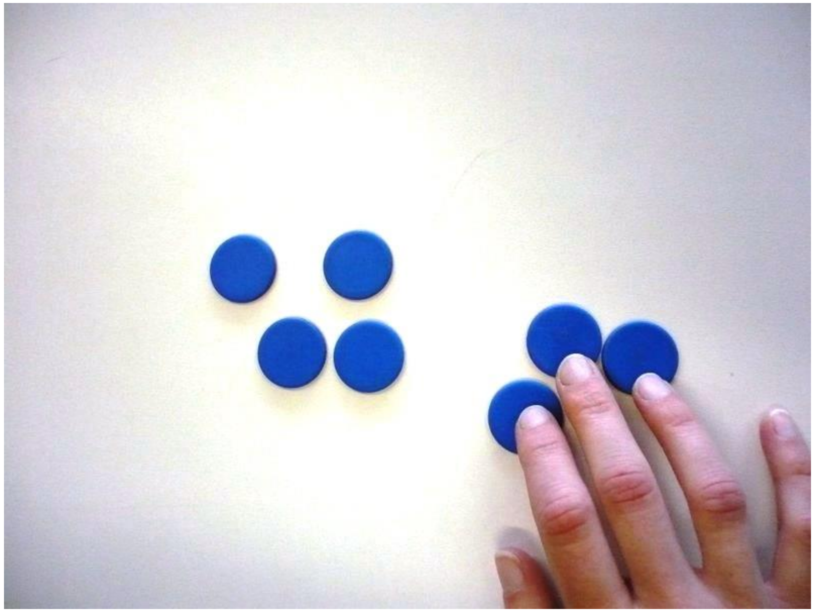
1. Darstellungsformen und Darstellungsmittel

Erinnerung:

Mathematische Sachverhalte können in unterschiedlichen Darstellungsformen mit Hilfe von unterschiedlichen Darstellungsmitteln repräsentiert werden, durch …

Handlungen an

Naturmaterial oder didaktischem Material



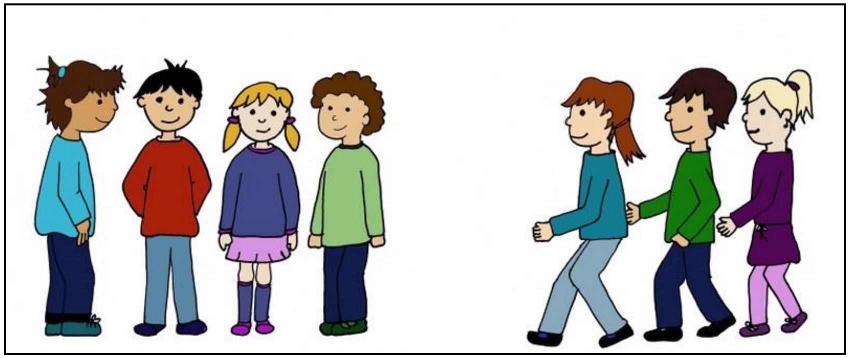
1. Darstellungsformen und Darstellungsmittel

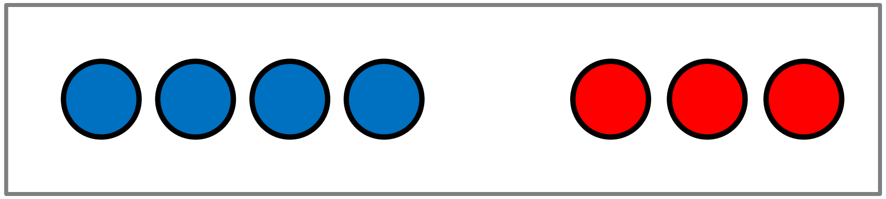
Erinnerung:

Mathematische Sachverhalte können in unterschiedlichen Darstellungsformen mit Hilfe von unterschiedlichen Darstellungsmitteln repräsentiert werden, durch …

Handlungen an
Naturmaterial oder didaktischem Material

Bildliche Darstellungen von
lebensweltlichen Situationen oder didaktischem Material





1. Darstellungsformen und Darstellungsmittel

Erinnerung:

Mathematische Sachverhalte können in unterschiedlichen Darstellungsformen mit Hilfe von unterschiedlichen Darstellungsmitteln repräsentiert werden, durch …

Handlungen an
Naturmaterial oder didaktischem Material

Bildliche Darstellungen von
lebensweltlichen Situationen oder didaktischem Material

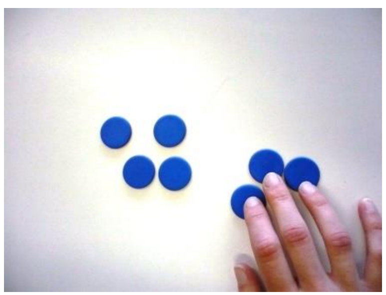
Symbolische Darstellungen in
Umgangssprache oder formaler Sprache

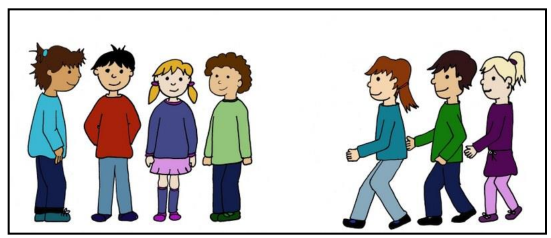
Marie hat 4 Bonbons.
Lukas hat 3 Bonbons.
Wie viele Bonbons haben sie zusammen?

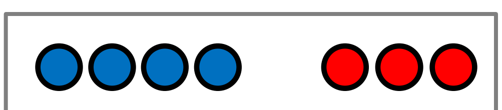
4 + 3

1. Darstellungsformen und Darstellungsmittel

- Die verschiedenen Darstellungsformen und Darstellungsmittel unterscheiden sich durch unterschiedliche Grade an Konkretheit bzw. Situationsbezogenheit.
- Sie sind jedoch nicht als Stufen zu verstehen, die der Reihe nach hinter sich gelassen werden.
- Im Gegenteil kommt es im Unterricht auf vielfältige Wechselwirkungen an (Interaktion der Darstellungsformen und der Darstellungsmittel).



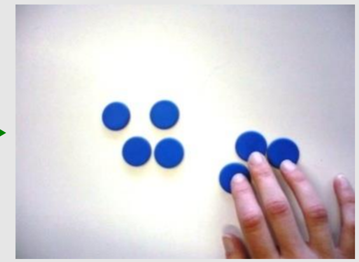


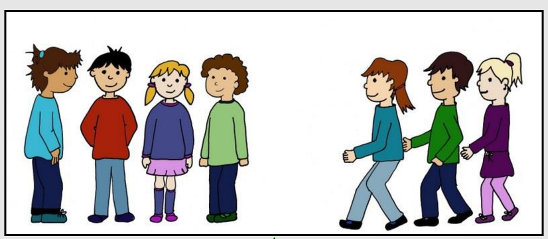


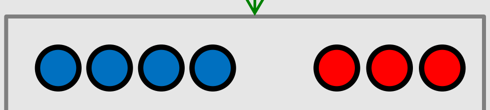
Marie hat 4 Bonbons.
Lukas hat 3 Bonbons.
Wie viele Bonbons haben sie zusammen?

$\boxed{4 + 3}$

1. Darstellungsformen und Darstellungsmittel







4 + 3

Marie hat 4 Bonbons.
Lukas hat 3 Bonbons.
Wie viele Bonbons haben sie zusammen?

2. Ambivalenz von Darstellungsmitteln

$\boxed{6 - 4 = 2}$ $\boxed{12 : 4 = 3}$

Machen Sie mit Hilfe einer Zeichnung einem Kind, das weder unsere Sprache spricht noch unsere Symbole und Zeichen kennt, die beiden oben stehenden Zahlensätze möglichst einsichtig. Die Zeichnungen sollen ohne weitere Erläuterungen verständlich sein.

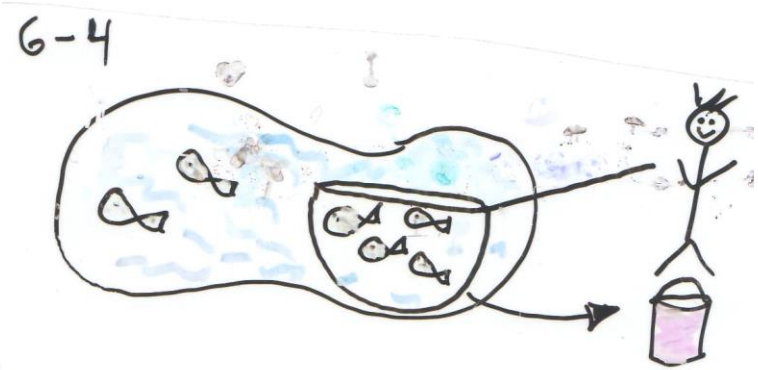
a) Überlegen Sie sich zunächst alleine eine Zeichnung.

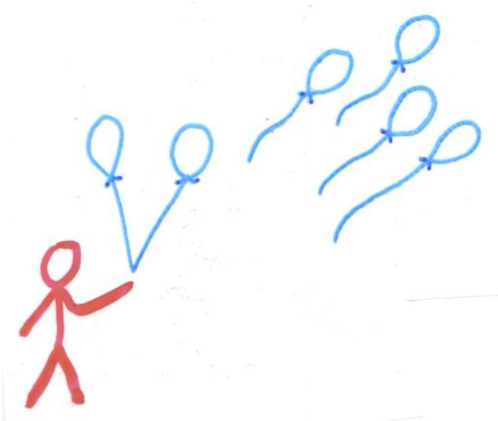
b) Vergleichen Sie dann Ihre Vorschläge in einer Dreier-/ Vierergruppe im Hinblick auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

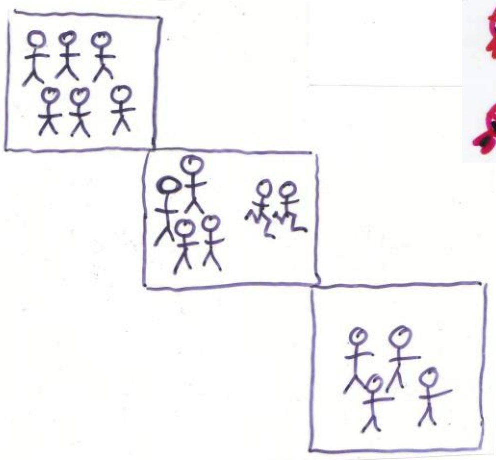
c) Entscheiden Sie sich schließlich innerhalb der Gruppe für eine der Zeichnungen oder gestalten Sie eine bessere Zeichnung.

