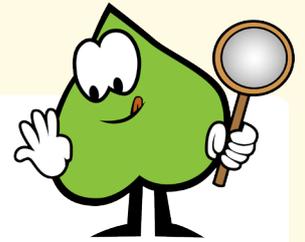


# DAS NUTZEN MATHEFORSCHER



## PROBLEMLÖSEN LERNEN:

Bei den prozessbezogenen Kompetenzen ist es so ähnlich wie beim kleinen Einmaleins: Manche Kinder lernen es von selbst, viele andere nicht. Daher müssen die Schülerinnen und Schüler beim Erwerb der prozessbezogenen Kompetenzen genauso unterstützt werden wie beim Erlernen des Einmaleins.

Und noch etwas ist vergleichbar: Genauso wenig, wie das Einmaleins innerhalb von einer Woche gelernt werden kann, kann man den Gebrauch prozessbezogener Kompetenzen in einem vergleichsweise kurzen Zeitraum erlernen. Problemlösen, Argumentieren, Darstel-

len und Modellieren sind sogar Kompetenzen, die über die gesamte Schulzeit hin entwickelt und daher immer wieder angesprochen werden müssen.

Und das unterscheidet sie nun vom kleinen Einmaleins, welches die Schülerinnen und Schüler spätestens im 3. Schuljahr auswendig beherrschen sollten. Wie Kinder beim Erwerb der prozessbezogenen Kompetenzen unterstützt werden können, zeigt das Mathe-Forscher-Plakat exemplarisch am Beispiel der prozessbezogenen Kompetenz des Problemlösens.

## BEGRIFFLICHES:

Problemlösen ist kurz gesagt dadurch gekennzeichnet, dass die vorhandenen bzw. gegenwärtig aktivierbaren Kenntnisse und Fähigkeiten zur Lösung einer Aufgabenstellung noch nicht ausreichen. Eine prinzipiell überwindbare Barriere verhindert zum gegenwärtigen Zeitpunkt die Lösung.

Aufgaben, die mit Routineverfahren gelöst werden können, sind keine Aufgaben, die das Problemlösen anregen. Sie sind zu ‚leicht‘. Auch Aufgaben, die zu schwierig sind, weil die vorhandenen Kenntnisse und Fähigkeiten keinen geeigneten Ausgangspunkt darstellen oder weil die zur Aufgabenlösung benötigten Kenntnisse nicht aktiviert werden können, sind keine Problemlöseaufgaben. Sie ermöglichen der/dem Lernenden dauerhaft bestenfalls unsystematisches Probieren.

Das bedeutet natürlich auch: Ob eine Aufgabe eine Aufgabe zum Problemlösen ist, hängt von den individuellen Kenntnissen und Fertigkeiten der/des potenziellen Problemlösenden ab. Hierzu ein Beispiel. Im ersten

Schuljahr erhalten die Lernenden die Aufgabe, möglichst geschickt alle Zerlegungen der Zahl 10 in zwei Summanden zu finden.

Manche Kinder werden von Anfang an systematisch vorgehen, also z. B. mit  $0+10$  beginnend jeweils den ersten Summanden um 1 erhöhen und den zweiten jeweils um 1 vermindern. Für diese Kinder existiert vermutlich die Barriere nicht; man könnte ihnen aber eine verwandte Aufgabe stellen, etwa die Frage nach dem (begründeten) Zusammenhang der Anzahl der Möglichkeiten und der zu zerlegenden Zahl (Es gibt immer ein Stockwerk mehr als es die Zahl selbst angibt; also vier Stockwerke für die 3, fünf Stockwerke für die 4 etc.). Andere Lernende werden eher unsystematisch einzelne Zerlegungen notieren und beispielsweise durch den Vergleich mit den von den Mitschülern gefundenen Möglichkeiten in zunehmender Weise ordnen und dabei den Einblick auf die Zusammenhänge richten und systematischer vorgehen.

## KOMPETENZERWARTUNGEN:

In der Zusammenschau von Lehrplänen und Bildungsstandards kann man folgende Teil-Kompetenzerwartungen für das Problemlösen formulieren (vgl. Zannetin & Selter, 2018, S. 9ff.).