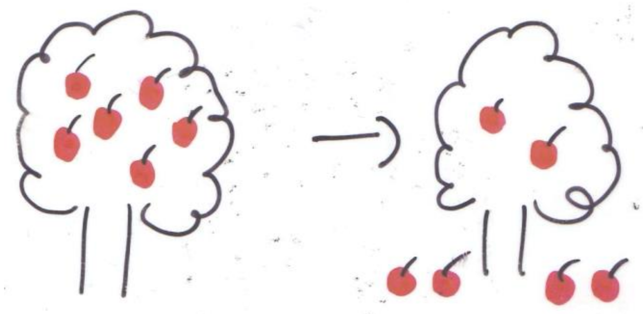
2. Ambivalenz von Darstellungsmitteln

$$\boxed{6 - 4 = 2}$$

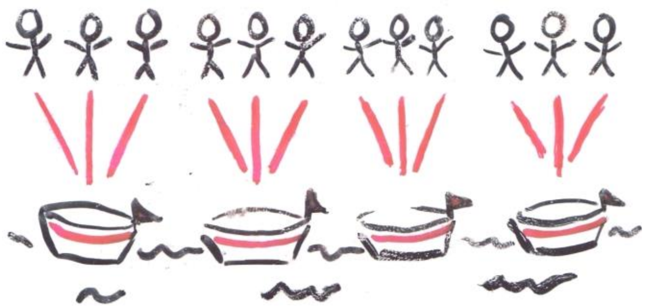




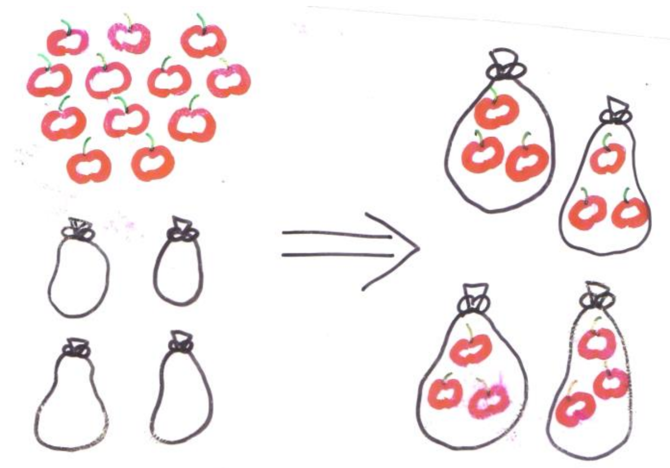


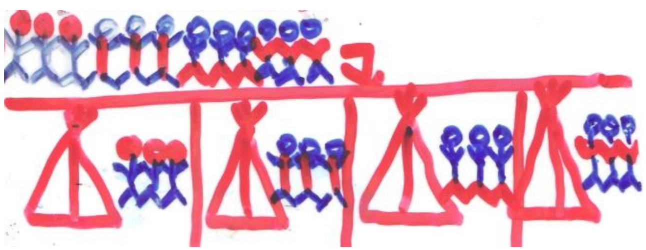


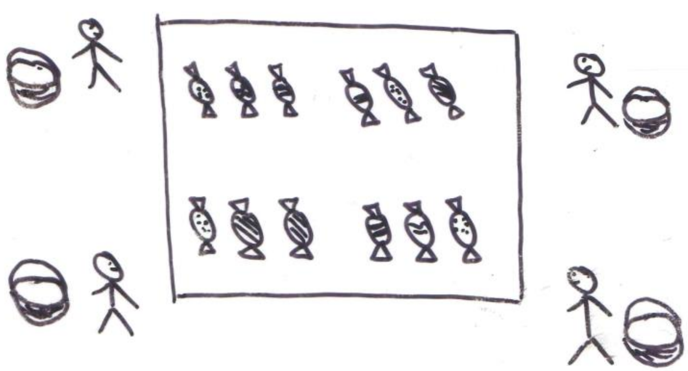
2. Ambivalenz von Darstellungsmitteln

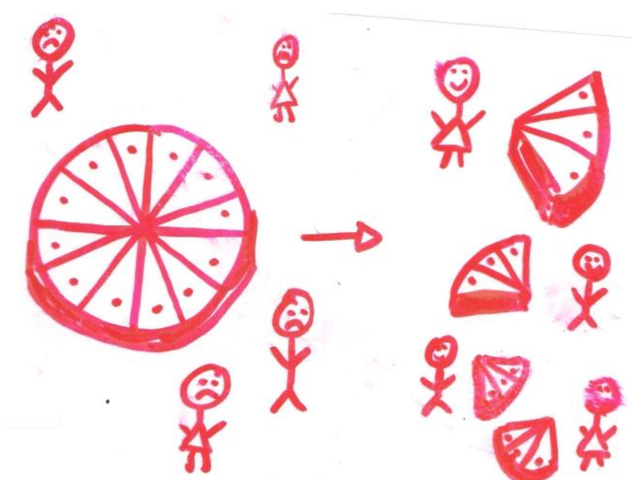


$12 : 4 = 3$





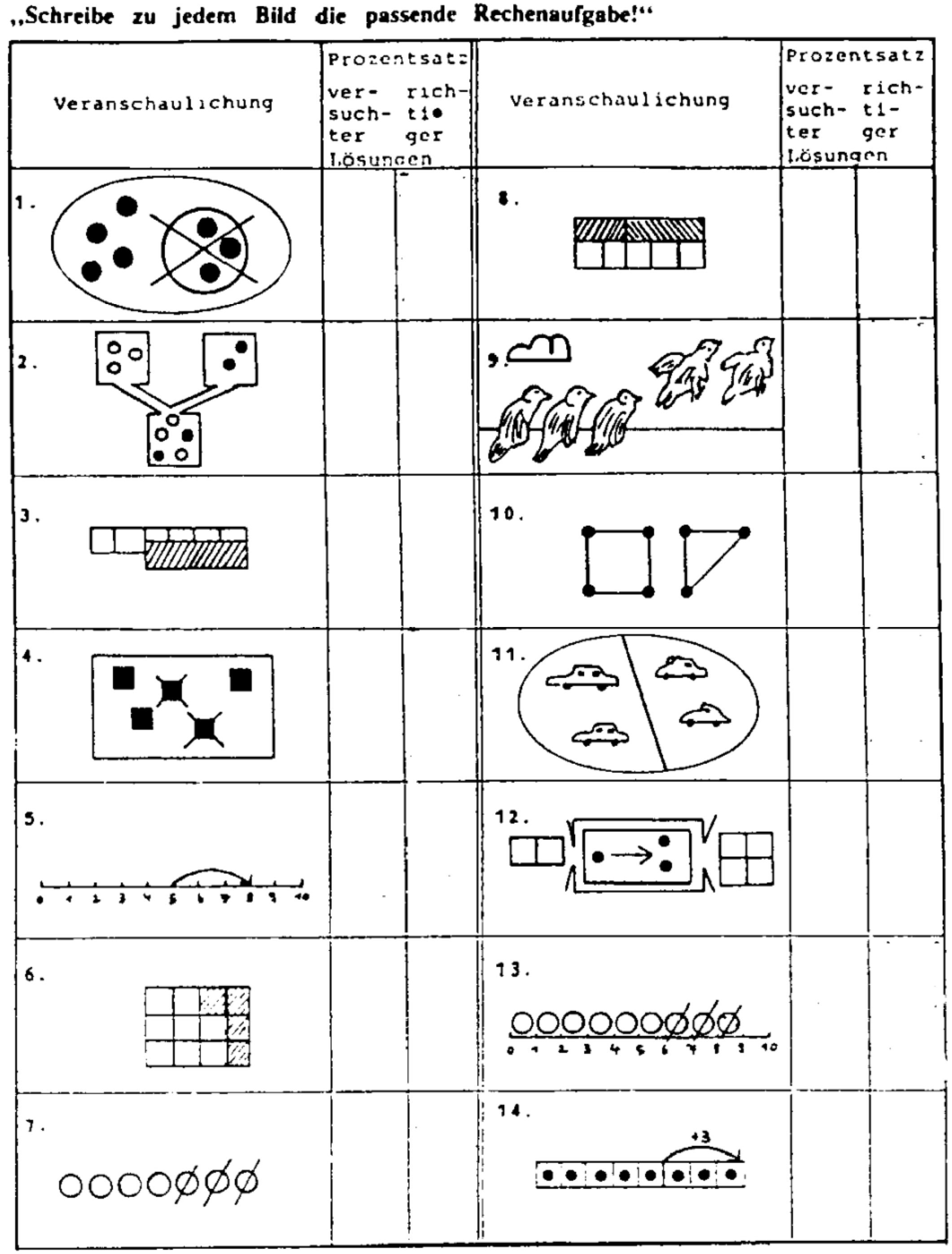




2. Ambivalenz von Da

a) Schreiben Sie zu jeder Veranschaulichung die passende(n) Rechenauf-gabe(n)!

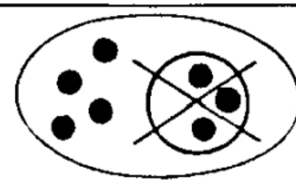
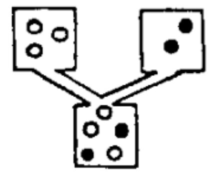
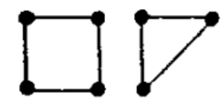
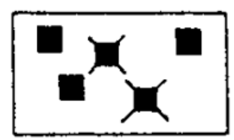
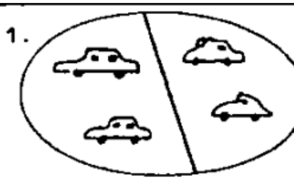
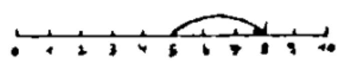
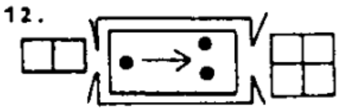
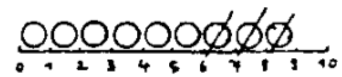
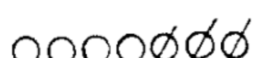
b) Vermuten Sie für jede Veranschaulichung, wie viel Prozent der Erstkläss-lerinnen und Erstklässler am Ende des Schuljahres die passende Rechenaufgabe notiert haben.0



Quelle: Schipper, W. & Hülshoff, A. (1984): Wie anschaulich sind Veranschaulichungshilfen? In: Grundschule. 16 (4)

2. Ambivalenz von

Schreibe zu jedem Bild die passende Rechenaufgabe!

Veranschaulichung	Prozentsatz versuchter Lösungen	Prozentsatz richtiger Lösungen	Veranschaulichung	Prozentsatz versuchter Lösungen	Prozentsatz richtiger Lösungen
1. 	94	66	8. 	40	29
2. 	54	23	9. 	99	66
3. 	47	8	10. 	85	64
4. 	88	56	11. 	96	88
5. 	43	13	12. 	67	30
6. 	43	29	13. 	89	59
7. 	96	67	14. 	61	37

Ergebnisse von 1981 (!)

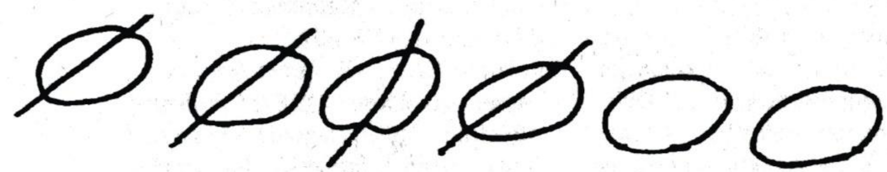
Quelle: Schipper, W. & Hülshoff, A. (1984): Wie anschaulich sind Veranschaulichungshilfe
In: Grundschule. 16 (4)

2. Ambivalenz v

Konkretes kann abstrakt sein.

Das Kullersystem

Aus einem Gespräch zwischen dem behinderten Ralf und seiner Therapeutin über den lange zurückliegenden Erstrechenunterricht. „Das Kullersystem habe ich überhaupt nicht verstanden. Frau B. hat gesagt: Schnucki frisst den Kuchen auf. Sie hat sechs Kullern an die Tafel gemalt und vier durchgestrichen und dann eingekringelt. ... Ich habe das Durchstreichen nicht verstanden. Mit Zahlen wäre es wohl leichter gewesen als mit Kullern ... Ich weiß nur, dass ich zuerst mit Zahlen gehandelt habe. Und dann kam plötzlich das Kullersystem. Und das war der Zusammenbruch. Ich versuchte es zu verstehen. Aber ich weiß heute davon nichts mehr – wirklich nichts mehr. Sie hatte die Kullern halbiert. Ich versuchte es besser zu verstehen. Ich suchte nach dem Kern. Sie hat gleich halbiert und dann hat sie das Lernen für sich einkassiert ...“ „Ich verstehe nicht, was meinst du? Was meinst du mit halbiert?“ „Ja, zum Beispiel bei den Wenigeraufgaben. Zum Beispiel bei der Aufgabe ‘Schnucki frisst den Kuchen auf’.“ „Ich verstehe nicht, was du meinst. Was meinst du mit halbiert?“ „Ja, sie hat halbiert, aber die redet vom Durchstreichen. Sie hat die Kullern halbiert. Das ist doch alles Heuchelei. Wenn man einen Apfel halbiert, dann hat man doch zwei Hälften.“ „Ich verstehe dich nicht. Kannst du es aufmalen, was sie an die Tafel gezeichnet hat?“ „Ja, das kann ich.“ Er malte.



Als ich mir die Zeichnung anschaute, sah ich, dass Ralf Recht hatte.

Iris Mann (1991, 16f.)

2. Ambivalenz von Darstellungsmitteln

Alle Darstellungsmittel sind....

- einerseits Lernhilfen, da sie mathematische Sachverhalte über einführende Phasen hinweg verständlich und kommunizierbar machen
- andererseits aber auch Lernstoff, da ihre jeweiligen Bedeutungen und die Formen des Gebrauchs erst erlernt werden müssen.

Folgerung:

Kontinuierlicher Einsatz gut ausgewählter, miteinander harmonierender Darstellungsmittel über die (Vor-)Schulzeit hinweg.

2. Ambivalenz von Darstellungsmitteln

a) Welche Kriterien ziehen Sie für die Auswahl guter (nicht-symbolischer) Darstellungsmittel heran?

b) Welche Darstellungsmittel für den Arithmetikunterricht in der Grundschule kennen Sie?

c) Ordnen Sie die Ihnen bekannten Darstellungsmittel: Welche Gemeinsamkeiten, welche Unterschiede weisen diese auf?

d) Welche Darstellungsmittel der Grundschule können auch in der Sekundarstufe I fortgesetzt werden? Wie?

2. Ambivalenz von Darstellungsmitteln

Geeignete Darstellungsmittel …

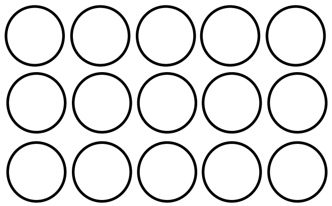
- verkörpern fundamentale Ideen der Arithmetik;
- sind über die Schuljahre hinweg fortsetzbar, so dass sie vielfältig nutzbar sind und sich ihre Strukturen auf unterschiedliche Inhaltsbereiche und Arbeitsformen anwenden lassen;
- helfen, die Verfestigung des zählenden Rechnens zu vermeiden bzw. abzubauen;
- gestatten Übertragungen in eine von den Schülern zeichenbare Form, so dass die Zahldarstellungen und die arithmetischen Operationen im Kopf vorstellbar sind;
- ermöglichen es den Schülern, eigene Vorgehensweisen zu entwickeln, um diese mit den Mitschülerinnen und Mitschülern auszutauschen und zu diskutieren;
- zeichnen sich durch Übersichtlichkeit und leichte Handhabbarkeit aus und verursachen möglichst geringe Kosten.

2. Ambivalenz von Darstellungsmitteln

Ein Unterscheidungsmerkmal

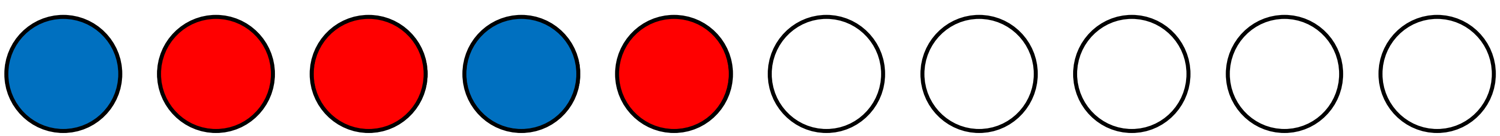
- **Lineare Darstellungen** am Beispiel der Addition (ausführlich; vgl. Wittmann/Müller 1990/1992: HB prod. RÜ; Treffers/de Moor 1989ff.: Proeve van een National Programma)

- **Flächige Darstellungen** am Beispiel der Multiplikation (überblicksartig; vgl. Wittmann/Müller 1990/1992; Müller 1997: Von Punktmustern zu quadratischen Gleichungen)



Spielerische Erfahrungen

Nim-Spiel

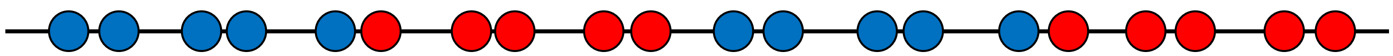


Zwanzigerraum

Zählen in Schritten an Zwanzigerreihe und Zwanzigerkette

Zwanzigerreihe

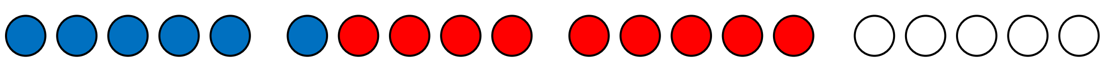
Zwanzigerkette



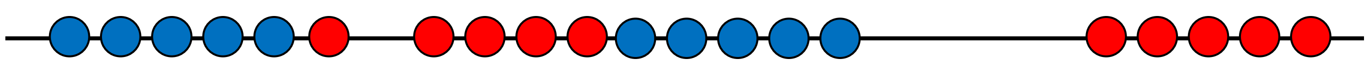
Addition an Zwanzigerreihe und Zwanzigerkette