- **erschließen:** Fragen zu mathematischen Sachverhalten stellen; Problemstellungen die für die Lösung relevanten Informationen entnehmen; Problemstellungen in eigenen Worten wiedergeben
- **lösen:** Daten durch Zählen, Messen oder Schätzen gewinnen und verarbeiten; problemhaltige Aufgaben eigenständig bearbeiten; zunehmend systematisch und zielorientiert vorgehen; Lösungsstrategien anwenden; Einsichten in Zusammenhänge zur Problemlösung nutzen

- **reflektieren und überprüfen:** Ergebnisse auf Angemessenheit überprüfen; Fehler finden und korrigieren; verschiedene Lösungswege vergleichen und bewerten

- **übertragen:** Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung nutzen; Vorgehensweisen auf ähnliche oder weiterführende Problemstellungen übertragen

- **erfinden:** Aufgaben (in Anlehnung an vorgegebene) erfinden; eigene Lösungsstrategien entwickeln und nutzen

Problemlösen ist also allgemein gesprochen zielgerichtetes Denken und Handeln in Situationen, in denen eine Diskrepanz zwischen den vorhandenen Mitteln und den

Aufgabenanforderungen wahrgenommen wird. In der Auseinandersetzung mit den Aufgabenanforderungen können die Lernenden aber im Problemlöseprozess Vorgehensweisen entwickeln, die ihnen auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen, das Problem oder Teile des Problems zu lösen.

### AUFGABEN ZUM PROBLEMLÖSEN:

Selbstverständlich sind auch sog. Knobelaufgaben wie ‚In einem Stall sind 22 Beine, wie viele Hühner und wie viele Schafe könnten es sein?‘ typische Problemlöseaufgaben. Aber wie das obige Beispiel ‚Zahlenhäuser‘ andeutet, weisen viele Aufgaben, die im Unterricht ohne hin eingesetzt werden, das Potenzial zu einer Problemlöseaufgabe auf. Problemlösen sollte keineswegs nur in Knobelstunden stattfinden. Und – wie eingangs formuliert – müssen die Lernenden dabei unterstützt werden, Probleme zu lösen und so durch vielfältige Gelegenheiten das Problemlösen immer besser zu beherrschen.

Um das zu erreichen, sind ‚gute Lernaufgaben‘ erforderlich (vgl. [pikas.mi.dzlm.de/110](http://pikas.mi.dzlm.de/110)), die ...

- dazu beitragen, dass die Schülerinnen und

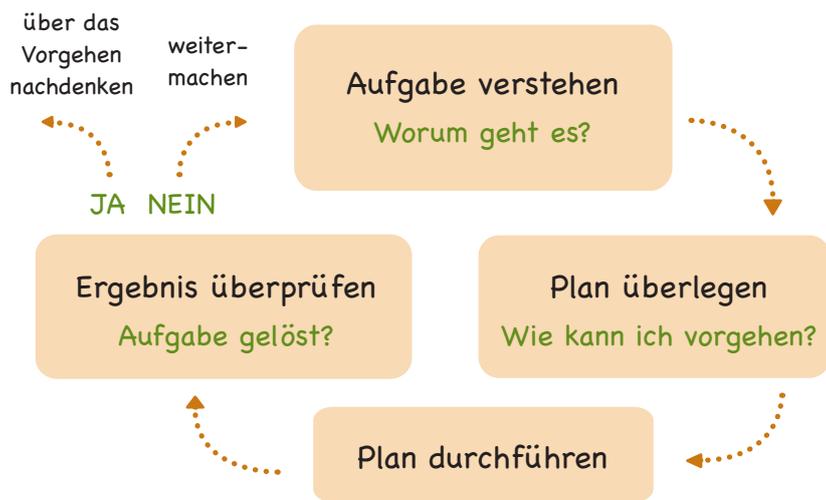
Schüler die im Lehrplan formulierten inhaltsbezogenen bzw. prozessbezogenen Kompetenzerwartungen erreichen können (vgl. das Beispiel „Entdeckerpäckchen“; <http://pikas.dzlm.de/edp>),

- für die Schülerinnen und Schüler sinnvoll, bedeutsam und authentisch sind, beispielsweise indem sie einen Lebensweltbezug aufweisen (vgl. das Beispiel „Unsere Schule in Zahlen“; <http://pikas.dzlm.de/125>),

- an vorhandenes Wissen anknüpfen und dieses kumulativ über die Schuljahre hinweg weiterentwickeln (vgl. das Beispiel „Additionen von Reihenfolgezahlen“; <http://pikas.dzlm.de/024>) sowie

- adaptiv auf die individuell unterschiedlichen Lernstände und Lernmöglichkeiten der Schülerinnen und Schüler eingehen, um allen Lernenden individuell angepasste Lernfortschritte und Könnenserfahrungen zu ermöglichen.

Hierzu müssen die Aufgaben an die individuellen Lernmöglichkeiten der Lernenden adaptiert werden. Was damit gemeint ist, wird auf [pikas-mi.dzlm.de/110](http://pikas-mi.dzlm.de/110) beschrieben. Darüberhinausgehend sollten den Lernenden Hilfen an die Hand gegeben werden, wie sie im Mathe-Forscher-Plakat zum Ausdruck kommen.