6 + 9

Zwanzigerreihe



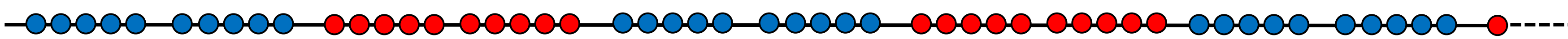
Zwanzigerkette



3. Kontinuität von linearen Darstellungen – Beispiel Addition

Hunderterraum

Zählen in Schritten an der Hunderterkette

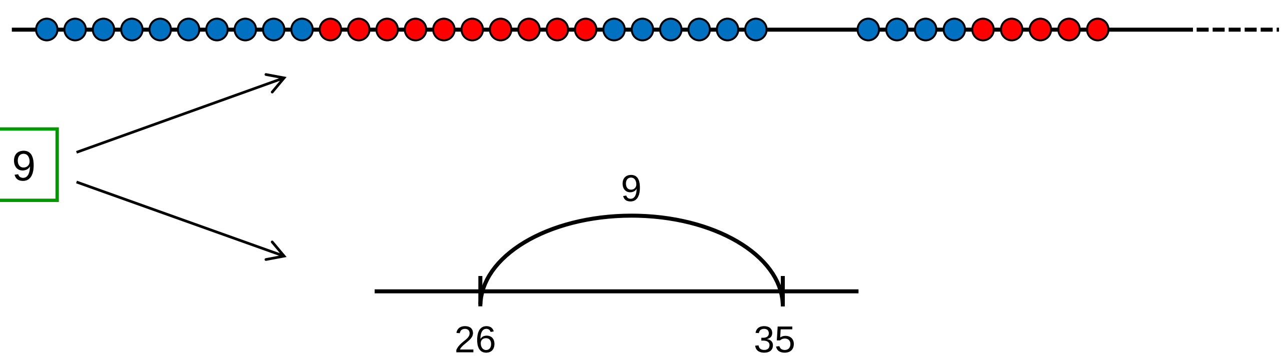


26 + 9

Addition an der Hunderterkette

Von der Hunderterkette zum Rechenstrich

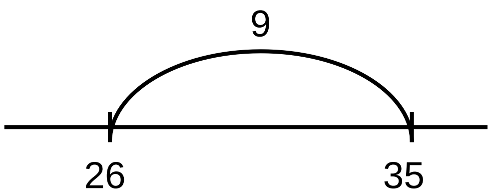
26 + 9



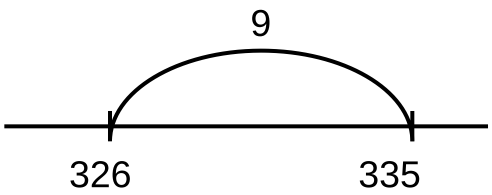
3. Kontinuität von linearen Darstellungen – Beispiel Addition

Tausenderraum

26 + 9



326 + 9

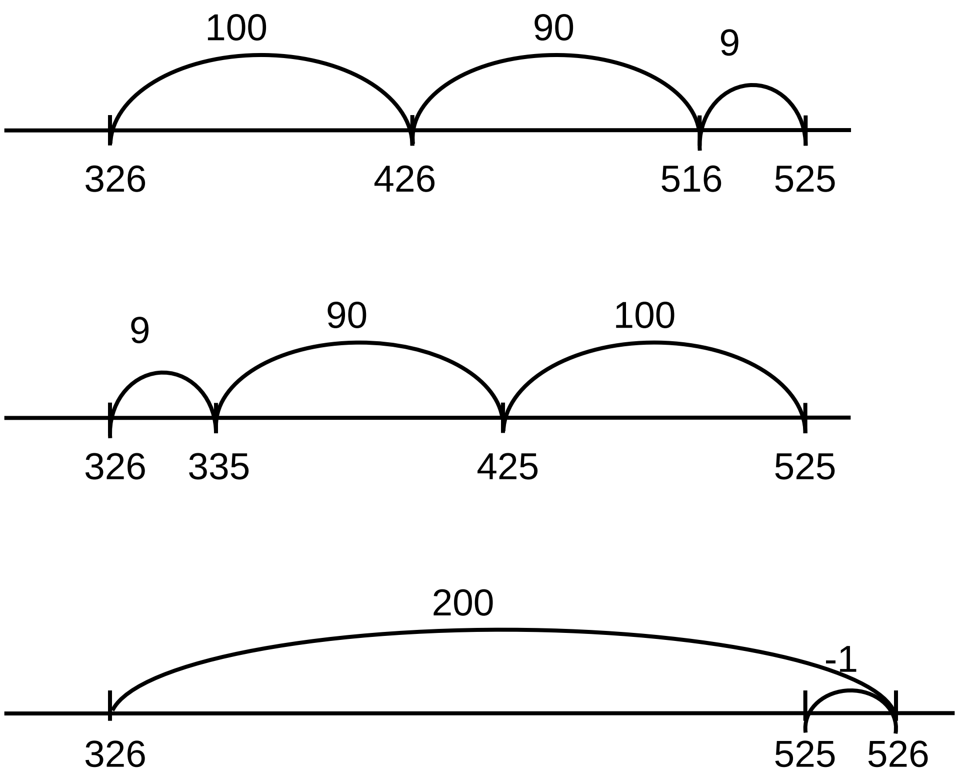


Rechnen Sie nun die Aufgabe 326+199 nach verschiedenen Strategien am Rechenstrich.

Tausenderraum

Verschiedene Rechenwege

326 + 199



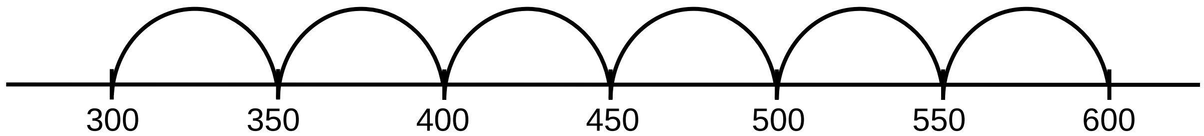
Nachteil: ‚Stellenwerte extra' (300+100; 20+90; 6+9) lässt sich nicht darstellen.

3. Kontinuität von linearen Darstellungen – Beispiel Addition

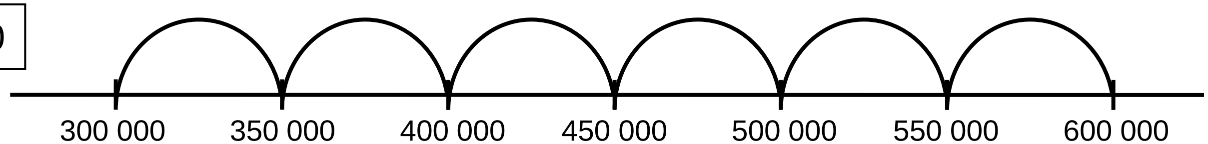
Millionraum

Zählen im Millionraum am Rechenstrich

Immer plus 50

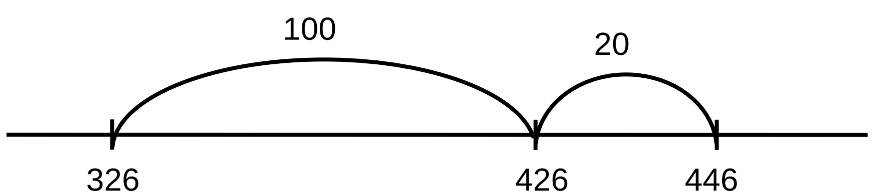


Immer plus 50 000

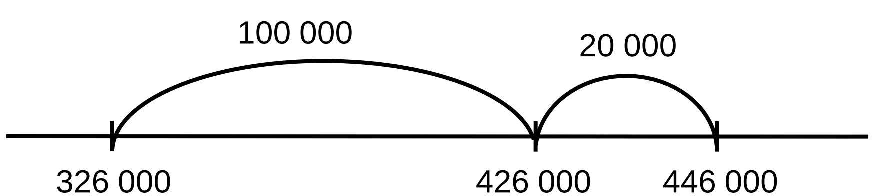


Rechnen im Millionraum am Rechenstrich

326 + 120



326 000 + 120 000



3. Kontinuität von linearen Darstellungen – Beispiel Addition

Inwieweit kann der Rechenstrich in der Sekundarstufe I für folgende Themen genutzt werden?

a) Dezimalzahlen

b) Brüche

c) Prozentrechnung

d) Negative Zahlen

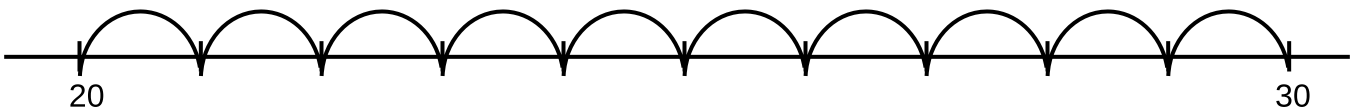
e) Algebra

3. Kontinuität von linearen Darstellungen – Beispiel Addition

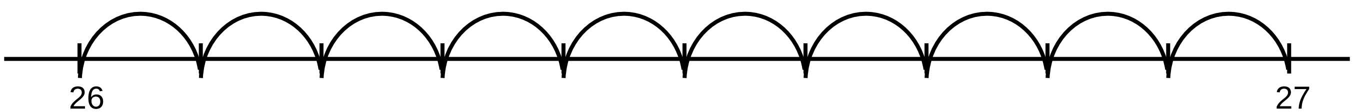
Dezimalzahlen

Zählen mit Dezimalzahlen am Rechenstrich

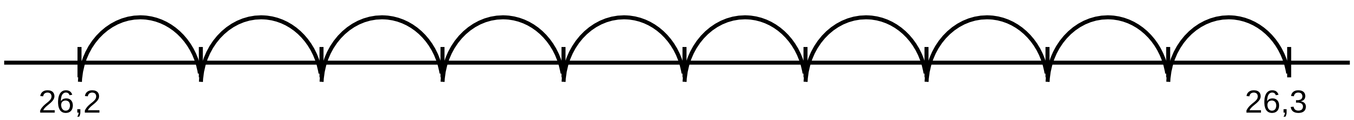
Immer plus 1



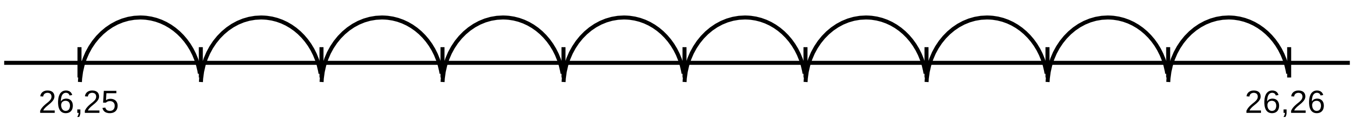
Immer plus 0,1



Immer plus 0,01

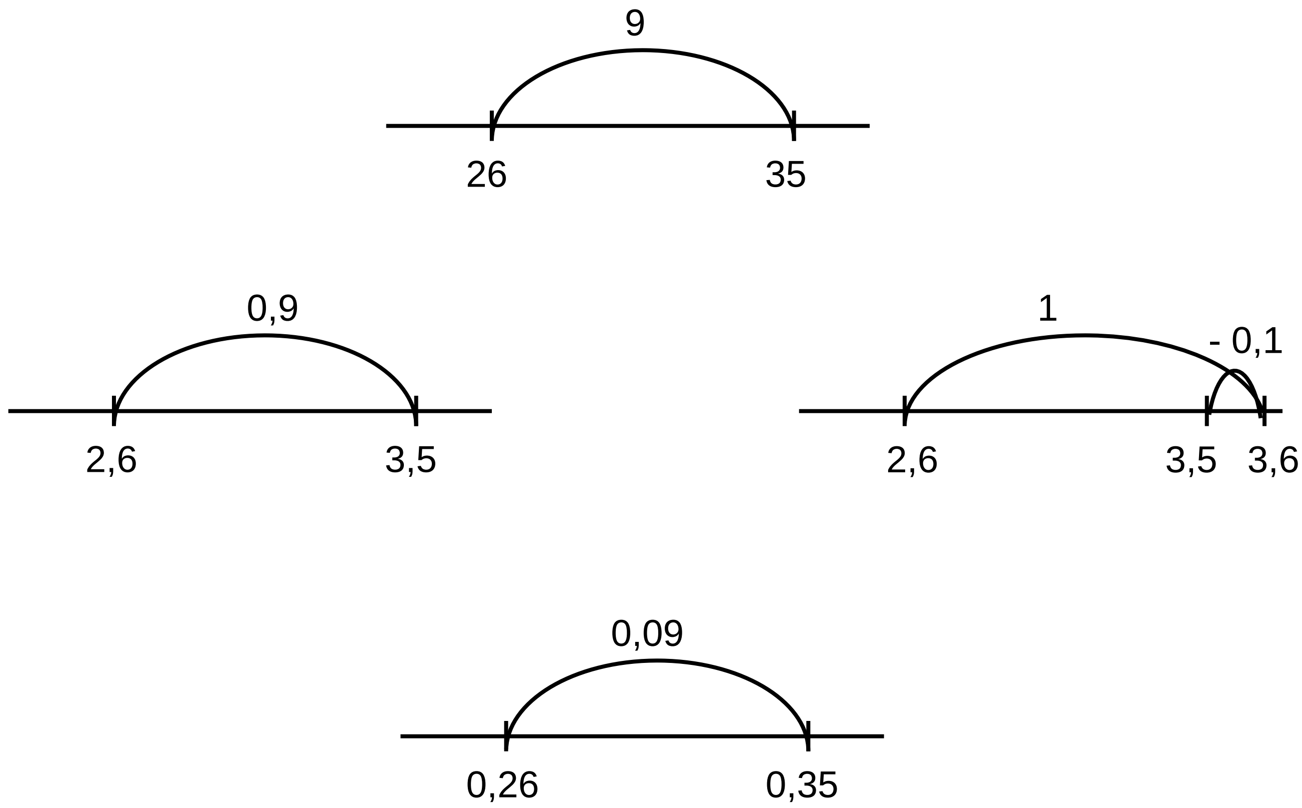


Immer plus 0,001



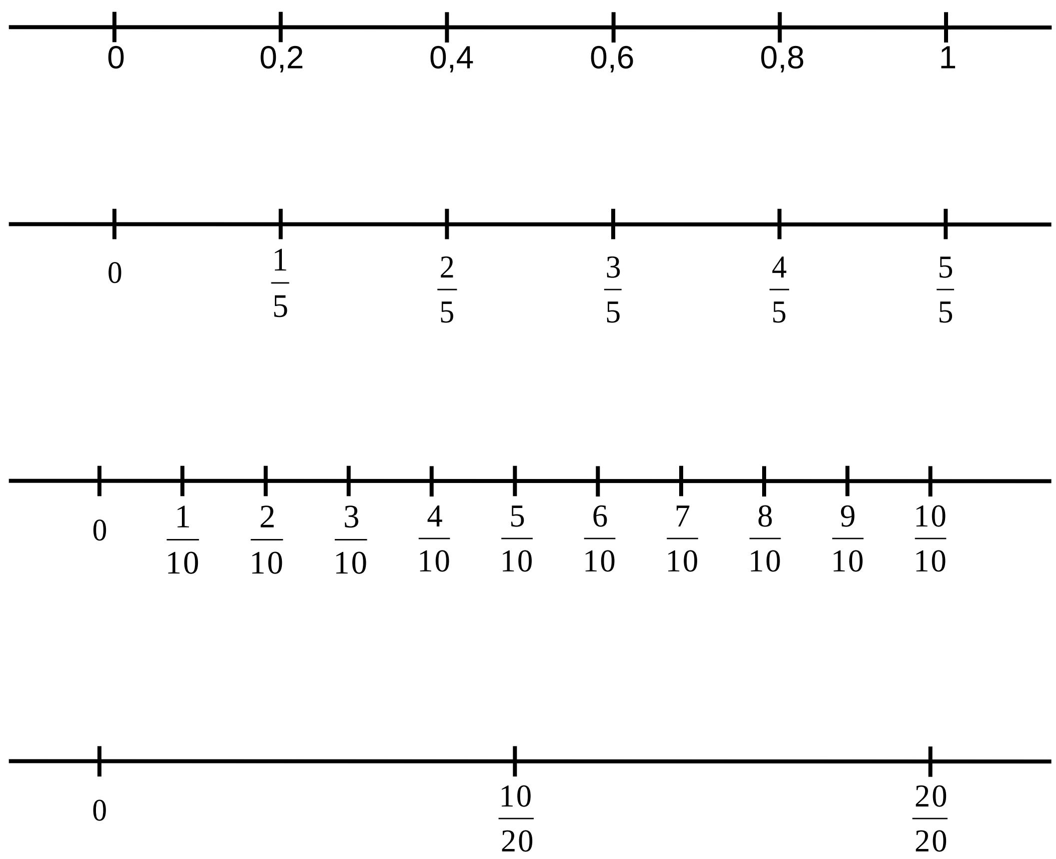
Dezimalzahlen

Rechnen mit Dezimalzahlen am Rechenstrich



Brüche

Zählen mit Brüchen am Rechenstrich

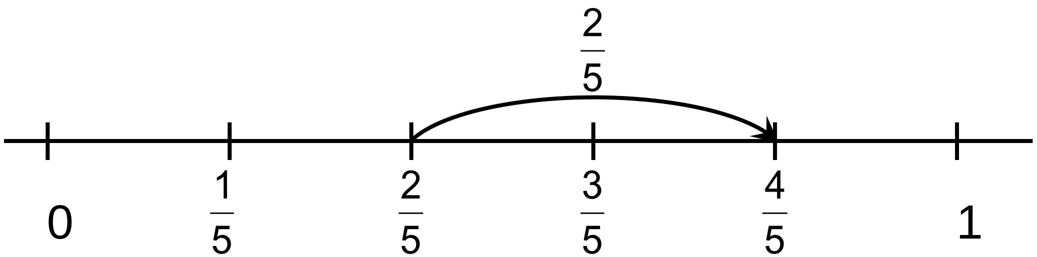