### FORSCHER-SCHRITTE:

Das Mathe-Forscher-Plakat besteht aus vier Teilen. Im linken oberen Viertel werden zunächst die Schritte im Problemlöseprozess beschrieben, die im Wesentlichen den Phasen des Problemlösens nach Polya (1995) entsprechen. Allerdings sind diese hier nicht linear, sondern im Kreis angeordnet, um deutlich zu machen, dass es häufig sinnvoll ist, die einzelnen Schritte mehrfach zu gehen, da es in der Regel so ist, dass man ein Problem nicht auf Anhieb lösen kann. Manchmal

kann es auch sinnvoll sein, rückwärts zu gehen, also noch einmal zum Verstehen der Aufgabe zurück zu gehen, nachdem man begonnen hat, sich einen Plan zu überlegen, ohne diesen auch durchzuführen. Um das Plakat nicht zu überfrachten, sind jedoch nicht alle möglichen Pfeilverbindungen eingetragen worden. Im Unterricht kann man die Lernenden immer wieder mal an diese verschiedenen Schritte erinnern, insbesondere daran, dass es wichtig ist, zu überprüfen, ob das erzielte Ergebnis tatsächlich die Lösung des ursprünglichen Problems darstellt.

Dieser Ablaufplan beschreibt die Vorgehensweisen beim Problemlösen in relativ allgemeiner, aufgabenunabhängiger Weise. Sich daran zu orientieren, kann für die Organisation des Problemlöseprozesses hilfreich

sein. Konkrete Hilfen beim Problemlösen selbst bieten die sog. heuristischen

Hilfen, in der Literatur häufig heuristische Mittel, heuristische Strategien und heuristische Prinzipien genannt. Diese sind in den anderen drei Vierteln des Mathe-Forscher-Plakats abgebildet und dort mit den Begriffen Forscher-Mittel, Forscher-Strategien und Forscher-Fragen bezeichnet.

### FORSCHER-MITTEL:

Mit Forscher-Mitteln sind nonverbale Darstellungsmittel gemeint, wie Plättchen, Mehrsystemblöcke, der Rechenstrich oder die Hundertertafel, der Gebrauch von Farben, Unterstreichungen oder Pfeilen (vgl. [pikas.dzlm.de/227](http://pikas.dzlm.de/227)).

### Striche

$$\begin{array}{r} 6+1 \\ 5+2 \\ 4+3 \end{array}$$

Pfeile

$$\begin{array}{r} 6 + 1 = 7 \\ 5 + 2 = 7 \\ 4 + 3 = 7 \end{array}$$

### Farben

$$\begin{array}{r} 6 + 1 = 7 \\ 5 + 2 = 7 \\ 4 + 3 = 7 \end{array}$$

### Plättchen

$$\begin{array}{r} 6+1 \\ 5+2 \\ 4+3 \end{array}$$

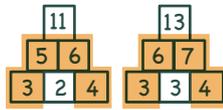
### Lupen

$$\begin{array}{r} 6 + 1 = 7 \\ 5 + 2 = 7 \\ 4 + 3 = 7 \end{array}$$

### Tabellen

H	Z	E
2	0	0
1	1	0
1	0	1
0	2	0
0	0	2
0	1	1

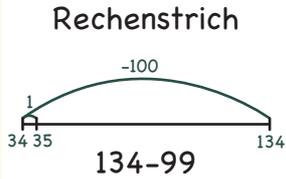
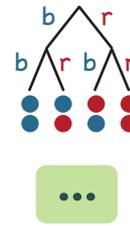
### Schablonen



### Ziffernkarten



### Diagramme



**FORSCHER-MITTEL** dienen dabei zum einen als *Instrument* (markieren, um zu entdecken): So ermöglicht das spaltenweise Umkreisen der Zahlen eines Entdeckerpäckchens den Kindern, ihre Aufmerksamkeit auf Teilbereiche der Aufgabe zu lenken. Sie können z.B. zunächst das Muster innerhalb der er-

sten Spalte wahrnehmen.

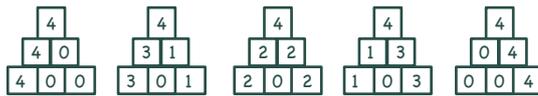
Nacheinander können sie dann die beiden anderen Spalten betrachten, bis schließlich ein Gesamtzusammenhang erkannt wird. Forschermittel dienen zum anderen auch als Dokument (markieren, um anderen erklären zu können) des Lösungsprozesses. Sie helfen dort zu erklären, wo Worte fehlen (für sich und für andere) und können visuelle Unterstützung bei Begründungen bieten: Die Lernenden können z. B. mit Hilfe von Plättchen erkannte Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten beschreiben und darüber hinaus auch anschaulich begründen (Selter 2017, S. 15f.).