3. Kontinuität von linearen Darstellungen – Beispiel Addition

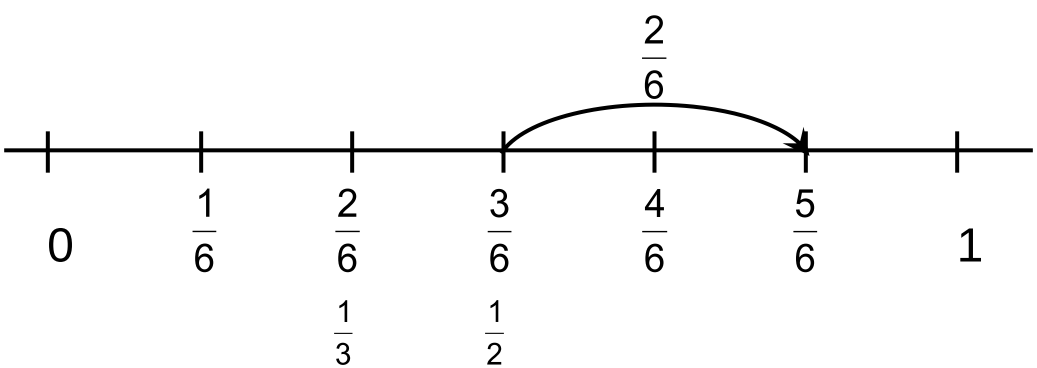
Brüche

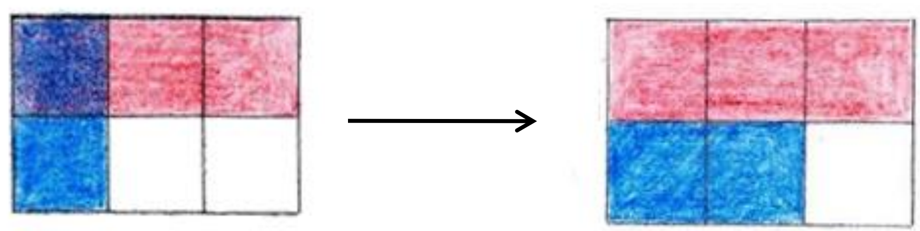
Rechnen mit Brüchen am Rechenstrich

$$\boxed{\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}}$$



$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}}$$

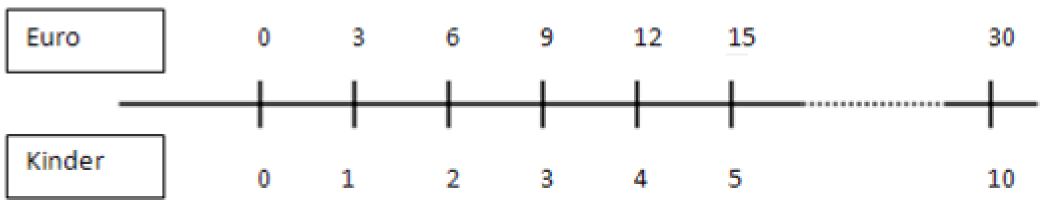




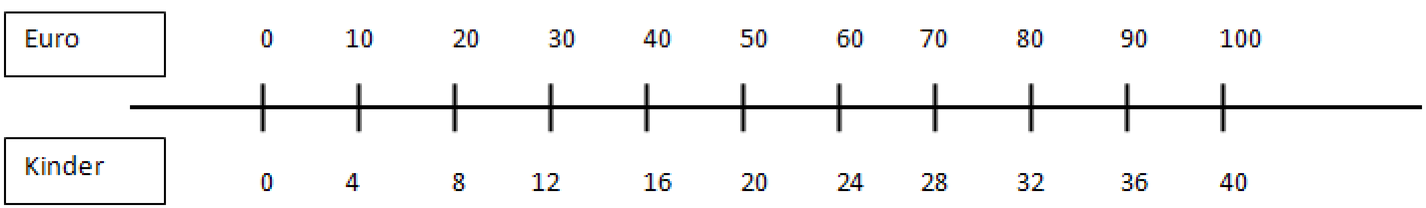
Verhältnisse und Prozente

Verhältnisse

Eintritt pro Kind: 3 €



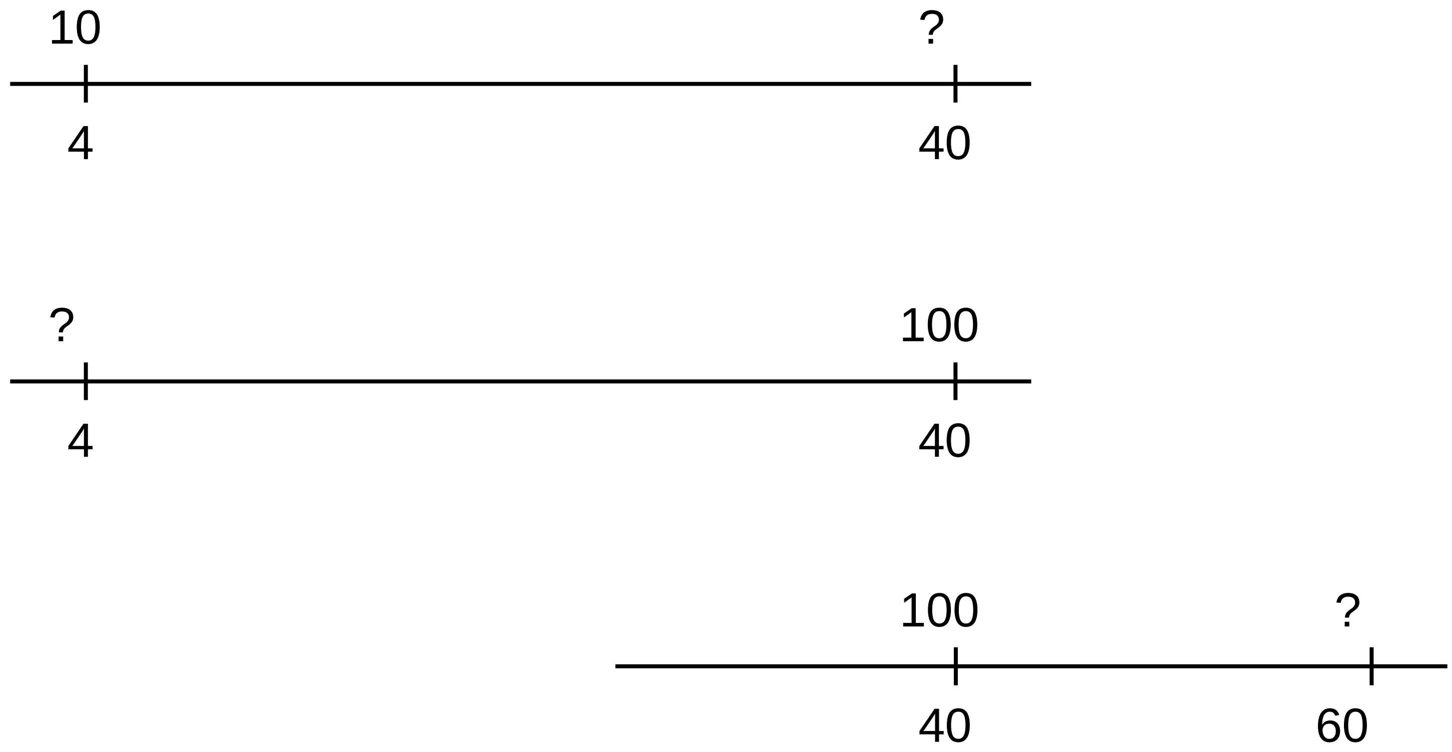
Eintritt für eine Gruppe à 4 Kinder: 10 €



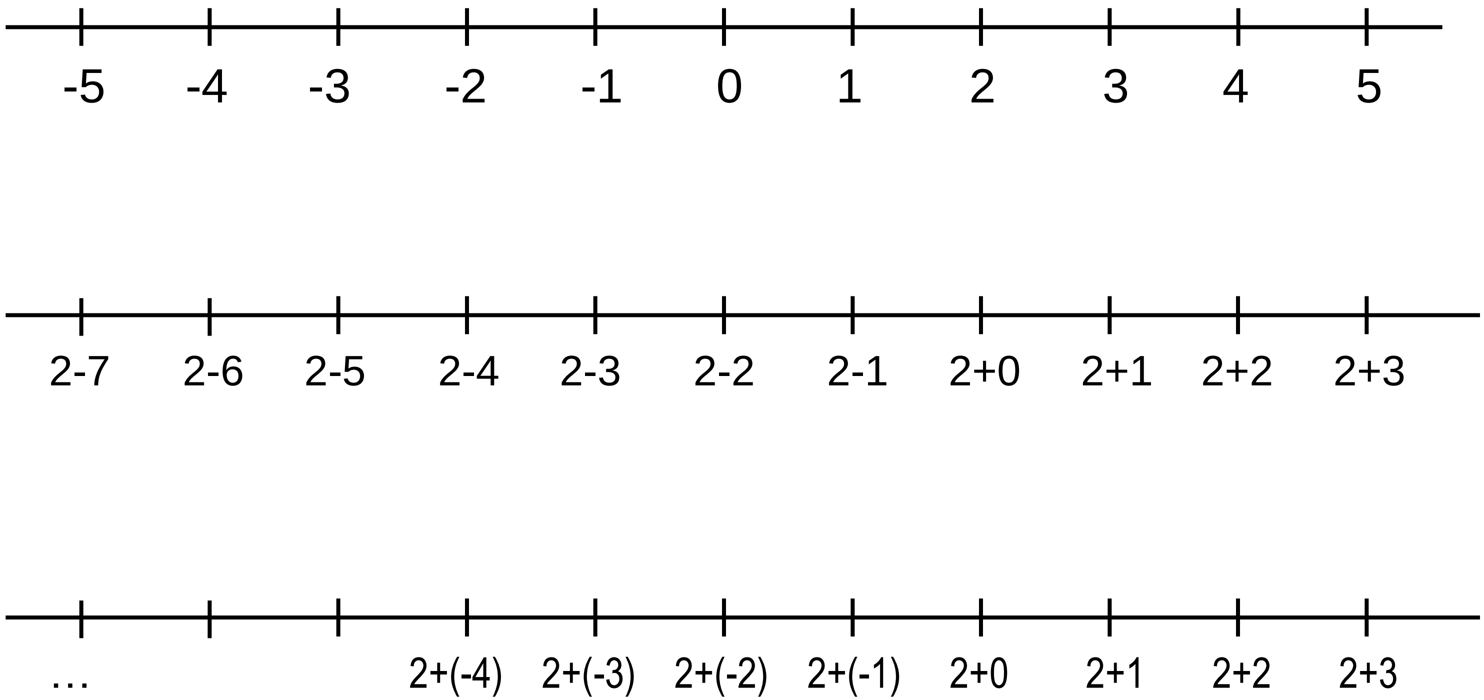
3. Kontinuität von linearen Darstellungen – Beispiel Addition

Verhältnisse und Prozente

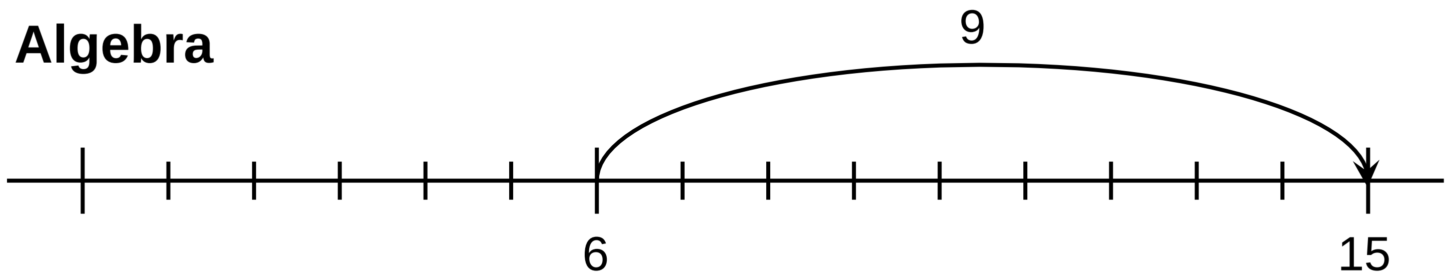
Prozente

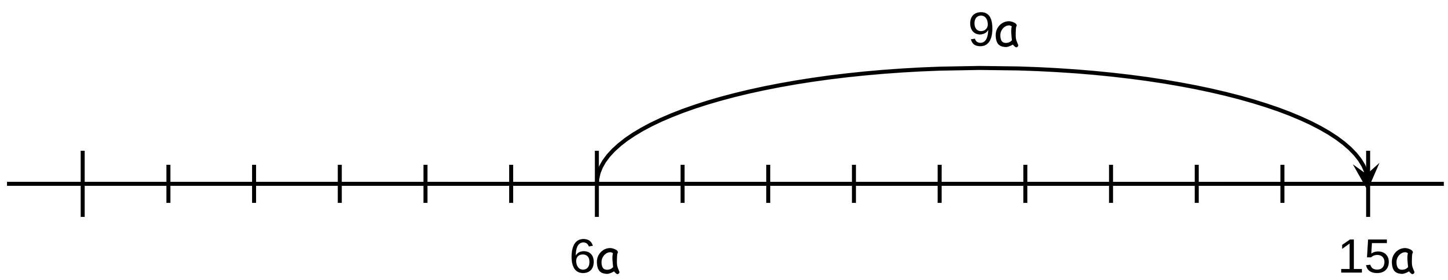


Negative Zahlen

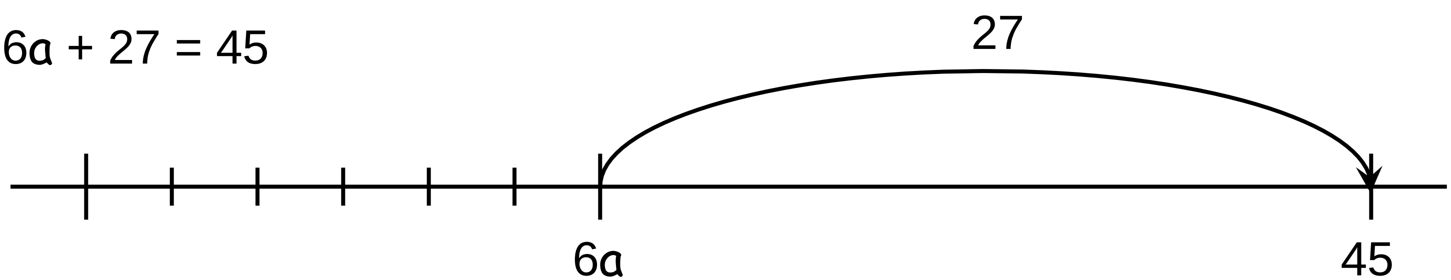


Algebra





$6a + 27 = 45$



$6a = 45 – 27 = 18$

$a = 3$

Lineare Darstellungen – nicht nur zum Rechnen

a) Wähle eine dreistellige Startzahl. **430**

Addiere 50 zur Startzahl **480**

Subtrahiere 50 von der Startzahl. **380**

Subtrahiere die Summe und die Differenz voneinander. **100**

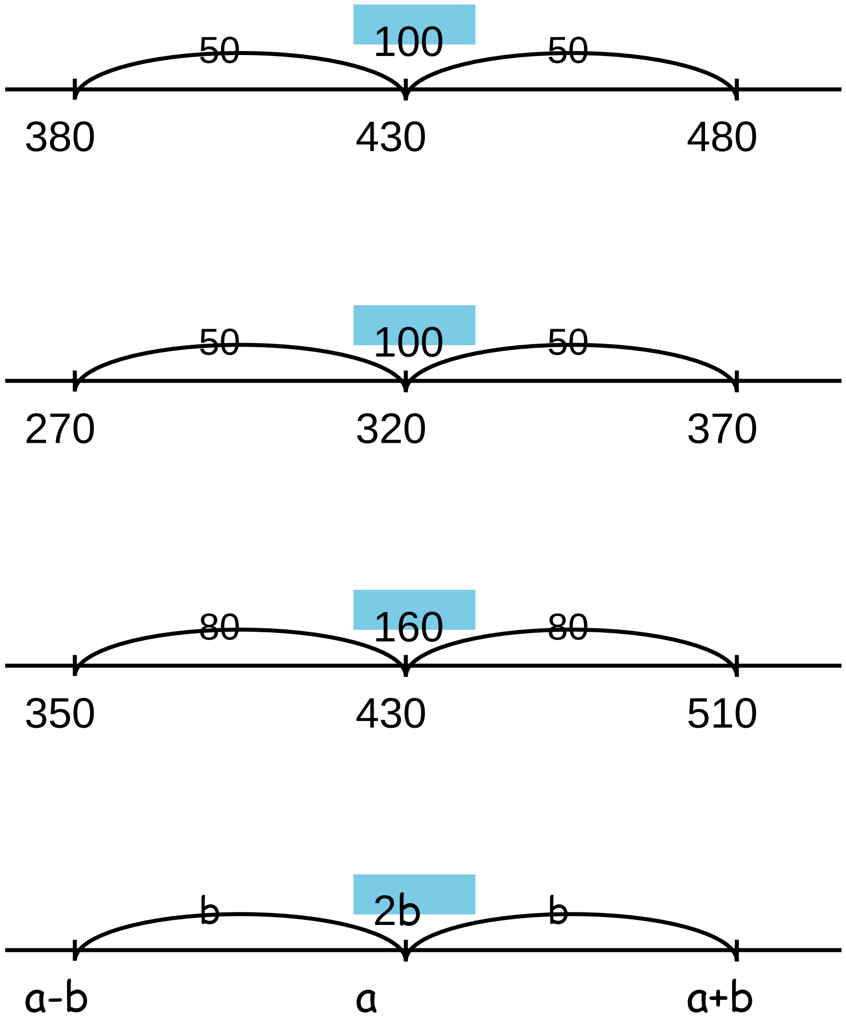
b) Wähle andere Startzahlen und rechne ebenso. Was fällt auf?
Begründe (mit Hilfe des Rechenstrichs).

c) Ersetze die 50 durch andere Zahlen, was fällt auf?
Begründe (mit Hilfe des Rechenstrichs).

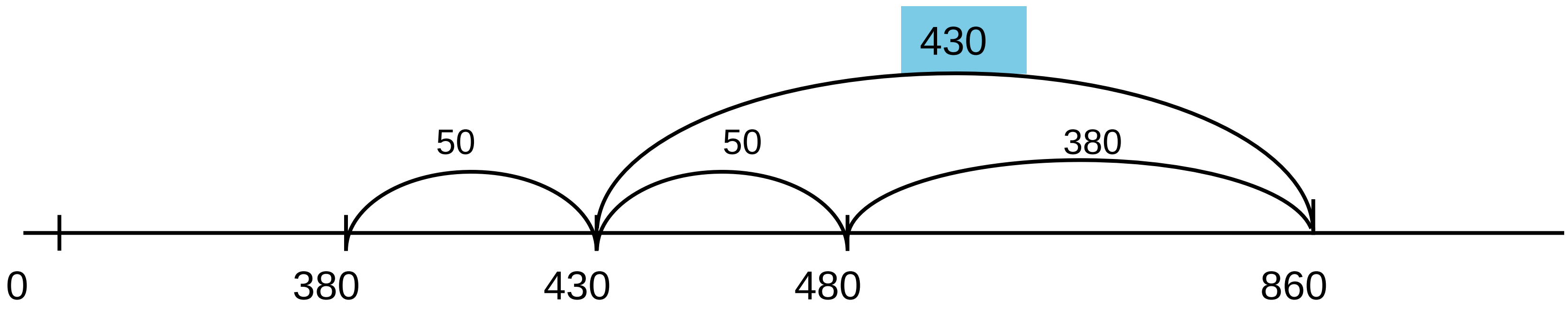
d) Addiere die Summe und die Differenz. Was fällt auf?
Begründe (mit Hilfe des Rechenstrichs).

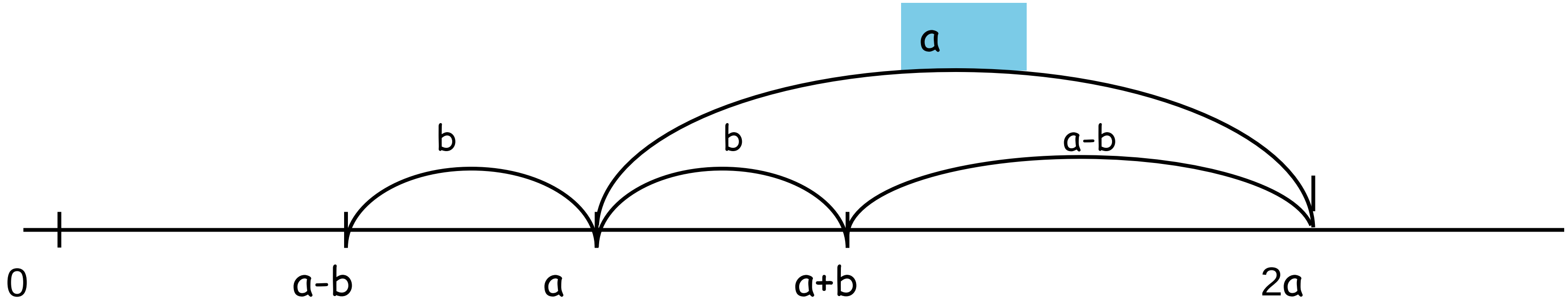
3. Kontinuität von linearen Darstellungen – Beispiel Addition