Schülerinnen und Schüler sollten Forschermittel nicht nur als vorläufig zu verwendendes ‚Hilfsmittel‘ kennenlernen. Stattdessen ist es im Unterricht notwendig, einen natürlichen Einsatz und Umgang mit ihnen zu realisieren. Dazu sollte zunächst gemeinsam der Begriff ‚Forschermittel‘ inhaltlich geklärt werden und immer wieder dazu angeregt werden, diese zu verwenden. Unterstützend bietet es sich an, Forschermittel an der Tafel oder auf einem Plakat mit Hilfe von Piktogrammen oder Begriffen zu sammeln sowie stetig zu ergänzen oder sich am Mathe-Forscher-Plakat zu orientieren.

geschickt probieren

Muster suchen und nutzen

vereinfachen



ordnen



rückwärts denken

bereits gefundene Ergebnisse nutzen



...

### FORSCHER-STRATEGIEN:

Die Forscher-Strategien sind Vorgehensweisen, die den Lernenden helfen können, das Problem strukturiert anzugehen. In der nebenstehenden Aufgabe geht es darum, möglichst geschickt alle Dreier-Zahlenmauern mit dem Dachstein 4 zu finden. *Geschicktes Probieren* meint zum Beispiel, sich zu überlegen, wie man eine Mauer mit Dachzahl 5 verändern kann, um eine mit

Dachzahl 4 zu erhalten. *Bereits gefundene Ergebnisse* kann man *nutzen*, wenn man die Mauern, in deren mittlerer Reihe 3-1 steht nutzt, um diejenigen zu finden, in deren mittlerer Reihe 1-3 steht. *Von hinten aus zu denken*, kann bedeuten, von der Dachzahl aus zu denken und diese in zwei Zahlen zu zerlegen anstatt – wie bei Zahlenmauern üblich – von unten nach oben zu rechnen. *Vereinfachen* könnte bedeuten, erst einmal alle Mauern mit zwei Stockwerken zu finden, die die Dachzahl 4 haben. Die Auflistung der Forscher-Strate-

gien ist wie die der Forscher-Mittel und der der Forscher-Fragen nicht abgeschlossen. Sie können den Lernenden im Problemlöseprozess immer mal wieder angeboten werden (z. B. ‚Ordne mal alle Zahlenmauern.‘ oder ‚Was fällt dir auf, wenn du dir die mittlere Reihe anschaust?‘ (Muster suchen und nutzen)). Ihr Gebrauch sollte in gemeinsamen Reflexionsphasen besprochen werden, so dass sie zunehmend mehr Lernende kennen und nutzen lernen.



Habe ich eine ähnliche Aufgabe schon einmal bearbeitet?

Was passiert mit ..., wenn ich ... verändere?

Was ist gleich, was ist verschieden?

Wo ist das Gleiche nur anders herum?

Was weiß ich schon, und wie kann ich es nutzen?

Welche Zwischenschritte muss ich machen?

...?

### FORSCHER-FRAGEN:

Gleiches gilt für die Forscher-Fragen. Auch sie sollten immer wieder angesprochen werden. Häufig werden Fragen wie ‚Was ist gleich, was ist verschieden?‘ oder ‚Was passiert mit... (z. B. dem Dachstein), wenn ich ... (z.B. die mittlere untere Zahl um 1 erhöhe)?‘ auch schon Bestandteil der Aufgabenstellung sein, um die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler stärker zu fokussieren als es häufig bei der recht offenen Frage ‚Was fällt dir auf?‘ der Fall ist. Forscher-Fragen stellen wie Forscher-Strategien und der Einsatz von Forscher-Mitteln

für die Kinder natürlich einerseits eine Lernhilfe dar. Sie sind andererseits aber immer auch Lernstoff, da die Schülerinnen und Schüler erst lernen müssen, wie man sie zielführend einsetzen kann. Insofern ist es wichtig, sie behutsam verwenden, ihren Gebrauch immer mal wieder anzuregen und über ihre Verwendung mit den Kindern auch zu sprechen. Das Mathe-Forscher-Plakat kann hierzu einen Orientierungsrahmen bieten. Selbstverständlich kann ein solches Plakat nach und nach mit den Kindern gemeinsam entwickelt werden.

August2018 © pikas.dzlm.de

Das Forscherplakat gibt es auch als Kopiervorlage in schwarz weiß.

### LITERATUR

Polya, G. (1995). Schule des Denkens. 4. Auflage. Tübingen: Francke.

Selter, Ch. (2017). Guter Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen.

Zannetin, E. & Selter, Ch. (2018). Mathematik unterrichten in der Grundschule. Seelze: Kallmeyer.