Lineare Darstellungen – nicht nur zum Rechnen



Lineare Darstellungen – nicht nur zum Rechnen

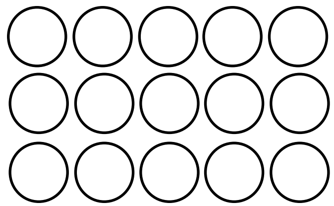




4. Kontinuität von flächigen Darstellungen – Beispiel Multiplikation

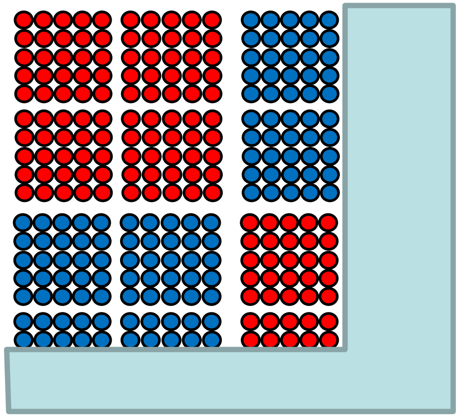
Kleines Einmaleins

3 • 5



Großes Einmaleins

17 • 15

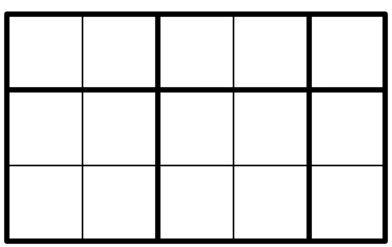


Multiplikation von Brüchen/Dez-Zahlen

1,5 • 2,5

$2{,}5 = \frac{5}{2}$

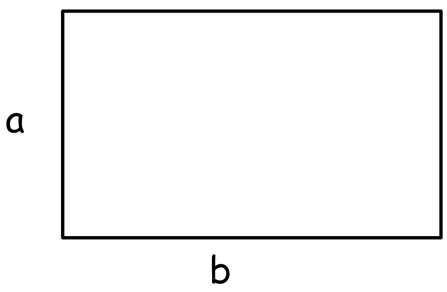
$1{,}5 = \frac{3}{2}$



$$\frac{3}{2} \bullet \frac{5}{2} \quad \frac{15}{4}$$

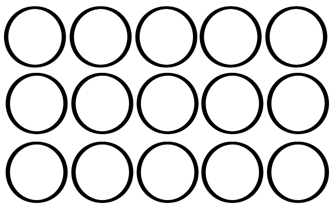
Multiplikation allgemein

a • b



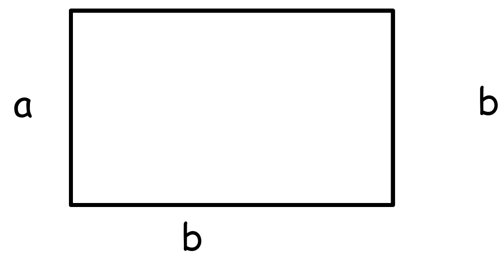
4. Kontinuität von flächigen Darstellungen – Beispiel Multiplikation

Kommutativgesetz am Punktefeld



$\boxed{3 \cdot 5} = \boxed{5 \cdot 3}$

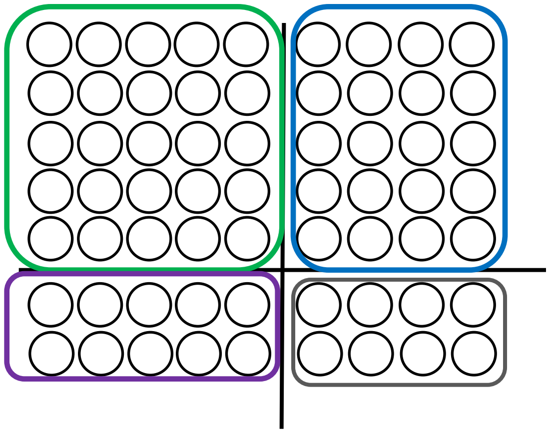
Kommutativgesetz allgemein



a

$\boxed{a \cdot b} = \boxed{b \cdot a}$

Distributivgesetz am Folienkreuz



7 • 9 = 5 • 5 + 5 • 4 + 2 • 5 + 2 • 4

Distributivgesetz am Malkreuz

•	5	4	
5	25	20	
2	10	8	
	35	28	63

7 • 9 = 25 + 20 + 10 + 8

Distributivgesetz am Malkreuz

•	10	9	
10	100	90	
7	70	63	
	170	153	323

17 • 19 = 100 + 90 + 70 + 63

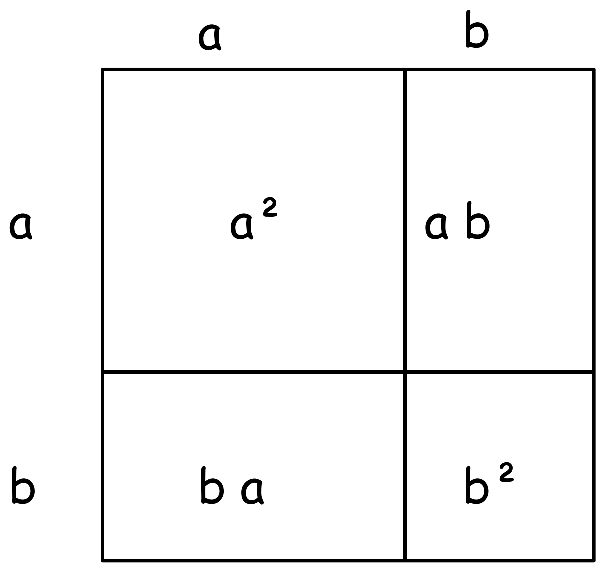
Distributivgesetz allgemein

•	c	d	
a	ac	ad	
b	bc	bd	
	ac+bc	ad+bd	

(a+b) • (c+d) = ac + ad + bc + bd

4. Kontinuität von flächigen Darstellungen – Beispiel Multiplikation

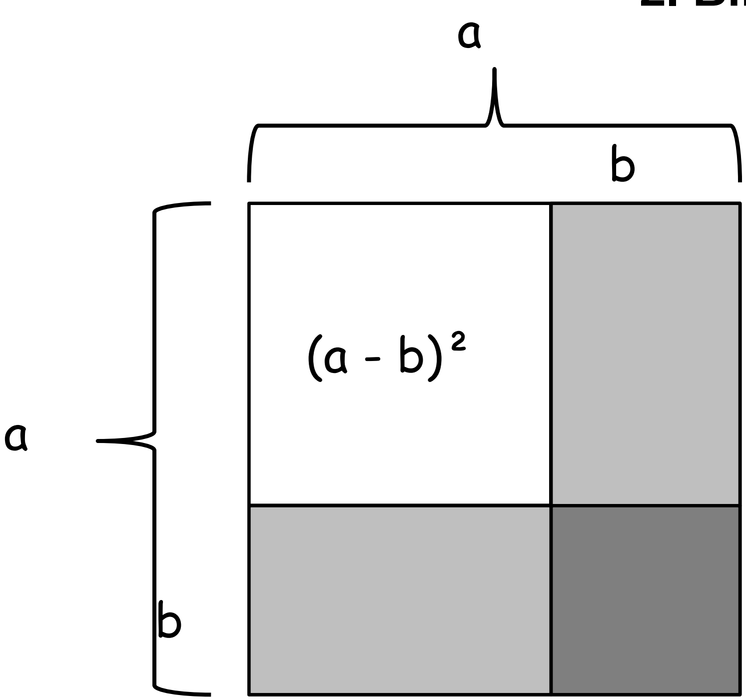
1. Binomische Formel



$\cdot$	a	b
a	a^2	ab
b	ba	b^2

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

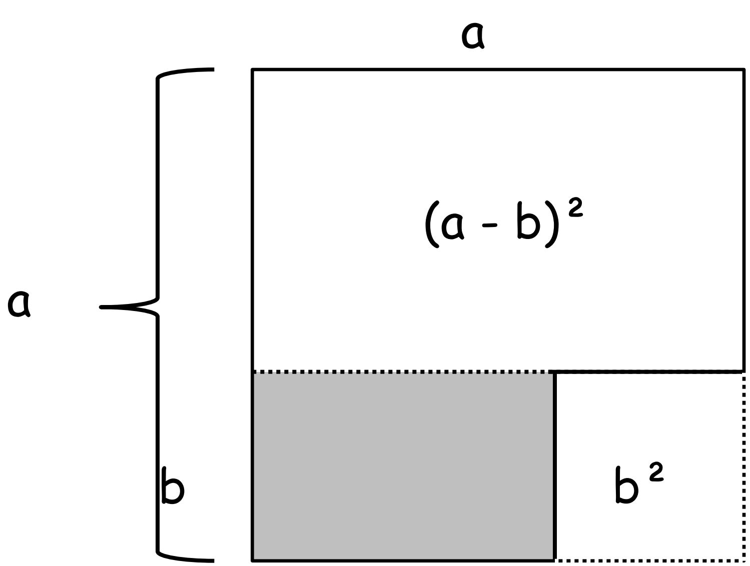
2. Binomische Formel



$\cdot$	a	$-b$
a	a^2	$-ab$
$-b$	$-ba$	b^2

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. Binomische Formel



·	a	b
a	a^2	ab
-b	-ba	$-b^2$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Rechne aus. Was fällt dir auf?

1.) $2 \cdot 2 = 4$
$3 \cdot 1 = 3$

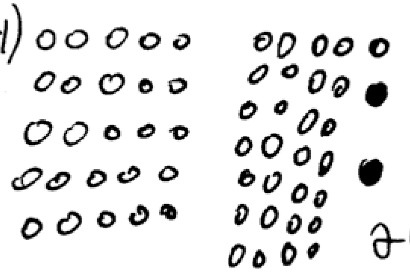
2.) $3 \cdot 3 = 9$
$4 \cdot 2 = 8$

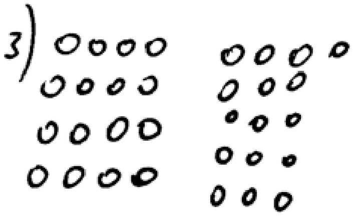
3.) $4 \cdot 4 = 16$
$5 \cdot 3 = 15$

4) $5 \cdot 5 = 25$
$6 \cdot 4 = 24$

5) $6 \cdot 6 = 36$
$7 \cdot 5 = 35$

6 $7 \cdot 7 = 49$
$8 \cdot 6 = 48$

4)


3)


- Die oberen Zahlen lauten immer z.B. 5·5
- In der ~~er~~ 2. Reie muß die 1 Zahl größer sein als die obere und ~~2~~ 2 andere muß immer kleiner sein
- ~~A~~ Das obere ergebnis ist immer gröser als das untere
- Das Ergebnis und die Aufgabe sind immer um 1 größer oder um ein kleiner


Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!